

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGOGICO DE MARACAY
Centro de Investigaciones Educativas
PARADIGMA
CIEP

Edición Temática Nro. 1 | Mayo de 2023

**Lesson Study no
Ensino de Matemática:**
Contribuições da Formação
Japonesa em Diferentes Países

ISSN: 1011-2251

ISSN: 2665-0126

PARADIGMA, VOLUMEN XLIV

Editores Convidados
Masami Isoda
Yuriko Yamamoto Baldin
Aparecida Francisco da Silva
Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Regina da Silva Pina Neves

VOLUMEN XLIV, EDICIÓN TEMÁTICA N° 1
MAYO 2023

Paradigma



AUTORIDADES UNIVERSITARIAS

Raúl López Sayago
Rector

Doris Pérez
Vicerrectora de Docencia

Moraima Esteves
Vicerrectora de Investigación y Postgrado

María Teresa Centeno
Vicerrectora de Extensión

Nilva Liuval de Tovar
Secretaria



UPEL MARACAY

Eladio Gideón
Director Decano (E)

Celeste Pérez
Subdirectora de Docencia (E)

Francisca Fumero
Subdirectora de Investigación y Postgrado

Dra. Lubisay Hernandez
Subdirector de Extensión (E)

MSc José Varela
Secretario (E)



Revista del Centro de Investigaciones Educativas Paradigma
Depósito Legal AR2019000054



E - ISSN 2665-0126

Volumen XLIV
Edición Temática N° 1
***Lesson Study* en la Enseñanza de la Matemática:**
Contribuciones de la Formación Japonesa en Diferentes Países
Mayo de 2023

Director

Fredy E. González

Universidad Pedagógica Experimental Libertador (Núcleo Maracay)
Departamento de Matemáticas
Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM)
Venezuela

Consejo Editorial

Fredy E. González

Margarita Villegas

Marina García

Herminia Vincentelli

M^a Teresa Bethencourt

Erika Balaguera

Leonardo Martínez (✉)

Universidad Pedagógica Experimental Libertador (Núcleo Maracay)
Departamento de Componente Docente
Centro de Investigaciones Educativas Paradigma (CIEP)
Venezuela

Luis Andrés Castillo

Universidade Federal de Para (UFPA, Brasil)

Lourdes Díaz

Universidad Pedagógica Experimental Libertador (Núcleo Maracay)
Departamento de Castellano
Centro de Investigaciones Lingüística y Literarias
“Dr. Hugo Obregón Muñoz” (CILLHOM);
Venezuela

Ana Bolívar

Oswaldo Martínez

Susana Harrington

Universidad Pedagógica Experimental Libertador (Núcleo El Mácaro)
Departamento de Ciencia y Tecnología, Venezuela

Edmée Fernández

Representante en Estados Unidos de América
Pittsburg State University; Department of Modern Language
edmefe@yahoo.com

Se permite la reproducción total o parcial del contenido de esta Revista,
siempre y cuando se cite expresamente a la fuente



Revista del Centro de Investigaciones Educativas Paradigma
Depósito Legal AR2019000054



10.37618

ISSN 1011-2251

E - ISSN 2665-0126

Volumen XLIV

Edición Temática Nº 1

***Lesson Study* en la Enseñanza de la Matemática:
Contribuciones de la Formación Japonesa en Diferentes Países
Mayo de 2023**

La Revista **PARADIGMA** es una publicación semestral arbitrada, producida en el Centro de Investigaciones Educativas Paradigma (CIEP) indizada en el **IRESIE, CREDI-OEI, CEDAL, FEUSP, LATINO, BIBLO, DIALNET, CLASE, LATINDEX y REDUC.**

Certificada por la Scientific Electronic Library Online (Scielo Venezuela);
<http://www.scielo.org.ve/revistas/pdg/eaboutj.htm>

Acreditada por el Fondo Nacional de Ciencia y Tecnología (FONACIT)

Edición y Dirección de Producción

Fredy González

Diseño, Producción Gráfica y Apoyo Técnico

María Margarita Villegas

Luis Andrés Castillo

Canje, Distribución y Publicidad

Centro de Investigaciones Educativas Paradigma (CIEP)

Apartado Postal 514, CP 2101, Telf: (+58243) 2417866

e-mail: revistaparadigmaupel@gmail.com, revistaparadigmaupel@yahoo.es,
Maracay, Estado Aragua, Venezuela.

HECHO EN VENEZUELA



Revista del Centro de Investigaciones Educativas Paradigma
Depósito Legal AR2019000054



Volumen XLIV
Edición Temática N° 1
Lesson Study en la Enseñanza de la Matemática:
Contribuciones de la Formación Japonesa en Diferentes Países
Mayo de 2023

CONTENIDO

Editorial	1
Japanese Lesson Study, its Nature and its Impact on the Teaching and Learning Mathematics <i>Lesson Study Japonês, sua Natureza e seu Impacto no Ensino e na Aprendizagem da Matemática</i> Masami Isoda <i>University of Tsukuba / Japan</i> Yuriko Yamamoto Baldin <i>Universidade Federal de São Carlos / São Carlos-SP, Brasil</i>	5
The Development of Lesson Study in Malaysia: Issues and Challenges, and Its Contribution Towards Mathematics Education <i>El Desarrollo del Estudio de Lecciones en Malasia: Problemas y Desafíos y su Contribución a la Educación Matemática</i> Ui Hock Cheah <i>Southeast Asia Ministers of Education Organisation, Regional Centre for Education in Science and Mathematics (SEAMEO RECSAM) / Penang, Malaysia</i>	36
Chinese Lesson Study: its history, development, and implications <i>Lesson Study China: su historia, desarrollo e implicaciones</i> Rongjin Huang <i>Middle Tennessee State University; Murfreesboro, USA</i>	61

<p>The promise and challenge of school-wide Lesson Study in the United States <i>La promesa y el desafío del Lesson Study en toda la escuela en los Estados Unidos</i> Catherine C. Lewis <i>Mills College at Northeastern University / Oakland, CA</i> Justin Stodard <i>John Muir Elementary School (SFUSD) / San Francisco, CA</i> Joshua D. Lerner <i>Helen C. Peirce School of International Studies, Chicago Public Schools (CPS) / Chicago, IL</i> Hanna A. Sufirin <i>Oakland Unified School District (OUSD) / Oakland, CA</i></p>	<p>80</p>
<p>Lecciones compartidas: un modelo chileno de Lesson Study aplicado con profesores de primaria y con formadoras de profesores de primaria que enseñaran matemáticas <i>Shared lessons: a Chilean Lesson Study model applied with primary school teachers and with primary teacher educators who will teach mathematics</i> Soledad Estrella <i>Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile (PUCV) / Valparaíso, Chile.</i> Raimundo Olfos <i>Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile (PUCV) / Valparaíso, Chile.</i></p>	<p>110</p>
<p>Introdução dos Princípios da Lesson Study no Brasil: primeiros passos e grupos de estudo <i>Introducción de los Principios del Estudio de Clases en Brasil: primeros pasos y grupos de estudio</i> Yuriko Yamamoto Baldin <i>Universidade Federal de São Carlos / São Carlos-SP, Brasil</i> Aparecida Francisco da Silva <i>Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – UNESP / São José do Rio Preto-SP, Brasil</i> Thiago Francisco Felix <i>Fundação Instituto de Educação de Barueri / Barueri - SP, Brasil</i></p>	<p>131</p>
<p>Lesson Study e o Movimento da transformação da identidade profissional de professores do Colabora à luz da Complexidade, Dinamicidade, Temporalidade e Experiencialidade <i>Lesson Study and the Movement for the Transformation of the Professional Identity of Colabora Teachers in the light of Complexity, Dynamicity, Temporality and Experientiality</i> Maria Alice Veiga Ferreira de Souza <i>Instituto Federal do Espírito Santo (IFES) / Vila Velha, Brasil.</i></p>	<p>159</p>
<p>Conteúdos matemáticos e pedagógicos: contribuições, limitações e desafios em edições do Lesson Study no Grupo Colabora <i>Contenidos matemáticos y pedagógicos: contribuciones, limitaciones y desafíos en las ediciones de Lesson Study en el Grupo Colabora</i> Maria Alice Veiga Ferreira de Souza <i>I Instituto Federal do Espírito Santo (IFES) / Vila Velha, Brasil.</i> Poliana Figueiredo Cardoso Rodrigues <i>Instituto Federal do Espírito Santo (IFES) / Vila Velha, Brasil.</i> Camila Augusta do Nascimento Amaral <i>Instituto Federal do Espírito Santo (IFES) / Vila Velha, Brasil.</i></p>	<p>187</p>

<p>Formação inicial de professores de Matemática: uma experiência de intercâmbio internacional com base em estudos de aula <i>Formación inicial de profesores de Matemáticas: una experiencia de intercambio internacional a partir de los estudios de aula</i> João Pedro da Ponte <i>Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IE/ULisboa)/ Lisboa, Portugal.</i> Regina da Silva Pina Neves <i>Universidade de Brasília (UnB) / Brasília, Brasil.</i> Aluska Macedo <i>Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) / Campina Grande, Brasil.</i> Marisa Quaresma <i>Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal (IE/ULisboa) / Lisboa, Portugal.</i></p>	<p>213</p>
<hr/>	
<p>Aprendizagem Conceitual e Didática Acerca do Sentido de Número: resultados de um lesson study em uma escola pública sobralense <i>Aprendizaje conceptual y didáctico sobre el sentido numérico: resultados de un estudio de clase en una escuela pública de Sobral</i> Madeline Gurgel Barreto Maia <i>Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA) / Sobral, Brasil.</i> Dario Fiorentini <i>Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) / Campinas, Brasil.</i></p>	<p>241</p>
<hr/>	
<p>Conhecimentos profissionais de professores que Ensinam Matemática na Rede Municipal de Ensino de São Paulo a partir do seu envolvimento em um Projeto de Pesquisa pautado na metodologia Lesson Study <i>Conocimiento profesional de profesores que enseñan Matemáticas en la Red Municipal de Educación de São Paulo a partir de su participación en un Proyecto de Investigación basado en Estudio de Lección</i> Edda Curi <i>Universidade Cruzeiro do Sul / São Paulo, Brasil.</i> Priscila Bernardo Martins <i>Universidade Cruzeiro do Sul / São Paulo, Brasil.</i> Suzete de Souza Borelli <i>Universidade Cruzeiro do Sul / São Paulo, Brasil.</i></p>	<p>268</p>
<hr/>	
<p>The Lesson Study in the context of PIBID: challenges and possibilities for the initial teacher education of Brazilian Mathematics teachers <u><i>A Lesson Study no contexto do PIBID: desafios e possibilidades à Formação Inicial de professores de Matemática brasileiros</i></u> Renata Camacho Bezerra <i>State University of Western Paraná (UNIOESTE) / Iguazu Falls, Brazil.</i> Richael Silva Caetano <i>State University of Western Paraná (UNIOESTE) / Iguazu Falls, Brazil.</i> Maria Raquel Miotto Morelatti <i>São Paulo State University "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP) / President Prudente, Brazil.</i></p>	<p>293</p>

<p>Contributos do Contexto da Tarefa na Abordagem de Máximos e Mínimos em um Lesson Study em Cálculo</p> <p><i>Aportes del Contexto de Tarea en el Abordaje de Máximos y Mínimos en un Estudio de Clase en Cálculo</i></p> <p>Adriana Richit <i>Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS) / Erechim, Brasil.</i></p> <p>Luiz Augusto Richit <i>Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) / Porto Alegre, Brasil.</i></p> <p>Andriceli Richter <i>Instituto Federal Catarinense (IFC) / Concórdia, Brasil</i></p>	<p>317</p>
<p>Del Lesson Studies al Lesson Study italiano: un Proceso de Transposición Cultural</p> <p><i>From Lesson Studies to an Italian Lesson Study: a cultural transposition process</i></p> <p>Arzarello, Ferdinando <i>Department of Mathematics “G. Peano”; University of Torino; Torino, Italy</i></p> <p>Bartolini Bussi, Maria Giuseppina <i>Department of Educational and Human Science; University of Modena e Reggio Emilia; Modena, Italy</i></p> <p>Funghi, Silvia <i>Department of Mathematics “G. Peano”; University of Torino; Torino, Italy</i></p> <p>Manolino, Carola <i>Department of Social and Human Science; University of Valle d’Aosta; Aosta, Italy</i></p> <p>Minisola, Riccardo <i>Department of Mathematics “G. Peano”; University of Torino; Torino, Italy</i></p> <p>Ramploud, Alessandro <i>Department of Mathematics; University of Pisa; Pisa, Italy</i></p>	<p>340</p>
<p>Uso de Los Criterios de idoneidad Didáctica y la metodología Lesson Study en la formación del profesorado de matemáticas en España y Ecuador</p> <p><i>Use of the Didactic suitability criteria and Lesson Study methodology in mathematics teacher training in Spain and Ecuador.</i></p> <p>Vicenç Font <i>Universitat de Barcelona (UB) / Barcelona, España.</i></p> <p>Eulalia Calle <i>Universidad de Cuenca (UC) / Cuenca, Ecuador.</i></p> <p>Adriana Breda <i>Universitat de Barcelona (UB) / Barcelona, España.</i></p>	<p>376</p>
<p>Desenvolvimento Profissional de uma professora de Matemática: oportunidades no contexto do Estágio Curricular Supervisionado e do Programa de Residência Pedagógica em processo de Lesson Study / Professional Development of a Mathematics teacher: opportunities in the context of the Supervised Curricular Internship and the Pedagogical Residency Program in the Lesson Study process</p> <p>Aluska Dias Ramos de Macedo / <i>Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) / Campina Grande, Brasil.</i></p> <p>Regina da Silva Pina Neves / <i>Universidade de Brasília (UnB) / Brasília, Brasil.</i></p> <p>Janaína Mendes Pereira da Silva / <i>Universidade Federal do ABC (UFABC) / São Paulo, Brasil.</i></p>	<p>398</p>
<p>Pareceristas de la Edición</p>	<p>425</p>



Revista del Centro de Investigaciones Educativas Paradigma

Depósito Legal AR2019000054



Volumen XLIV

Edición Temática Nº 1

Lesson Study en la Enseñanza de la Matemática:

Contribuciones de la Formación Japonesa en Diferentes Países

Mayo de 2023

EDITORIAL

[10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p1-4.id1409](https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p1-4.id1409)

Editores Convidados

Masami Isoda

isoda@criced.tsukuba.ac.jp

<https://orcid.org/0000-0002-0017-3935>

University of Tsukuba; Tsukuba, Japan

Yuriko Yamamoto Baldin

yuriko@ufscar.br

<https://orcid.org/0000-0001-7473-5657>

Universidade Federal de São Carlos; São Carlos-SP, Brasil

Aparecida Francisco da Silva

aparecida_francisco57@hotmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-5570-1232>

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – UNESP; São José do Rio Preto-SP, Brasil

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza

alicevfs@gmail.com

<http://orcid.org/0000-0003-2038-813X>

Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes); Vila Velha, Brasil.

Regina da Silva Pina Neves

reginapina@mat.unb.br

<https://orcid.org/0000-0002-7952-9665>

Universidade de Brasília (UnB); Brasília, Brasil.

O presente volume temático da **Revista Paradigma – Lesson Study no Ensino de Matemática: Contribuições da Formação Japonesa em Diferentes Países** – objetiva

CONTENIDO

comunicar experiências de variados Grupos de Estudos e Pesquisas, com formações de professores que ensinam matemática em todos os níveis educacionais, conduzidas sob as premissas do Lesson Study.

Lesson Study é um processo de formação de professores da educação básica, originada no Japão no final do século XIX e desenvolvida ao longo do século XX, que atraiu a atenção de educadores matemáticos de diferentes nacionalidades, desde os anos finais do século XX, como um meio de estruturar ações docentes voltadas para melhoria da qualidade do ensino de conteúdos curriculares e da aprendizagem de alunos da educação básica. A expansão e a difusão do Lesson Study fora do Japão, como forma eficaz de formação inicial e continuada de professores de Matemática, foram experimentadas e intensificadas a partir das ações investigativas realizadas em países asiáticos.

Uma das primeiras iniciativas para além das fronteiras japonesas foi a publicação do livro *Japanese Lesson Study in Mathematics: Its impact, diversity and potential for educational improvement*, de Isoda, Stephens, Ohara e Miyakawa (2007), uma tradução para a língua inglesa do original publicado em japonês no ano de 2005, que apresentou uma coletânea de artigos que buscam esclarecer o significado de Lesson Study como uma atividade de pesquisa da aula, sua trajetória histórica no Japão, seus diversos aspectos que impactam os programas de formação de professores, os processos de desenvolvimento de currículos e o aperfeiçoamento dos professores na arte de ensinar. Do mesmo modo, esse livro registrou ações de cooperação internacional por meio de diferentes experiências que mostram a difusão do Lesson Study fora do Japão. A versão em língua espanhola *El Estudio de Clases Japonés em Matemáticas: Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*, de Isoda, Arcavi e Mena-Lorca (2007), ampliou o registro e a socialização de seu desenvolvimento em diversos países, sem, no entanto, atender de forma plena aos pesquisadores e professores no Brasil, devido às restrições de acesso aos textos em outro idioma.

É nesse sentido que esta edição temática da **Revista Paradigma** traz 16 artigos que discutem aspectos fundamentais de sua criação e experiências representativas de seu desenvolvimento em países da Ásia, da Europa e das Américas, visando ampliar o conhecimento do Lesson Study com registro de experiências brasileiras de desenvolvimento dessa metodologia em várias regiões do país, ao lado de investigadores estrangeiros que destacam a compreensão e a produção de conhecimentos de professores em diferentes espaços de atuação profissional. O

intuito é contribuir com a formação inicial e continuada de professores, bem como com o ensino de matemática em todos os níveis de ensino.

Este volume temático instiga todos a pensar em ações de, com e para professores por diferentes lentes teóricas e práticas, algumas ressignificações da própria identidade profissional e grupal de forma a (re)construir estratégias para a promoção de mudanças e melhorias nas formas de ensinar e de aprender nos dias atuais, a iniciar pelo artigo de **Isoda e Baldin**. Esse artigo apresenta a natureza do LS japonês que impacta a educação desde sua origem, especialmente na educação matemática e na formação de professores, aprofundando a história da sua evolução ao longo do século XX com análises críticas sobre diferentes etapas que foram desenvolvidas no Japão até os tempos atuais, quando é considerado um conceito importante em diversos temas de pesquisa na educação matemática, especialmente nas concepções sobre o ensino e aprendizagem da matemática na educação básica. O volume segue com contribuições de alguns países que receberam a influência da disseminação do LS, por meio de projetos de colaboração internacional. **Cheah** discute implicações do Lesson Study aprimorado e reconceituado em um projeto comunitário de aprendizagem na Malásia. **Huang**, por sua vez, trouxe um retrato holístico sobre ações históricas e culturais do Lesson Study levado a efeito com professores chineses em comparação com o *modus vivendi* japonês. **Lewis e Colaboradores** descreveram projeções e desafios da experiência de implantação nos Estados Unidos de um tipo de aprendizado profissional implementado no Japão por meio de um site amplamente utilizado por educadores japoneses. **Estrella e Olfos** apresentam a percepção de professores e formadores de professores sobre a utilidade e relevância do Lesson Study a partir de 16 itens.

Na sequência, **Baldin, Silva e Felix** destacam uma experiência de pesquisa que levou à implementação de grupos de estudos à luz do Lesson Study com apoio da gestão estadual educacional de São Paulo. **Souza** apresenta e discute o movimento de transformação da identidade profissional de membros do grupo de estudos que lidera em meio aos encontros para planejamento de aulas sob os princípios do Lesson Study. Adiante, **Souza, Rodrigues e Amaral** discutem as principais contribuições, limitações e desafios de professores em formação nos diferentes conteúdos matemáticos e pedagógicos à luz do Lesson Study. **Ponte e Colaboradores** salientam a aprendizagem de futuros professores em formação sobre conhecimentos didáticos em um intercâmbio de três universidades de Portugal e Brasil. **Maia e**

CONTENIDO

Fiorentini desejaram conhecer e discutir as aprendizagens conceituais e didáticas focadas no estudo do sentido de número em uma formação orientada pelo Lesson Study.

Curi, Martins e Borelli evidenciaram a importância do Lesson Study como metodologia que congrega prática e teoria, tendo em conta as especificidades da escola, os conhecimentos matemáticos e pedagógicos dos professores. **Bezerra, Caetano e Morelatti** estudaram as potencialidades de aspectos teórico-práticos do Lesson Study na formação inicial de professores de Matemática no contexto brasileiro do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência. **Richit e Colaboradores** investigaram o apoio do Lesson Study a influenciar a interpretação e abordagem de tarefas matemáticas de Cálculo. **Macedo e Colaboradores** discutem os conhecimentos matemáticos e da prática letiva observados por uma professora de matemática nos momentos de reflexão pós-aulas ministradas por futuros professores de uma instituição de ensino superior. **Arzarello e Colaboradores** relatam o percurso do trabalho de alterações do Lesson Study da cultura oriental para a italiana por meio da abordagem da Transposição Cultural. **Font, Calle e Breda** explicam o uso de Critérios de Adequação Didática e Lesson Study na formação de professores de Matemática na Espanha e Equador.

Finalmente, o volume temático **Lesson Study no Ensino de Matemática: Contribuições da Formação Japonesa em Diferentes Países** é bem-vindo, pois foi escrito por pesquisadores com diferentes experiências, vivências e nacionalidades na pesquisa educacional e com reflexões e exemplos de diferentes ordens e dimensões. Desejamos que a leitura dos 16 artigos cativem e inspirem os leitores, e que os deixe com vontade de experimentar o Lesson Study em toda sua potência para e com professores.



<https://www.even3.com.br/iisilsem/>

Japanese Lesson Study, its Nature and its Impact on the Teaching and Learning Mathematics

Masami Isoda

isoda@criced.tsukuba.ac.jp
<https://orcid.org/0000-0002-0017-3935>

University of Tsukuba

Tsukuba, Japan

Yuriko Yamamoto Baldin

yuriko@ufscar.br
<https://orcid.org/0000-0001-7473-5657>

Universidade Federal de São Carlos

São Carlos-SP, Brasil

Received: 02/04/2023 **Accepted:** 02/05/2023

Abstract

This article aims to present a text summarizing the main aspects and details of the Japanese Lesson Study, which has been systematically disseminated to countries outside Japan since 2006, and after the publication of a book in English in 2007. The purpose of offering a text, in Portuguese, is to facilitate students' and teachers' access to knowledge about Lesson Study-LS and its importance for the teaching and learning of mathematics. The article presents the origins and role of LS throughout the century in the teaching of mathematics in Japan, discusses its impact on curriculum development in Japan in the past and today, the importance of LS for teacher education, the structure of LS activities, the Problem-Solving as a central concept for developing the mathematical thinking in the activities of LS, and makes some considerations of the recent movement of diffusion of LS.

Keywords: Origin of Lesson Study. Mathematics Curriculum Development. Mathematical Thinking. Teacher Knowledge. Problem-Solving.

Estudio de Clases Japonés, su Naturaleza y su Impacto en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas

Resumen

Este artículo tiene como objetivo presentar un texto que resume los principales aspectos y detalles del Estudio de Clases Japonés, que se ha difundido sistemáticamente a países fuera de Japón desde 2006, y después de la publicación de un libro en inglés en 2007. El propósito de ofrecer un texto, en portugués, es facilitar a los estudiantes y profesores el acceso al conocimiento sobre Lesson Study-LS y su importancia para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El artículo presenta los orígenes y el papel de LS a lo largo del siglo en la enseñanza de las matemáticas en Japón, discute su impacto en el desarrollo curricular en Japón en el pasado y en la actualidad, la importancia de LS para la formación del profesorado, la estructura de las actividades de LS, la Resolución de Problemas como un concepto central para desarrollar el pensamiento matemático en las actividades de LS, y teje consideraciones del reciente movimiento de difusión de LS.

Palabras clave: Origen del Estudio de Clases. Desarrollo curricular en matemáticas. Pensamiento matemático. Conocimiento del profesor. Resolución de problemas.

Lesson Study Japonesa, sua Natureza e seu Impacto no Ensino e Aprendizagem da Matemática

Resumo

Este artigo tem como objetivo apresentar um texto resumindo os principais aspectos e detalhes da Lesson Study japonesa, que vem sendo sistematicamente divulgado para países fora do Japão desde 2006, e após a publicação de um livro em inglês em 2007. O propósito de oferecer um texto em português é facilitar aos alunos e professores o acesso ao conhecimento sobre a Lesson Study-LS e sua importância para o ensino e aprendizagem da matemática. O artigo apresenta as origens e o papel de LS ao longo do século no ensino de matemática no Japão, discute o impacto da mesma no desenvolvimento curricular no Japão no passado e hoje, a importância da LS para a formação de professores, a estrutura das atividades de LS, a Resolução de Problemas como um conceito central para desenvolver o pensamento matemático nas atividades de LS, e tece considerações do movimento recente de difusão da LS.

Palavras-chave: Origem da Lesson Study-Pesquisa de Aula. Desenvolvimento curricular em matemática. Pensamento matemático. Conhecimento docente. Resolução de problemas.

Introduction

The main objective of this article is to present the Lesson Study-LS to the Portuguese language community with a text accessible to educators and teachers of mathematics of basic education, presenting the main aspects and details of the Japanese Lesson Study, using as a basis the references that spread this methodology outside Japan. As these references were disseminated in English, initially, and in Spanish to the community in Latin America, not all the literature produced in the last two decades has been studied or worked on in Brazilian schools as implemented practices. The increasing diffusion in recent years of the methodology in Brazil and Portugal, as an important research topic of Mathematics Education, made the project of translating into Portuguese to contribute to deepening the basic knowledge of the Lesson Study very significant, which motivated this article, first in English as a basis to a Portuguese version.

In this introductory section, we briefly describe the movement, at the turn of the twenty-first century, to bring in a systematized way the knowledge of Lesson Study-LS to the United States, when in the last decades of the twentieth century, there was already collaboration between the mathematics education research of Japan and the United States, which aimed at improving the learning of mathematics in the classrooms of both countries, for example, in the 1960s, as stated in the preface of (Becker & Shimada, 2007).

The present article relies on parts of the basic literature, in English, which gave more intense openness to the diffusion of LS outside Japan, such as (Isoda *et al.*, 2007), but it brings as well other references to update the literature review.

By the year 2000, the national document of the US, “Before It’s Too Late: Report to the Nation from the National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st Century (2000),” was released. This document quoted TIMSS Video Tape Study and mentioned, “The basic teaching style in American mathematics classrooms remains essentially what it was two generations ago. In Japan, by contrast, closely supervised, collaborative work among students is the norm”. Since then, the Japanese Lesson Study (LS), *Jugyou Kenkyuu*, became the US movement in education and intensified its influence on the world.

In this process of influence, several misunderstandings about the essential concept of LS have emerged, preventing the effective implementation of the methodology. For instance, it is noted that several pieces of information would have been lost on the adaptations depending on the challenges researchers faced in various countries. On this issue, Watanabe (2018) points to studies such as (Chokshi & Fernandez, 2004), which highlight the misconceptions and conceptual misinterpretations of LS that emerged in the initiatives of implementation of LS in the United States in the first decades of the twenty-first century, when such initiatives focused on the procedural aspects of LS, caused by lack of in-depth information on the principles of the methodology. Care with the cultural perspective of the LS activity, as already pointed out by Stigler and Hiebert (1999), proved to be an important element to consider when planning the expansion of the methodology in cultures outside the country of origin.

In this scenario, the Asia Pacific Economy Countries-APEC-LS project was proposed by Thailand and Japan around 2006, promoting a collaborative movement among APEC participating countries to implement the Japanese LS. In each year, from 2006 to 2018, a theme was specified within the dimensions of the LS to promote efficient dissemination to support education and educators, especially from developing countries in the region, with an annual meeting promoted by the University of Tsukuba (<http://criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/>).

The APEC-LS Project aimed to promote appropriate notions of LS and to support improvement movements in the teaching and learning of mathematics in the participating countries. In the publication of the thematic issue on LS, several initiatives and projects of this movement are described by other authors in this thematic publication.

In this article, we will explain Japanese LS initially from the historical perspective of its origin, its functions, and the teaching approaches for sharing appropriate notions of LS. We will discuss the potential of LS to impact the curricular reforms of mathematics teaching aimed at adapting them to the updated demands of education and society.

1. Origins, History, and Variety of Lesson Study

1.1. Adaptation of Western Culture in Japan

Under the seclusion policies and class system that characterized the Edo period for about 260 years prior to the installation of the new Meiji government in 1868, literacy (and numeracy) education was available to commoners through *terakoya*, temple schools, that had opened autonomously around the country. Commerce thrived, and the class system in the social organization gradually collapsed during this period of seclusion, and by the late Edo period, individual knowledge and skills were highly regarded in the recruitment of workers. Due to the widespread emergence of temple schools, to which parents could voluntarily send their children, the literacy rate at the end of the Edo period was 43% among males and 10% among females, even then making Japan one of the most educated countries in the world. Individualized instruction was the common teaching method employed. (Isoda *et al.*, 2007)

In 1872, the Meiji government issued the Education Code and, at the same time, established a teacher education school (Normal School) in Tokyo (forebear to the University of Tsukuba). With the objective of disseminating Western scholarship, the government invited foreign teachers of different subjects to teach Western ways of conducting classes to the schoolteachers. The foreign teachers introduced the concept of whole-classroom instruction, a style then still rare even in the West, into the Normal School, as can be seen in Figure 1. At that time, the Japanese teachers and students were familiar only with the individualized instruction model in which subjects were taught individually based on the academic abilities of the student. The teachers learned with new classroom dynamics not only the contents of the subject but also methods of teaching by observing their teachers' behavior.

Figure 1: Shift between the classroom scenarios before and after the Meiji Revolution

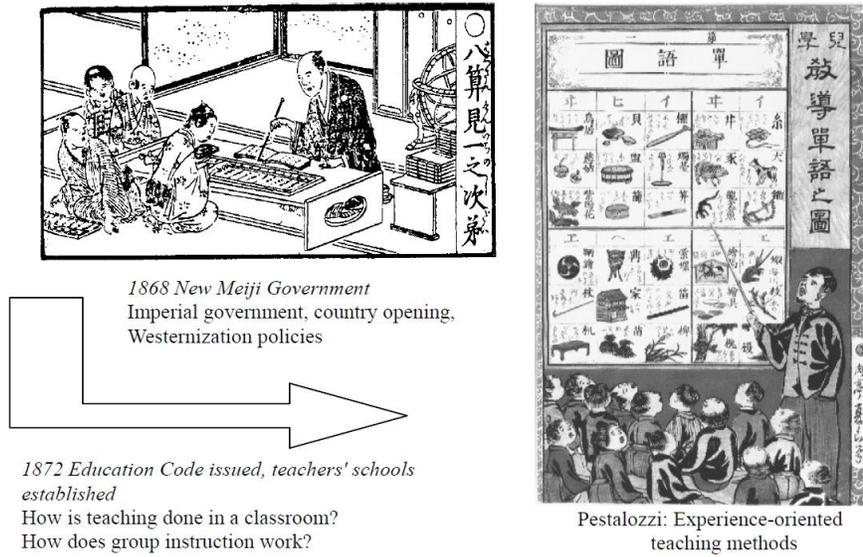
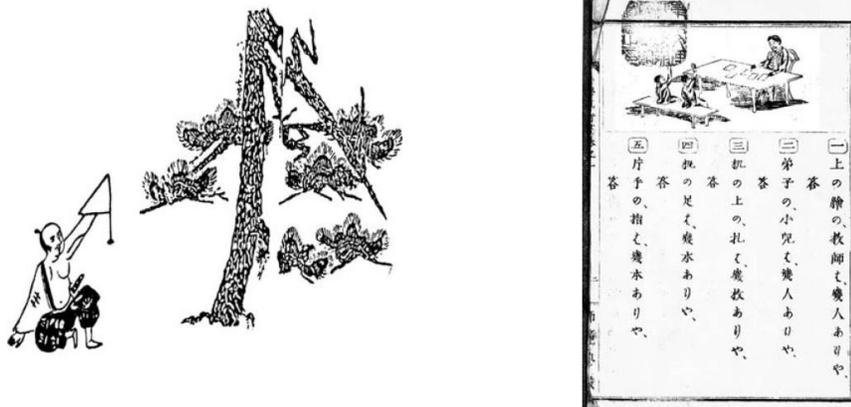


Figure 1: Shift from the curriculum and teaching methods of the *terakoya* (temple schools) to those of new types of schools.

Source: (Isoda *et al.*, 2007, p. 9)

Textbooks created by foreign teachers at Normal School contained drawings of students raising their hands to answer questions posed by the teacher, as shown in Figure 2.

Figure 2: Comparison of illustrations in textbooks before and after Meiji



“How tall is the tree?”

Illustration from *Jinkoki*, a mathematics textbook from the Edo period.

“How many people are raising their hands?”

Illustration from an elementary mathematics textbook in 1873.

Figure 2: From textbooks (left) that allowed students to study numeracy at their own discretion, depending on their needs, to textbooks (right) designed to allow students/teachers to simultaneously study learning/teaching methods.

Source: (Isoda *et al.*, 2007, p. 11)

The illustration on the left of Figure 2 represents an exercise from the mathematics textbook, *Jinkoki*, from the Edo era, before the Meiji government, in which a text of a problem

is posed for the student to solve it individually, using his own knowledge. On the right side, we can see a question posed “How many students are raising their hands?”, it is also the proposition of a problem, but its statement contains a question to be worked with the figure and dialogue, representing different pedagogical approach to the knowledge of teachers at the time. The foreign teacher wrote a textbook that teaches instruction methods as well as mathematics at the same time.

The group instruction model implemented at the Normal School in Tokyo spread to other teacher education schools around the country. Due to financial difficulties under the new government all the teachers' schools eventually closed around 1880, except the Normal School in Tokyo which became Higher Normal School in 1886. During the decade while the schools were open, the practice of group instruction was disseminated around the country by graduates of the teachers' schools. For the instruction in classrooms, they used scroll pictures as on the Figure 1, right, and textbooks with illustrations as on the Figure 2, right.

As Smith and Mikami (1914) wrote, Japanese mathematicians had already achieved highest level of the mathematics knowledge by 17th century. At that time, some of their findings were even earlier than those of western mathematicians through the renovation of Chinese mathematics written with Japanese and Chinese notations and tools such as abacus.

At Edo era, Japanese textbook for children already included numerous pleasant pictures and cartoon stories for enjoyable teaching and learning like in Figure 2, on left. The elementary mathematics textbook, *Jinkoki*, was the best seller among the publications through Edo era and to avoid bootlegs, it began to include challenge problems in the editions. This initiative supported the establishing the custom of posing mathematical problem each other. This custom spread to common people to encourage mathematics learning and research. On these bases, Japanese educators made it possible to introduce and adapt Western mathematics and education to new social organization.

1.2. Initiation of Lesson Study in Japan

Kyoushi Kokoroe, was the document that established the regulations of teacher's knowledge and profession, published by the Normal School (1873). It described, for instance, that other teachers may come into a class under the class teacher allowance, being such rule already a tradition from the beginning.

In the years 1880, study about the group instruction and its dissemination reached new heights when the overseas study missions began returning to Japan. At the same time the foreign teachers were working in Japan to teach new forms of instruction and content subjects, study missions composed by Japanese teachers and educators had been sent abroad to bring lively knowledge and teaching methods in their return.

Then, mission delegates became teachers at the elementary school attached to the normal school after their return, and a book for innovation of the teaching method was published (Wakabayashi & Shirai, 1883). This book contained the orientations to prepare teaching materials, as well as the instructions for conducting classes/lessons, and the ways of observation and critique. From the beginning of LS, it already included the current format of LS. Additionally, it included the model protocol amongst class-teacher and students as for the manner to re-present the lesson. The dialog is currently known as dialectic however their question-and-answer style was like traditional *Zen* or Confucius dialog. The Japanese Ministry of Education also enhanced Pestalozzi method by using hanging scrolls for showing pictures to illustrate the contents and problem-situation. Under the instruction of the Ministry of Education, the methods which include how to develop lesson plan, implement lesson and critique after class were implemented throughout Japan as a model.

Open classes, the origin of research-lessons, were held to encourage the proposal of new teaching methods and teaching curricula, producing the first interactive LS groups initiated through the government and the elementary school, attached to Normal School.

Figure 3: Scenes of open classes for LS, a tradition in Japanese mathematics education

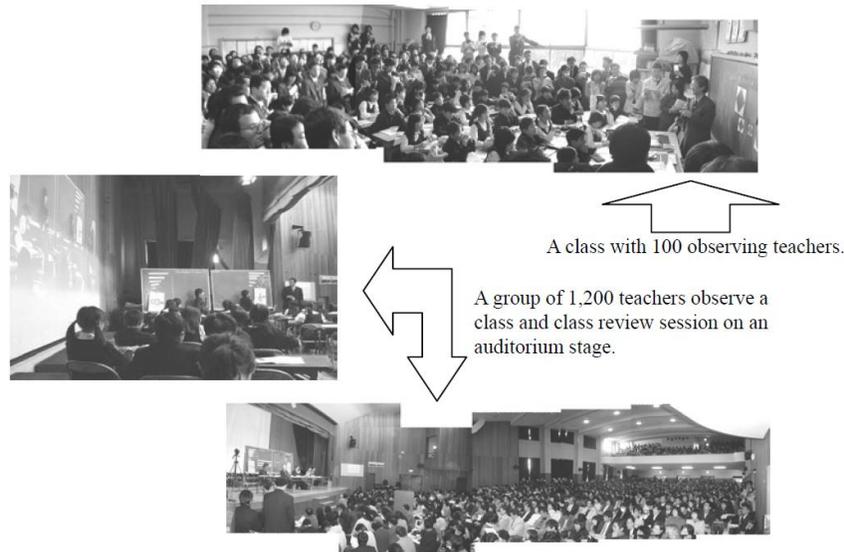


Figure 3: National Training Conference for Teachers at the Elementary School Attached to the University of Tsukuba, held since the Meiji period.

Source: (Isoda *et al.*, 2007, p. 13)

Figure 3 shows one of the national teachers' training conferences by the elementary school, which have been held since the Meiji period. In the case of the elementary school, LS at Auditorium in Figure 3 is only done for Mathematics and Japanese language. Especially, mathematics is the major subject for LS in Japan because the school level LS in teaching mathematics usually demonstrates well how teachers develop children's growing up in their learning abilities.

1.3. Historical Development of Lesson Study

As the country grew wealthier, it became possible for anyone to graduate from elementary school. The normal school became the Higher Normal School in Tokyo which produced the teacher educators, and every region re-established their normal schools. The custom of LS was shared through the internship program at normal schools.

At the beginning, Pestalozzi's method was the sole subject worked for LS. However, in later years teachers and teacher educators began to catch up newest western reform issues and Japanese innovative ideas for new themes of LS, which were related with curricula reforms, as shown in Figure 4.

Figure 4: Table of theme-topics of Lesson Study

	Topic of Lesson Study	Remark
1880s	Pestalozzi Method and Dialog Method (including argumentation/discussion/dialogue between teacher and students)	Not only limited to mathematics
1910s	Mathematics for Life (including problem posing)	Not only limited to mathematics
1930s	Curriculum Integration in Mathematics (including Open-Ended Problems)	From the 1900s
1950s	Core curriculum movement based on social studies	Under the occupation after WWII
1960s	Mathematical Thinking (Japanese way of New Math)	Related with New Math
1970s	Open-Ended Approach and Problem Solving Approach	For developing Mathematical Thinking
1980s	Problem Solving	Related with the U.S.

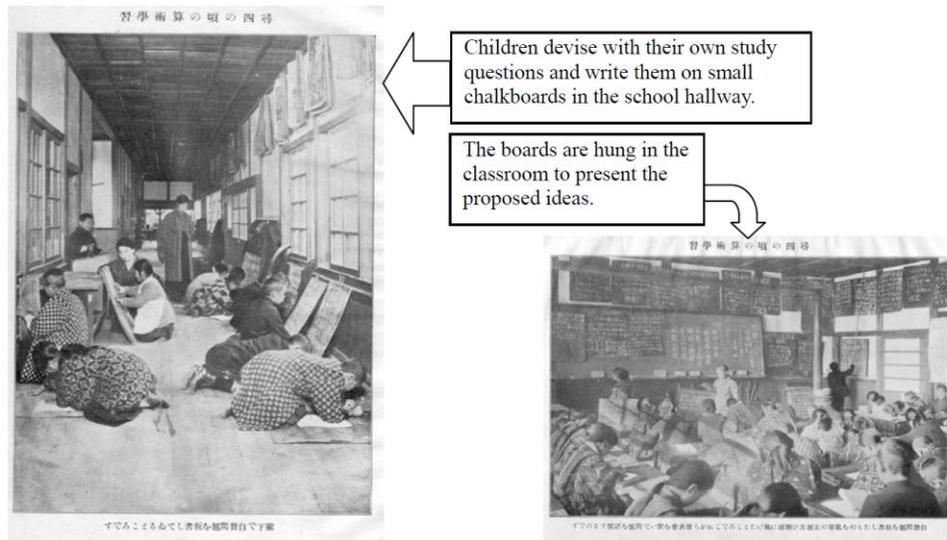
Source: (Isoda, 2015)

In 1904, *Journal of Education*, the oldest Japanese Journal in Education, was published by the elementary school. In whole Japan, teachers have been able to catch up the newest reform issues by themselves through the Journal, in which mathematics was included.

In addition to the format provided by Wakabayashi and Shirai (1883), texts for LS usually clearly indicate the study theme of the lesson. Currently, if the study theme is not written on the lesson plan, it does not function as “lesson plan of LS”, even that the elaboration of a lesson plan is necessarily studied in ordinary professional development activities.

After Wakabayashi and Shirai (1883), next large movement in Japan was around 1910s, in the case of elementary school, with new teaching methods based on the educational philosophy of scholars such as John Dewey. This movement launched an era in which private school teachers began proposing their own teaching methods. At that time, a new teaching approach to develop children who learn by and for themselves was proposed. It allowed students to come up with their own study questions, discuss with one another whose question they wanted to research, and then go about researching the selected question. This problem posing approach is illustrated in Figure 5.

Figure 5: Study on how to teach students to develop their own study questions, at the Elementary School of Nara Women’s Higher Normal School, around 1920.



Source: (Isoda *et al*, 2007, p. 15)

Beyond catching up the Western customs, around 1920s were the moment to establish such original and innovative teaching approaches that focused on problem-solving, which today are globally recognized as models of constructivist approach.

In secondary level mathematics, the Klein Movement from the beginning of 20th century which advocated the integration of independent subjects of mathematics into one mathematics curriculum was also well known in early stage in Japan. However, Japanese mathematician group of the University of Tokyo wished to keep traditional subjects in mathematics and Higher Normal School’s math-educators became independent through the establishment of the Japan Society of Mathematical Education (JSME) in 1919 (Isoda, 2019).

From around 1910s up to World War II-WWII, the period that comprises the difficulties of Great Earthquake in Tokyo (1923) and Global Depression (1929), Japanese Curriculum Standards were revised based on the LS by Higher Normal School’s teachers and mathematicians, with collaborations of the members of JSME. Until WWII, several journals for mathematics education which promote LS and curriculum development had been published, to be discussed in the next section.

After WWII, Japan was controlled under the General Headquarters of US that occupied the country, for 10 years. The Education Standards became just a recommendation from the government, and the Normal School became the teacher education college, which main teacher

trainers were subject specialists such as mathematicians. At the same time, the established custom to develop mathematics curriculum through LS was supported by mathematicians and math-educators, providing the bases for Japanese New Math Movement through their contributions. At the primary school level, the ideological oppositions to it beyond the mathematics remained until 1980s because there were few math-major teachers in primary schools, many of them concentrated in how to teach mathematics instead of how-to develop children who learn mathematics by and for themselves, as recommended as main issues on the standards.

It is interesting to notice that even though the discussion had gone parallel between sides, teachers' core value was making efforts for children. In this regard, LS clearly demonstrated the difference, showing that adequate approaches in classroom were possible through lessons to develop children actively and enjoyably with planned activities. The Problem-solving approach (teaching through problem solving) has been strengthened since that times because it clearly demonstrated children growing to learn mathematics by and for themselves, which evidence was investigated by the school through LS.

In 1980s, the official system for training first year (novice) teachers was established in the recently launched *in-service teacher education curriculum*, in which the Problem-solving approach was offered as attractive and meaningful methodology for young teachers. Since then, problem-solving approach is well known as a major way of teaching mathematics in Japan.

2. How Lesson Study spread to the world

The first international survey by the International Association for the Evaluation of Educational Achievement-IEA was done in 1964, and Japanese students got highest average. Then, in 1980s, researchers from many advanced countries visited Japan for knowing the reason and the how. In 80s, Ministry of Education has begun to offer the teacher education program for foreigners, for 18 months, attending around 100 teachers every year. At that time, Japan International Cooperation Agency-JICA also began to dispatch Japanese teachers abroad and invited foreign teachers for training to collaborate in dissemination of good education. First Japanese teacher who went dispatched to foreign country with the support of JICA was an elementary schoolteacher. He went to the Southeast Asia Ministers of Education Organization-SEAMEO, Regional Centre for Education in Science and Mathematics - RECSAM in Malaysia which is the teacher training center for Southeast Asia in Mathematics and Science. One part of

the building and the equipment of RECSAM itself was also the Japanese Official Development Assistance.

In mathematics education research, Japan-US comparative study for problem solving has been done from the middle of 1980s to the middle of 1990s, and several US researchers had the opportunity to observe Japanese mathematics lessons. This has enhanced the previous collaboration between Japanese and US researchers in mathematics education as already mentioned in the introduction of this paper. On this occasion, *Jugyou Kenkyu* was translated as Lesson Study-LS, when the TIMSS video tape study compared the lessons of US, Germany and Japan, and Makoto Yoshida wrote, in 1999, his famous PhD thesis on this context, being (Fernandez & Yoshida, 2004) a book elaborated upon his work.

In Philippines, since 1994 JICA has provided 87 technical assistance projects on mathematics education for developing countries which have been changing in time, depending on their developing status. On this background, “Before It’s Too Late: Report to the Nation from the National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st Century” (2000) was published in US. As mentioned in the introduction, this document became the trigger of the dissemination of LS towards the world. Also mentioned before, the APEC lesson study project was established since 2006 with participant economies of APEC and has promoted LS under specific themes of LS for each year (<http://criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/>).

3. Variety of Lesson Study

In the world, under the influence of Yoshida and others, LS became known by the cycle of “planning (lesson), doing and seeing” process, with collaborations of various agents and participants. The start of LS in each country is in general done by researchers.

The known Japanese model for LS is usually focused on school-based Activities to establish a learning community. In Japan, LS has been a part of teachers’ profession since the origin which process was already characterized by Wakabayashi and Shirai (1883) until 1980, when the official *teachers’ professional development regulation reform* set LS as the part of the curricular obligation for first year teachers and for tenth year experienced teachers at in-service teacher training centers. Before this reform, study and training were just the right for teachers, and LS was a voluntary part even when it was supported officially. They do LS by and for themselves with various background supporting system.

About the background of LS, we can say that there is various support system.

Firstly, there is an official support system, composed by school principal, supervisors, and teacher trainers, which promote the establishment of a learning community in the school. Selected teachers are also supported to go to master program in education at universities. In these programs, LS is usually a part of their education.

Secondly there is unofficial support system such as teachers' community. For example, there are various teachers' journals, guidebooks and private articles published by teachers' groups, society, and publishers. Most of them are written by teachers as part of their cultural practice. When we compare these writings with academic journals in educational research with qualified reviewing system, a major difference is that there is no custom or necessity to write the articles in accordance with academic styles such as indication of references, etc. It is written to share the good or necessary ideas of teaching and the objective of writing itself is to enable to others reproduce better teaching for themselves. Thus, the descriptions they write are often unnecessary to follow exactly their lesson itself. But it should be written based on their reflections what they learned from children in the lesson during some cases of open class (public class), and from other teachers in the post-lesson discussions. The opportunity for contribution to journals and guidebooks are usually given by editors or others. It is an honorable experience for young teachers because it means that they are recognized in teachers' community as outstanding practitioners for developing children. Asking others to contribute to journals has been functioning to enlarge LS community for well experienced teachers. Even researchers support their publications as the editors, though they do not always attend every LS in their LS community.

Depending on school levels, LS are not the same. Internationally shared LS is known through Japanese problem-solving approach for teaching and learning mathematics at the primary and the middle (Junior high) school level (Isoda & Katagiri, 2012), because their practices are possible to share. On the other hand, for the case of high school level, although there is a regulation to do LS on the official professional development system, open classes (public classes) for LS can be seen only in special occasions. High school mathematics teachers have been focused more on their own curriculum development because the students go to different schools depending on their achievements and the professional orientation of the curriculum for the chosen careers. Therefore, the practices of different lessons are not easy to share at this level because teaching content could not be the same in different schools nor have

the same learning objective. However, the teachers do practice the collaborative working through team-teaching, following the “planning, doing and seeing” process with collaborations. They also can differentiate students depending on their achievements, even when they have to teach more classes than their obligation.

4. Curriculum Development through Lesson Study in the Past and Nowadays

In this section we show some cases of curriculum development in historical order across generations. It is important to point that LS clearly promote the renovation of the textbooks and supplementary books for students and teacher educations as well as mathematics curriculum.

4.1. First Textbook as the result of Lesson Study

In the case of primary school mathematics textbooks, one national textbook which focused on to acquire arithmetic operations had been used from 1905 to 1934. Although it was revised slightly in three occasions, several proposals based on the achievements from the practice of LS were not reflected in textbooks. In this context, LS was only functioned to produce innovative methods of teaching. To promote the development of mathematical science thinking, first major revision of the textbook was published in 1935 starting from the first grade and completed in 1940 with the contributions of Elementary School Mathematics Teachers Group.

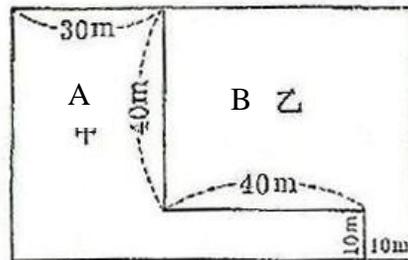
Figure 6 is an example of a problem in this publication. In current view, it is an Open-ended problem which has not enough condition and possible to produce various answers. It also looks like OECD PISA type problem.

Figure 6: A sample of problem from primary mathematics textbook

Problem

A and B have land adjacent to each other as shown in the diagram on the right.

Both of them would like to make each land simple rectangular without changing the area. How shall they fix the boundary.



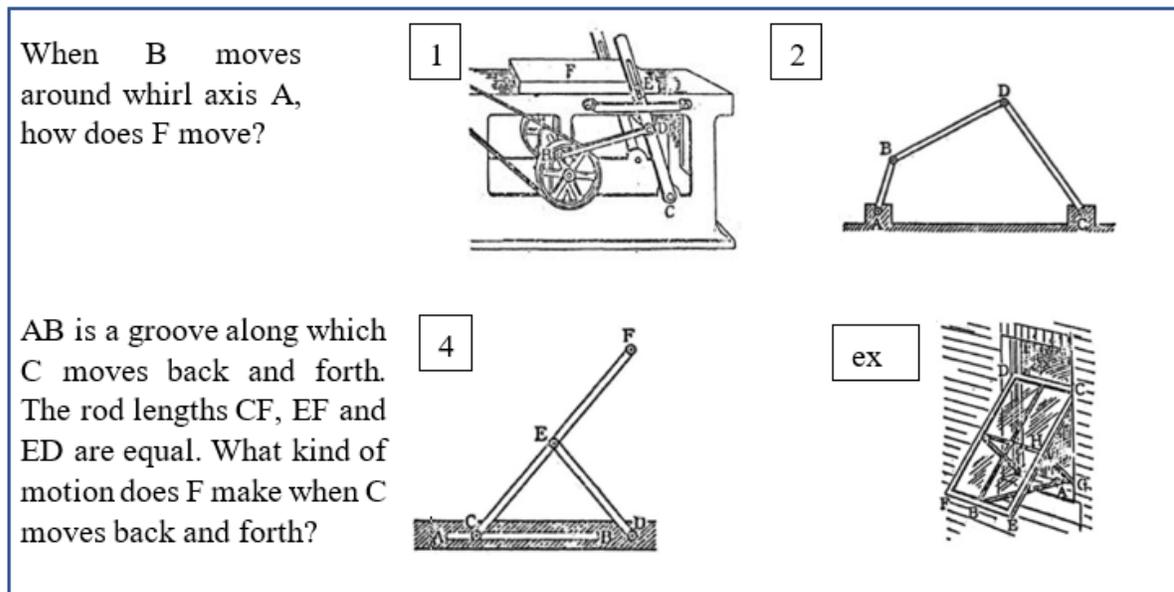
Source: <http://www6.plala.or.jp/maeda-masahide/4menseki.html>

After the revision of primary textbook, the corresponding middle school curriculum reform was proposed on the annual meeting of JSME in 1935. At the same time, Ministry of Education established the curriculum reform committee. Under JSME, the proposals were discussed in Tokyo. Osaka and Hiroshima committees independently based on each LS worked under the discussions and research in their related journals. In the case of Tokyo, mathematics teachers' group of Middle School in Higher Normal School at Tokyo belonged as members of both committees, and they finally engaged major role for the revision of national curriculum (1942) and textbooks (1943). The textbooks were first mathematics textbooks which integrated various subjects in mathematics as one unified mathematics concept, under the influence of the Klein movements. The principle of the textbooks was to promote mathematization by students and it was written based on the practice of LS at Middle School.

For example, there were task sequence to learn Mechanism like in Figure 7 which provided geometric bases for Calculus in Figure 8.

Later viewed as such by Freudenthal, H. (1973), the principle of mathematization means reorganizing mathematics by using functional representations.

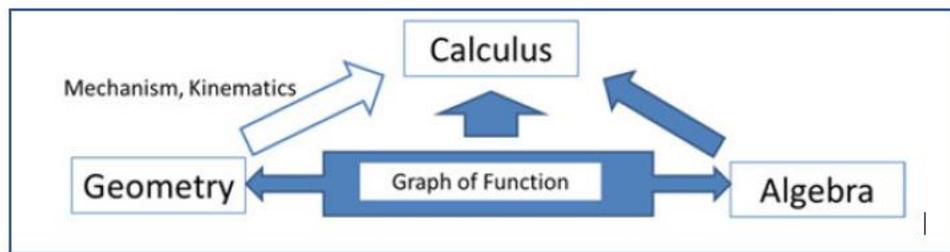
Figure 7: Analysis of the Motion on Mechanisms



Source: Adapted from Bussi, Taimina & Isoda (2010)

(Isoda, M., 2018). https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-99386-7_9

Figure 8: Integration of Geometry and Algebra with Functions to Calculus



Source: (Isoda, 2019, p. 126)

(Isoda, M., 2018). https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-99386-7_9

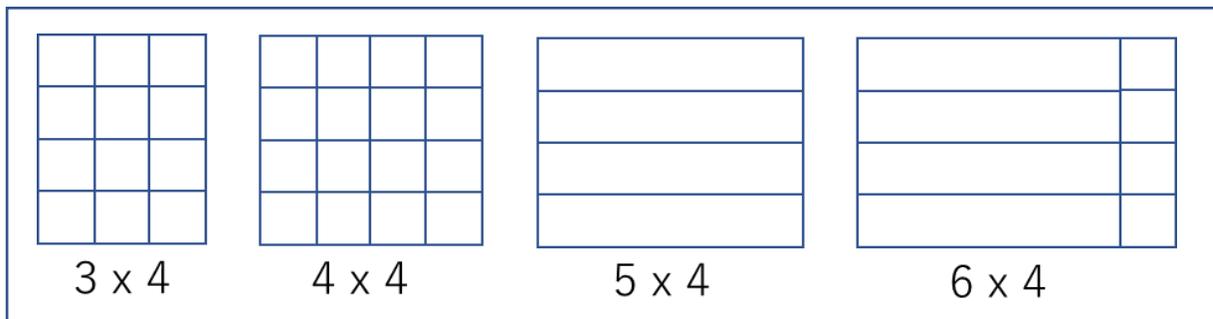
The examples resulted from the LS at Middle School and there was a remarkable episode: After WWII, a teacher named Tanaka who was the author of the textbook returned to the countryside, Gifu, to take over his father's temple and became a teacher at Gifu High School. The impression of another teacher who observed his LS was "He just walked around the desk for supporting students and didn't teach." Observer teachers who attended LS were expected to learn the way of lecturing, however his methodology, which is currently called problem solving approach, was too outstanding for them at that time, because his approach was oriented to develop students to learn mathematics by and for themselves by using prepared task-sequence.

4.2. Principle for the Curriculum: Extension and Integration, or General to Special

After the reestablishment, the national curriculum standards had been criticized by teachers' unions for 30 years. Meantime, with critics and against critics, LS produced theories for curriculum and teaching. For example, the government set the extension and integration principle which explains a task sequence that went against the general-to-specific principle proposed by the LS group with a mathematician Hiraku Toyama. This principle was used by the group since the 1950s with the name of "the water supply method", as a metaphor from general-to-specific (Kobayashi, 1989). General to Specific was the system of mathematics for the group and it was the theme of their LS. For teaching general idea, they proposed a specific use of manipulatives in general, and theorized their teaching as "the internalization of Schema". This word was borrowed from Piaget to explain the mathematical abstraction of introducing new operation based on existed operation, but their theory was hiddenly and strongly supported by materialism because they denied the contradiction which enhanced on Piaget's genetic epistemology. They never discussed the cognition through 'accommodation' beyond contradictions on their LS. On their own theoretical bases, they proposed to explain "the

general” by using tiles: single, five, ten (two-five), square (ten two-fives), 10 square, 100 square ... (they did not go to 3D cube). On their rule to use manipulative tiles, they must change the five singles  to the five-tile  because the tiles function as intermediate-tools between fingers and numbers. They believed that the rule should be applied even in the case of multiplication, as illustrated in Figure 9.

Figure 9: At 5×4 , the singles should be changed to the fives. Then, 6×4 looks 4×6 .



Source: (Isoda, 2019)

The Figure 9 indicates strange things like the counting unit changing from four to six. The picture on the right of Figure 9 is shown as being still 6×4 , and on their teachers’ guidebooks, it says that it is the moment for teachers to explain to children that “Multiplication is not addition.” They asserted that their method is correct because it is mathematically well configured within primary level. As far as one believes that the tile management rules as in the Figure 9 are correct, it can be recognized that we are only considering the area of tiles in total as the answer for multiplication briefly, and one never sees how each line of tiles would express the model to answer the result of each row multiplication. Against such critique, the belief of that group was strong enough to some of them continued their LS with this approach for their classroom children, until their retirements, for more than 30 years in some limited regions such as Hokkaido, north island of Japan, which was in front of Soviet Union.

They denied the national curriculum standards in course by that time because it produced some misconception through over generalization by children. Misconception was just a bad thing for them. As counterpart, several LS groups from the government side had to make clear the principle and the theory against the “water supply method”. Some groups called it mathematization and other group discovery. Ito (1968) named his theory as discovery methods, which were proposed to use specific representations to mediate ideas such as proportional

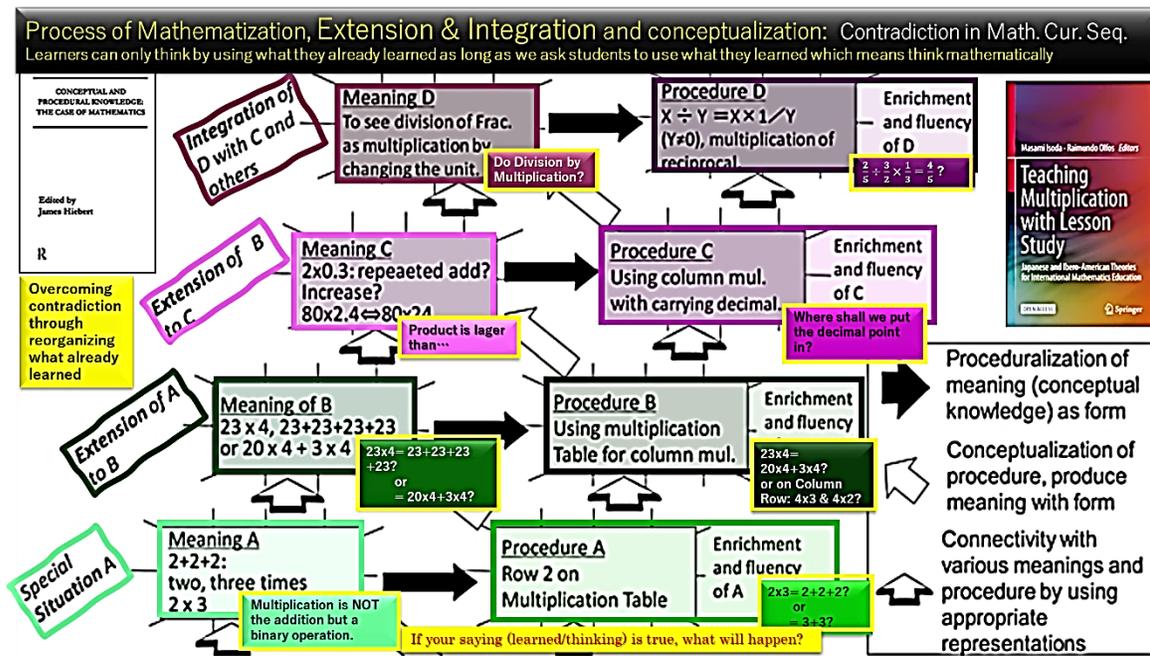
number lines. This idea is currently well known as Japanese approach and is proposed to teaching mathematics, for it enables children to use these representations by and for themselves (Ito, 1971, English version). This was the result of his LS group.

Under the confrontation of these counter theories, National Standards set the principle ‘Extension and Integration’ since 1968, which implicated the overcoming of misconception beyond the over generalization, and it was considered as basic for teaching with mathematical thinking. With this principle, the misconception is recognized as good thing within the expectations in national curriculum, because it can be the result of overgeneralization resulted from the children’s thinking by and for themselves using what students already learned.

Figure 10 was later proposed by Isoda (1992) and Isoda and Olfos (2021) to explain the process of extension and integration in the case of multiplication, by using the theory of conceptual and procedural knowledge (Hiebert, 1986). Here, Isoda applied the theory to explain the curriculum and textbook sequence. Conceptual knowledge is usually taught for bringing meanings. However, it needs to use some known form of procedure. After introducing the meaning of multiplication as a binary operation (expression), the multiplication table is proceduralized from repeated addition; otherwise, students cannot distinguish it from addition as a new operation. In the process of extension and integration, inconsistencies usually appear.

For example, for multidigit multiplication, students need to see the multidigit numbers under the base ten system to apply the multiplication table instead of just repeated addition. For the extension of multiplication to multidigit numbers with column methods, multiplication as repeated addition should be integrated with the base ten system by using the rule of distribution. If we extend multiplication from whole numbers to decimals, the product of multiplication becomes small in case. It cannot be explained well as repeated addition. In the Japanese textbooks and Japanese teachers’ lesson design, as shown in (Isoda & Olfos, 2021), these processes are discussed more precisely in the classroom practices in relation to the task sequence on the textbook.

Figure 10: Through extension of number, meaning and procedure are re-integrated.



Source: (Isoda, 1992, 1996, 2009)

The parallel discussions between Toyama Group for Union side and other Groups closer to government side well demonstrated their different views of Mathematics. Toyama view related with more Platonism as for ontology of Idea, and the discussion for internalizations from physical world is more oriented to Aristoteles. Government side was more oriented to the dialectic epistemology by Plato and Hegelians for overcoming contradictions.

In Japan, New Math movements began in 1950s and enhanced in 1960s. Through the period, mathematicians used to strongly support their LS groups. In the case of Hokkaido, mathematician Akitsugu Kawaguchi who was the president of the Hokkaido Society of mathematics education, supported his study groups in relation to the implementation of the annual meeting of JSME at Sapporo (1961) in Hokkaido. The theme of their LS was innovation of geometry curriculum from the perspective of Dynamic Geometry, meaning transformative geometry. His LS group produced their proposal depending on their school levels. Primary school group published the guidebooks for teachers on how to teach the idea of transformation at primary school from the editorial Meijitoshu, a teachers' guidebook-publisher. Middle school group published four experimental textbooks, under the textbook company, Kyouiku Shuppan, which explained the mathematical transformation. It was the result of their learned Dynamic Geometry which oriented curriculum development, but quite difficult to implement it at their

school level. High school group published the guidebook for students from the exam guidebook publisher, KeisetuJidai-Obunshya, about how to apply the ideas of Dynamic Geometry to entrance-exam problems to university. Those three different products also demonstrate the difference of LS at each school level, at the era of New Math in Japan.

5. Mathematical Thinking and Values for the Objectives of Lesson Study

Japanese aims of education have been described as three pillars: human character formation (such as values and attitudes), general thinking skills (such as mathematical thinking and ideas), and specific knowledge and skills (such as mathematical knowledge and skills). Even if we change the terminology, the principal aims are found as common not only for Japan but also for other countries such as the Southeast Asian countries (Mangao *et al.*, 2017). These aims were generally discussed until New Math era.

The first two pillars are usually explained as higher order thinking skills in many countries and as the learning content for *learning how to learn*. It is usual for teachers to write or share these objectives through the lesson plan. According to the Japanese principle of the national curriculum, these aims are symbolized by a single concept: “*Developing students who learn mathematics by and for themselves*” (Shimizu, 1984).

In Japanese mathematics education, this has been recognized in relation to mathematical activities as for reorganization of living and life (Ministry of Education, 1947). As a concept, the activity has been re-explained as mathematical thinking and attitude (Ministry of Education, 1956) by Japanese math educators, who have tried to explain it further.

Figure 11: Katagiri’s Framework for Mathematical Thinking

I. Mathematical attitudes: Mindset
1. Attempting to grasp one’s own problems, objectives, or entities clearly by oneself
(a) Attempting to have questions
(b) Attempting to be aware problematic
(c) Attempting to find further problems from situation
2. Attempting to take logical-reasonable actions (reasonableness)
(a) Attempting to take actions that match the objectives
(b) Attempting to establish a perspective
(c) Attempting to think based on the data that can be used, previously learned items, and assumptions
3. Attempting to represent matters clearly and simply: Clarity
(a) Attempting to record and communicate problems and results clearly and simply
(b) Attempting to sort and organize objects when representing them
4. Attempting to seek better ways and ideas
(a) Attempting to raise thinking from the objects to operations
(b) Attempting to evaluate thinking both objectively and subjectively, and to refine thinking
(c) Attempting to economize thought and effort
II. Mathematical thinking related to mathematical methods: Mathematical Ways of Thinking
1. Inductive thinking
2. Analogical thinking
3. Deductive thinking
4. Integrative thinking (including extension)
5. Developmental thinking
6. Abstract thinking (thinking that abstracts, concretizes, and idealizes, and thinking that clarifies conditions)
7. Thinking that simplifies
8. Thinking that generalizes
9. Thinking that specializes
10. Thinking that symbolizes
11. Thinking that represents by numbers, quantities, figures and diagrams
III. Mathematical thinking related to mathematical contents: Mathematical Ideas
1. Clarifying sets of objects for consideration and objects excluded from sets, and clarifying conditions for inclusion (the idea of sets)
2. Focusing on constituent elements (units) and their sizes and relationships (the idea of units)
3. Attempting to think based on the fundamental principles of expressions and the permanence of form (the idea of expression)
4. Clarifying and extending the meaning of things and operations, and attempting to think based on this (the idea of operation)
5. Attempting to formalize operation methods (the idea of algorithms)
6. Attempting to grasp the big picture of objects and operations, and using the result of this understanding (the idea of approximation)
7. Focusing on basic rules and properties (the idea of fundamental properties)
8. Attempting to focus on what is determined by one’s decisions, finding rules of relationships between variables, and using relationship (functional thinking)
9. Attempting to express propositions and relationships as formulas, and to read their meaning (the idea of formulas)

Source: (Isoda & Katagiri, 2012, 2016)

Shigeo Katagiri (Katagiri, Sakurai & Takahashi, 1969; Katagiri *et al.*, 1971), a curriculum specialist in primary school mathematics in the Ministry of Education, established the framework for mathematical thinking with teachers, Figure 11. He published 40 guidebooks for teachers with his LS group.

The Framework listed in Figure 11 is used in LS to develop mathematics problem for knowing which type of mathematical thinking is necessary to use for solving a problem. And then, it is used with the purposes of clarifying in a lesson plan what kinds of questions are necessary to pose to promote the mathematical thinking. It does not correspond to a list of hints such as the strategies for solving problems adapted from Polya (1945). It also explains the needs to practice like the recommendations in the list. It is used for writing objectives more concretely and to clearly specify the teaching with each material and process. It also provides the general study subject/topic of the lesson study beyond every objective of the teaching content. Katagiri also developed the list for questioning in the classroom in relation to teaching phases.

5.1. Task Sequence to Develop Mathematical Thinking

The Middle School at Tokyo Higher Normal School, after WWII, was divided into Junior High School and High School at Tokyo University of Education. Both mathematics teachers' groups were active in the already mentioned Union's group at the beginning stage. However, they became independent and established their own LS groups because they did not agree with Toyama's theory and leadership, and they oriented more freely discussion for mathematics curriculum development by themselves. Kiyoshi Yokochi established Mathematics Education Society of Japan (not JSME) at the High School. Toshio Odaka established School Mathematics Study Society at the Junior Secondary School of the Tokyo University of Education- SMSS-JSS-TU. He developed his own schema theories (Odaka, 1975, 1979, 1980) for a problem-solving approach (SMSS-JSS-TU, 1971, 1972), inspired by the idea of Piaget for supporting the extension and integration principle from the tradition of mathematization in the 1943 national textbook, as its successors.

Odaka's theory, called the "exemplar approach", was a counter theory to explain an appropriate curriculum and a task sequence, with his own schema theory under Piaget and against Toyama's one. Exemplar means the task (problem) which represents each schema, and his task sequence for problem solving approach (Odaka & Okamoto, 1982) is explained by the

sequence of schema in which all necessary schemas explain what students shall learn at primary and junior high schools. Figure 12 is an exemplar problem and its renovation.

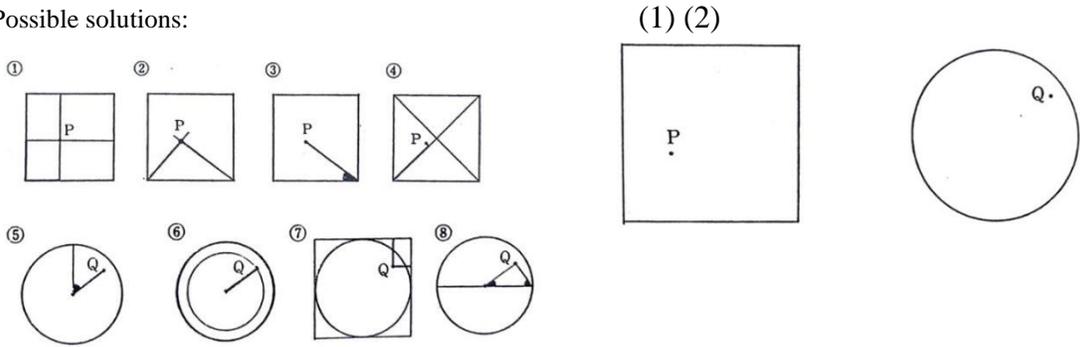
Figure 12: How can we introduce axis?

For the Introduction of Axis

From Odaka et al. (1970):

There are a square (1) and a circle (2), its side is 6cm and its radius is 6 cm, respectively. Let's consider the ways to explain the positions of P in the square and Q in the circle.

Possible solutions:



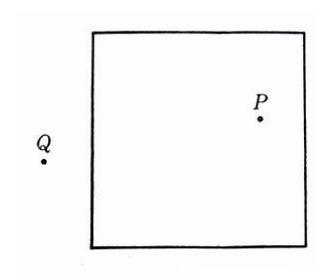
Objective:

To produce necessary and sufficient conditions to set the positions of the points by using given lines and point on the plane and naming A, B, AB and so on.

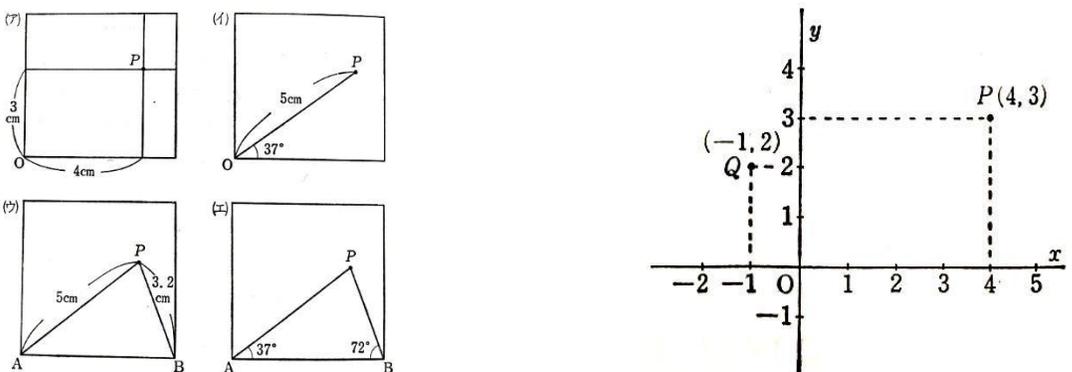
From Odaka et al. (1982):

There is a 6 cm-side square. P is inside and Q is outside of it.

- 1) Let's consider the ways how to explain the position of P.
- 2) Let's consider the ways how to explain the position of Q.



Possible solutions for 1): Final conclusion after 2)



Objective (Schema): The position is represented by the axis.

Source: Odaka et al (1970) and Odaka et al (1982)

On Figure 12, Odaka's group tried to realize the idea of Figure 8 of the integration of geometry and algebra, based on their LS. The task sequences of Odaka 1970 and 1982 are not the same either the objective is not the same. Odaka 1970 only asked the positions of points inside of figure. Their discussion focused more on given conditions such as lines (sides) on (1) and point (center) on (2). After several LS, they revised the task sequence for the introduction of Axes, like Odaka 1982. Firstly, students think various possible ways to represent an inside point P. Secondly, they apply their ideas to Q and finally they conclude that extending the segments to the lines are the most simple and sufficient way: It is Cartesian Axis. At the same time, students could discuss further ideas for unknown System of Axis such as for complex plane.

This interesting Task of 1982 in Figure 12 was also embedded into the student's textbook under National Standards. However, the sales were not good because from the perspective to learn the algebraic operation of functions, teachers would prefer to teach function right after Algebra, and not after learning both Algebra and Geometry. For new generation of teachers, the order Algebra, Function and Geometry is felt better to enrich students' algebraic skills and they did not know the historical discussion of the integration of subjects on Figure 8.

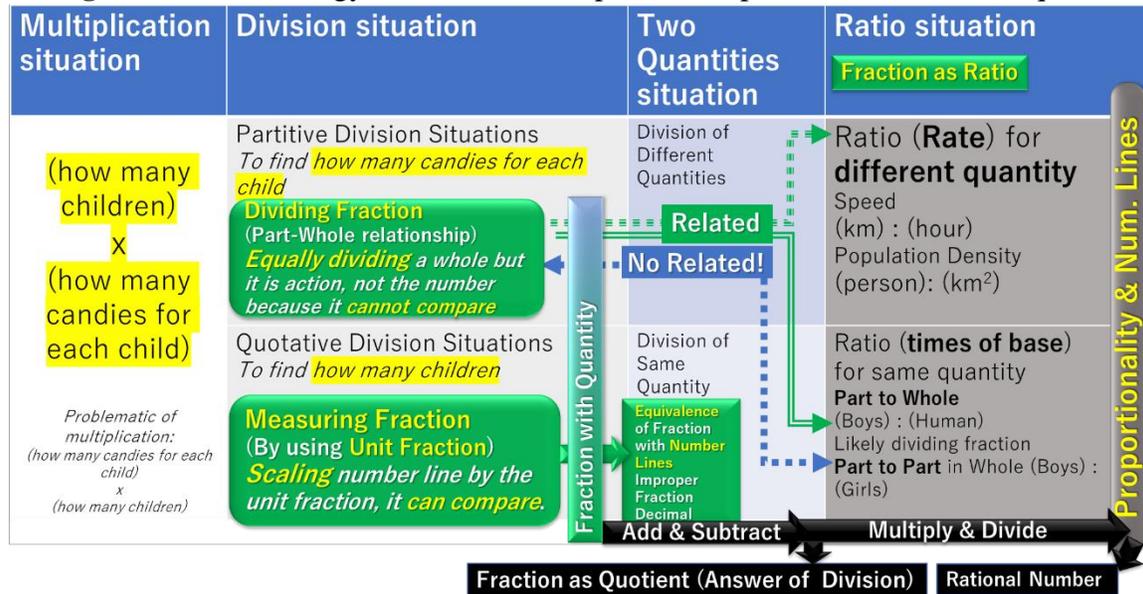
5.2. Terminology for Explaining Curriculum and Task Sequence

Japanese LS produced necessary Terminology which distinguishes conceptual differences and its sequential development in curriculum. It is part of the theory for mathematics education at primary school with LS. It includes the technical terms to distinguish conceptual differences such as different meaning of multiplication and the representations such as Tape Diagram and Proportional Number Lines for overcoming such differences. It is necessary to explain the process of reorganization of concepts in the curriculum sequence. The Japanese established most of it between 1900 and the 1960s, as stated in the special issues of the Journal of Mathematics Education published by the Japan Society of Mathematical Education, in 2010.

Through school-based LS, Japanese teachers learn it to explain why they planned such a task and questions for developing students who learn mathematics by and for themselves. Even when National Standards indicate the content what they should teach, it does not explain well why they have to teach it in his/her order of task-sequence. For developing and promoting students thinking, teacher must use what students already learned.

Figure 13 is a Terminology in the case of Fraction. If you identify any unknown words, it is a terminology which was established for LS (Isoda, 2021). Terminology makes possible to distinguish conceptual differences and its sequence. Odaka’s Schema theory has also oriented such terminology.

Figure 13. Terminology for Fraction to explain conceptual difference and sequence.



Source: (Isoda, 2021)

Isoda, M.: Fraction for Teachers: CRICED, University of Tsukuba revised.

https://www.criced.tsukuba.ac.jp/en/pdf/Fraction_for_Teachers_full_version.pdf

The principle of the Japanese curriculum standards “extension and integration” is oriented toward enhancing mathematical activities and developing mathematical thinking. It corresponds to the principle of reinvention by Freudenthal (1973) who proposed the mathematization as the reorganization of mathematical experience (Isoda, 2018).

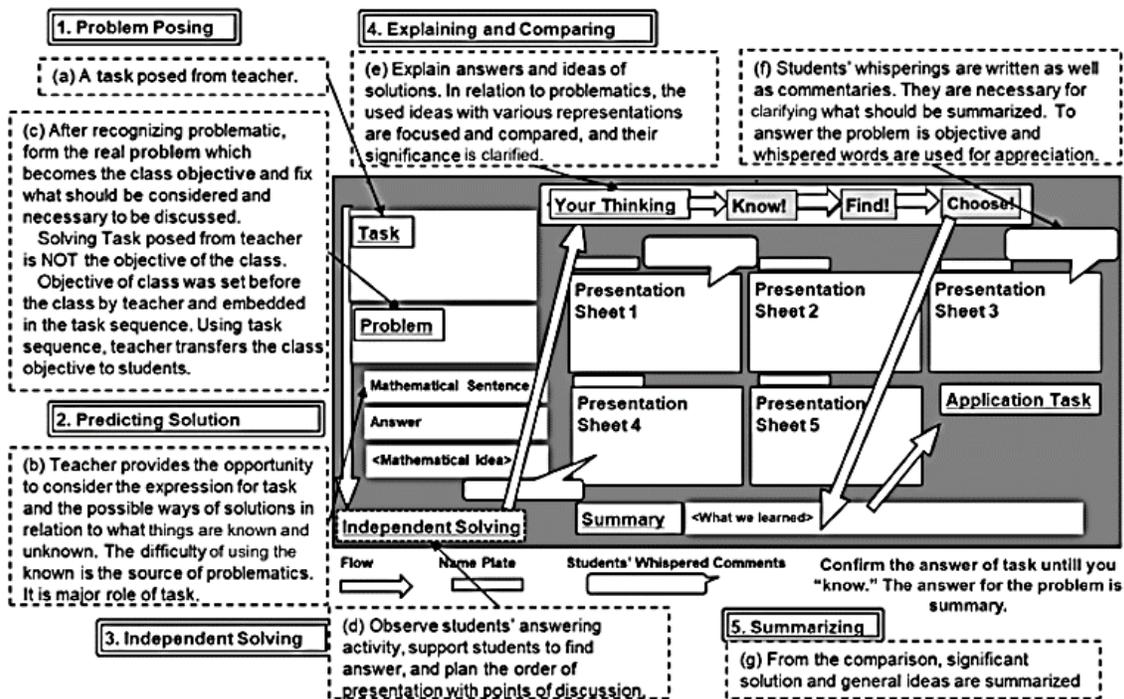
Under this principle, the school mathematics curriculum can be seen as a set of partially ordered local mathematics theories, like a net that is consistent within every local theory like a knot. However, on extending and integrating local theories, the net has some inconsistencies in connecting the local theories, like entangled strings among knots of Figure 10. Besides such inconsistencies, Mathematical thinking framework by Katagiri enhanced what way of thinking, attitude and values should be necessary to be consistently developed beyond the contradictions. This means that the mathematical thinking framework functions as the Mathematical Literacy Framework.

6. Teaching through Problem Solving: Curriculum implementation

Japanese Problem-Solving Approach (PSA) is known as teaching mathematics through problem-solving. Open Approach by Nohda, N (2000) and Open-Ended Approach by Becker and Shimada (1997, in Japanese 1977) are also known as a part of PSA. Those approaches are product of LS by teachers who have tried to teach mathematics through mathematical arguments such as dialectic by students, through generations. Indeed, Shimada is one of contributors for Figure 8, before WWII. It is the product of LS before WWII with the efforts of the schools, that the current practice of PSA at each school-based LS can be seen everywhere in Japan, since 1980s. Narrow meaning of PSA is distinguished with Open Approach because PSA is exactly planned to reorganize mathematics by using what students already learned before, under the curriculum and through a task sequence.

PSA distinguished Task, which is given by teacher, from the Problematic, which is recognized by students as unknown. Problematic, in other words, constitutes difficulty and challenges for students, and it is planned by the class-teacher based on the content unit and yearly plan through the task sequence, so that overcoming problematic itself is an objective of the planned lesson. Figure 14 is a sample board that utilizes the format of PSA.

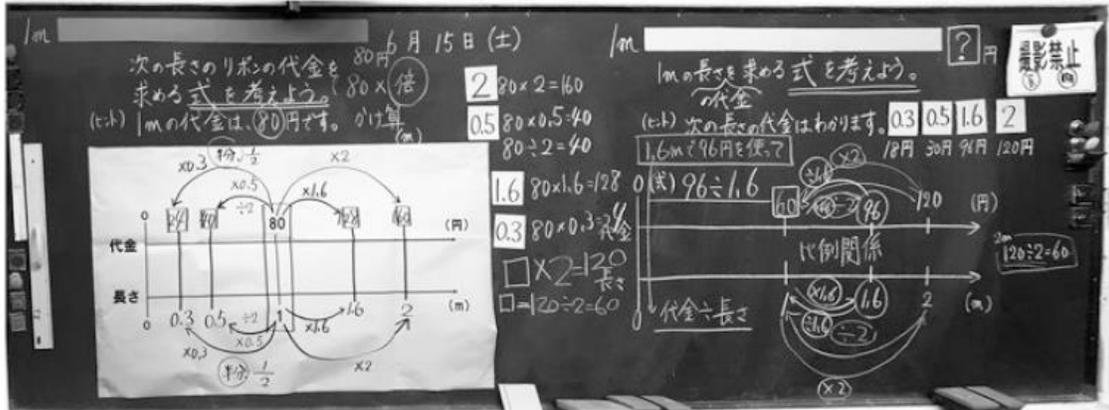
Figure 14. A board registering the lesson plan: teacher never erases the board for reflection.



Source: (Isoda & Katagiri, 2012, p. 16; 2016 Spanish Edition)

Figure 15 corresponds to the case of proportionality by Seiyama, that uses two meanings of the division. Seiyama is well known teacher through the JICA -LS video on YouTube which has various language subtitles.

Figure 15. LS utilizing Proportional Number Lines since 1960s. (Seiyama open-class-2019).



Source: (Isoda & Olfos, 2021, p. 95)

7. Final Consideration: Next Steps as International Challenges

Japanese PSA is known internationally as a model approach to LS. However, for many countries it is not easy to demonstrate such a lesson, even if it is possible to implement Open Approach for LS. Open Approach lessons demonstrate collaborative learning, so it is good to develop learning community. However, it is rare to see the argumentations/dialectic amongst students which is the real authentic mathematical activity. Major difference is that Open Approach focus on solving a given task itself, even if people call it a problem situation. On PSA, students are urged to solve problematic situation for them, and on the way of solving it as objective they become able to engage in mathematical arguments. Even in the case a task is given, a problematic with the search for unknown should be posed by students.

For challenging PSA, we need correct and adequate *Terminology*, *Task Sequence*, and the *Necessity to solve the task* based on what students already learned. And as choosing a preferred PSA, teacher must explain clearly his/her objective of why he/she chose it. On this demand, Isoda developed the curriculum framework for Southeast Asia, the teacher training books for problem solving, and has adapted textbooks in Thailand, Indonesia (National) and Chile (National) with collaborations of leading researchers and ministries, he and engages in LS.

Especially under Asian Pacific Economic Cooperation (APEC) LS Network and Southeast Asia Ministers of Education Organization (SEAMEO) School Network, the Center for Research on International Cooperation in Educational Development (CRICED), University of Tsukuba, Japan has recently opened online courses for teacher education on YouTube which already registered more than 10,000 users from 38 countries (<http://criced.tsukuba.ac.jp/en>) Establishment of LS community in Brazil using these tools is a big dream which will be realized through the collaborations.

References

- BARTOLINI BUSSI, M.G.B.; TAIMINA, D.; ISODA, M. (2010). Concrete models and dynamic instruments as early technology tools in classrooms at the dawn of ICMI: from Felix Klein to present applications in mathematics classrooms in different parts of the world. **ZDM Mathematics Education**, 42, 19-31.
- BECKER, J., & SHIMADA, S. (1997). **Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics** (7th ed). National Council of Teachers of Mathematics. Reston.
- CHOKSHI, S., & FERNANDEZ, C. (2004). Challenges to importing Japanese lesson study: Concerns, misconceptions and nuances. **Phi Delta Kappan**, 85, 520-525.
- FERNANDEZ., & YOSHIDA, M. (2004). **Lesson Study: a Japanese approach to improving Mathematics teaching and learning**. Lawrence Erlbaum Associates.
- FREUDENTHAL, H. (1973). **Mathematics as an Educational Task**. D. Reidel Publishing Company.
- HIEBERT, J. (Ed.). (1986). **Conceptual and procedural knowledge: the case of Mathematics**. Lawrence Erlbaum Associates.
- ISODA, M. (1996). **Problem solving approach beyond cognitive conflicts based on conceptual and procedural knowledge at primary school**. Tokyo, Japan: Meijitoshō. (Written in Japanese).
- ISODA, M. (2009). Theory of conceptual and procedural knowledge into Japanese problem-solving approach. In C. Litwin, edited. (Ed.). **Proceedings of the Conference on Mathematics Teaching and Assessment**. Hong Kong, China: Hong Kong Institute of Education.
- ISODA, M. (2012). Introductory chapter: Problem solving approach to develop mathematical thinking. In M. Isoda, & S. Katagiri (Eds.). **Mathematical thinking: How to develop it in the classroom** (pp. 1-28). World Scientific.

- ISODA, M. (2015). The Science of Lesson Study in the Problem-Solving Approach: In INPRASITHA, M.; ISODA, M.; WANG-IVERSON, P.; YAP, B. (Eds.). **Lesson study: Challenges of mathematics education** (pp. 81-108). World Scientific.
- ISODA, M. (2018). Mathematization: A theory for curriculum design. In Kawazoe, M. (Ed). **Proceedings of the International Workshop on Mathematics Education for Non-Mathematics Students Developing Advanced Mathematical Literacy** (pp. 27-34). http://iwme.jp/pdf/Proceedings_IWME2018.pdf
- ISODA, M. (2020). Producing theories for mathematics education through collaboration: A historical development of Japanese lesson study. In H, Borko, D. Potari (Eds.). **Proceedings of 25 ICMI Studies: Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups** (pp. 15-22). University of Lisbon.
- ISODA, M. . (2016). Dialectic on the problem-solving approach: Illustrating hermeneutics as the ground theory for lesson study in mathematics education. In CHO, S. J. (Ed.). **Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education** (pp. 355-381). Springer.
- ISODA, M. . (2019). The Road of the German Book *Praktische Analysis* into Japanese Secondary School Mathematics Textbooks (1943-1944): An Influence of the Felix Klein Movement on Asia. In WEIGAND, H.; MCCALLUM, W.; MENGHINI, M.; NEUBRAND, M.; SCHUBRING, G. (Eds.). **The Legacy of Felix Klein**. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-99386-7>
- ISODA, M. (1992). **Designing problem solving approach with cognitive conflict and appreciation**. Hokkaido University of Education (written in Japanese).
- ISODA, M., & KATAGIRI, S. (Eds). (2016). **Pensamiento matemático: Cómo desarrollarlo en la sala de clases** (2ª. ed.). CIAE (Centro de Investigación Avanzada en Educación): Universidad de Chile.
- ISODA, M., & KATAGIRI, S. (Eds.). (2012). **Mathematical Thinking: How to Develop it in the Classroom**. Monographs on Lesson Study for Teaching Mathematics and Sciences-Vol 1. World Scientific.
- ISODA, M., & OLFOS, R. (2009). **El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases** (Problem solving approach: Mathematics teaching on lesson study). Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- ISODA, M., & OLFOS, R. (2021). **Teaching Multiplication with Lesson Study**. Springer.
- ISODA, M.; STEPHENS, M.; OHARA, Y., & MIYAKAWA, T. (Eds.) (2007). **Japanese Lesson Study in Mathematics: Its Impact, Diversity and Potential for Educational Improvement**. World Scientific.
- ITO, T. (1968). **Modernization of teaching problem solving**. Meijitoshō. (Written in Japanese). (1971 English version).

- ITO, T. (1971). The theory and methods on discovery teaching. **Journal of Saitama University, Science of Education**, 20, 75-88.
- KATAGIRI, S., SAKURAI, T., TAKAHASI, E., & OSHIMA, T. (1971). **Mathematical thinking and its teaching at primary school**. Tokyo, Japan: Kindasishinsyo.
- KATAGIRI, S.; SAKURAI, T., & TAKAHASI, E. (1969). Mathematical thinking and its teaching. **Journal of the Research Institute of Education for Capital Tokyo**, 1, 83-155.
- KOBAYASHI, M. (1989). **New ideas of teaching mathematics in Japan**. Tokyo, Japan: Chyuo Daigaku Publisher.
- MANGAO, D. D.; AHMAD, N. J., & ISODA, M. (2017). **SEAMEO Basic Education Standards (SEA-BES): Common Core Regional Learning Standards (CCRLS) in Mathematics and Science**. SEAMEO RECSAM. http://www.recsam.edu.my/sub_SEA-BES/images/docs/CCRLSReport.pdf.
- MINISTRY OF EDUCATION. (1947). **Course of study for school mathematics (recommendation)**. Ministry of Education.
- MINISTRY OF EDUCATION. (1956). **Course of study for high school mathematics**. Ministry of Education.
- NOHDA, N. (2000). Teaching by open-approach method in Japanese mathematics classroom. In T. Nakahara, & M. Koyama (Eds.). **Proceeding of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 24)** (pp. 39-54). Hiroshima University.
- ODAKA, T. (1969, 1975, 1979, 1980). **School Mathematics Study Society at the Junior Secondary School of the Tokyo University of Education: Experimental study of new mathematics – Planning**. Kindaishinsho.
- ODAKA, T., & OKAMOTO, K. (1982). **Task sequence for junior secondary school mathematics lessons: Exemplar approach based on schema theory**. Tokyokan.
- POLYA, G. (1945). **How to solve it**. Princeton University Press.
- SHIMIZU, S. (1984). Designing mathematics education for students who learn mathematics by and for themselves. **Epsilon: Mathematics Education Journal of the Aichi University of Education**, 26, 92-114.
- SMITH, A., & MIKAMI Y. (1914). **A history of Japanese mathematics**. Chicago: Open Court Pub. Co.
- STIGLER, J. W., & HIEBERT, J. (1999). **The Teaching Gap: best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom**. The Free Press.

WAKABAYASHI, T., & SHIRAI, T. (1883). **Revision of Teaching (written in Japanese)**. Fukusha.

WATANABE, T. (2018). Japanese Lesson Study in the United States: Looking back and looking ahead. **Educational Designer**, 3(11). <http://www.educationaldesigner.org/ed/volume3/issue11/article43>.

Authors

Masami Isoda

Bachelors in mathematics. University of Tsukuba
Master in education. University of Tsukuba
Ph.D. in Education: Waseda University
University of Tsukuba
CRICED, Lesson Study
isodamasami@yahoo.co.jp
<https://orcid.org/0000-0002-0017-3935>

Yuriko Yamamoto Baldin

Bacharelado e Licenciatura em Matemática pelo IMECC-UNICAMP
Mestre em Matemática pelo IMECC-UNICAMP
Doutor em Matemática pelo IMECC-UNICAMP
Departamento de Matemática/CCET/UFSCar
GIPEM- Formação de Professores, Lesson Study, Materiais didáticos/Tecnologia/Ensino
yuriko@ufscar.br
<https://orcid.org/0000-0001-7473-5657>

How to cite this article:

ISODA, M., & BALDIN. Y. Y. Japanese Lesson Study, its Nature and its Impact on the Teaching and Learning Mathematics. **Revista Paradigma**, Vol. XLIV, Edición Temática Estudio de Clases: Contribuciones de la educación japonesa en diferentes países, mayo de 2023 / 5 – 35. DOI: [10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p5-35.id1410](https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p5-35.id1410)

The Development of Lesson Study in Malaysia: Issues and Challenges, and Its Contribution Towards Mathematics Education

Ui Hock Cheah

uhcheah@recsam.edu.my

<https://orcid.org/0009-0001-0670-7002>

*Southeast Asia Ministers of Education Organisation,
Regional Centre for Education in Science and Mathematics (SEAMEO RECSAM)
Penang, Malaysia*

Received: 07/04/2023 **Accepted:** 30/04/2023

Abstract

This article examines the development of Lesson Study in Malaysia. Lesson Study was introduced in Malaysia as small-scale research studies beginning in 2004. This was followed the country's participation at the APEC HRDWG Lesson Study Project as part of international cooperation. By 2011, Lesson Study had been upscaled, reconceptualized and included in the nationwide Professional Learning Community Project. While generally, feedback from these events show the great potential of continuing Lesson Study as a professional development approach, there was also a lack of confidence among the teachers to implement Lesson Study on their own. This study discusses the implications of these events from the perspective of the needs of the mathematics education professional community. Suggestions to revitalize and sustain Lesson Study in Malaysia are included in the discourse.

Keywords: Lesson Study. Teacher Professional Development. Educational Borrowing. Professional Community

El Desarrollo del Estudio de Lecciones en Malasia: Problemas y Desafíos y su Contribución a la Educación Matemática

Resumen

Este artículo examina el desarrollo del Lesson Study en Malasia. El Lesson Study se introdujo en Malasia como estudios de investigación a pequeña escala a partir de 2004. Esto siguió a la participación del país en el Proyecto de Lesson Study del APEC HRDWG como parte de cooperación internacional. En 2011, el Lesson Study fue mejorado, reconceptualizado e incluido en el Professional Learning Community Project nacional (en español, Proyecto Comunitario de Aprendizaje Profesional nacional). Si bien los comentarios generales de estos eventos muestran el gran potencial del Lesson Study en curso como un enfoque de desarrollo profesional, también hubo una falta de confianza entre los maestros para implementar el Lesson Study por su cuenta. Este artículo discute las implicaciones de estos eventos desde el punto de vista de las necesidades de la comunidad profesional de educación matemática. El texto incluye sugerencias para revitalizar y sostener el Lesson Study en Malasia.

Palabras clave: Lesson Study. Desarrollo Profesional de los Docentes. Préstamo Educativo. Comunidad profesional.

O Desenvolvimento do Lesson Study na Malásia: Questões e Desafios e sua Contribuição para a Educação Matemática

Este trabalho examina o desenvolvimento do Lesson Study na Malásia. O Lesson Study foi introduzido na Malásia como estudos de pesquisa em pequena escala a partir de 2004. Isso ocorreu após a participação do país no Projeto de Lesson Study da APEC HRDWG como parte da cooperação internacional. Em 2011, o Lesson Study foi aprimorado, reconceituado e incluído no Professional Learning Community Project nacional (em português, Projeto Comunitário de Aprendizagem Profissional). Embora, em geral, o *feedback* desses eventos mostre o grande potencial do Lesson Study contínuo como uma abordagem de desenvolvimento profissional, também havia falta de confiança entre os professores para implementar o Lesson Study por conta própria. Este artigo discute as implicações desses eventos sob o ponto de vista das necessidades da comunidade profissional de educação matemática. O texto inclui sugestões para revitalizar e manter o Lesson Study na Malásia.

Palavras-chave: Lesson Study. Desenvolvimento Profissional de Professores. Empréstimo Educacional. Comunidade Profissional.

1. Introduction

The interest of educators towards the professional development of teachers is not new as it has been commonly acknowledged that teachers' knowledge is one of the attributes to the effectiveness of education. This article focuses on one current approach, Lesson Study, which is widely used in professional development of mathematics teachers. Just as the Sakura flower is synonymous with Japan, Lesson Study too is synonymous to Japan. Lesson Study has been practiced in Japan for over 100 years, yet it was largely unknown outside of Japan. Interests in the Japanese practice of Lesson Study surfaced when comparative studies on mathematics achievements were carried out in the 1990s. Results that emerged from these studies highlighted the high mathematics achievement shown by the Japanese students (Stigler *et al.*, 1999; Stigler & Hiebert, 2004). Compared with the other countries mentioned in the study, the Japanese teachers placed more emphasis on posing problems that encouraged students to make mathematical connections rather than just using procedures. When the Japanese teachers were asked how they learnt to teach in such a manner, they attributed it to the practice of Lesson Study (Stigler & Hiebert, 1999). Through the seminal work highlighted in the *Teaching Gap*

(Stigler & Hiebert, 1999), Lesson Study soon became a trend in the professional development of mathematics teachers.

Like many developing countries, Malaysia too endeavored to raise the level of mathematics achievement of its students, as mathematics had become an essential subject for citizens to acquire and master in order for the country to progress and develop. Learning from others too, had by the turn of the century, become imperative in the era of globalization. Goods, services, people and knowledge had become much more easily transported across borders. However, there are many challenges that every country would face when borrowing and implementing new educational policies and ideas that has been proven successful in other countries. While many educational ideas such as Lesson Study, may seem universal, adopting these ideas across borders would mean implementing those very same ideas in different contexts. In order to implement new ideas like Lesson Study, there is a need to adopt and adapt these ideas so that they fit into the local context. Many issues arise when new ideas are borrowed and implemented in a new context. There is a need to consider the local culture and the teachers' beliefs and readiness to implement a new idea.

The purpose of this article is to reflect on the development of Lesson Study in Malaysia and to look at the lessons learnt in the process of its development. To provide a better understand of the context, this article begins by discussing the education system in Malaysia with special reference to the development of mathematics curriculum and consequently professional teacher development.

2. The Education System in Malaysia

2.1 Structure of Education in Malaysia

Malaysia occupies a central location in Southeast Asia, along the sea route from India to the Far East. It has a population of 32 million. It gained its independence in 1957, and being a former colony of the United Kingdom (UK), much of its government and educational structure is based on that of the UK. The structure of its educational system adopts a centralized posture where the Ministry of Education plays a central role in drafting its policies. Educational policies are made at the Ministry of Education, which includes various administrative divisions such as the School Management Division, the Curriculum Development Division, the Teacher Education Division, and the Examination Syndicates. Policies from the Ministry are then

disseminated to the State Education Departments which oversee the running of the schools in the 13 states and one Federal territory in the country. In each state, the State Education Department further administers its functions through the various District Education Offices in the state to be implemented. Other educational institutions, like the public universities, while other the ambit of the ministry, enjoys administrative autonomy in running its own programs.

2.2 Development of Professional Mathematics Teacher Development in Malaysia

In the early years of independence, much of the mathematics curriculum were borrowed and based on the British curriculum (Asiah Abu Samah, 1982). For example, the early mathematics curriculum in Malaysia in the 1960s was much influenced by the emergence of the global *New Mathematics* reforms (Karp, 2013). Obviously, as a new emerging nation having strong links with the UK, the *New Mathematics* curriculum in Malaysia was borrowed and based on projects that were developed in the UK, namely the *Scottish Mathematics Group (SMG)* and the *School Mathematics Project (SMP)* (Ghani, 1988). Aside from the international influence of the SMG and SMP, the mathematics curriculum was also much affected by local policies which were drafted in the process of national building. The *Razak Report* (Ministry of Education, 1956) and the *Rahman Talib Report* (1960) which were incorporated in Education Act of 1961, paved the way for the nationalization of educational policies. In the effort towards unifying the multiracial groups, the use of the national language in the mathematics and science curriculum was adopted. This would require teachers to move away from using the English language to the use to the national language to teach mathematics. These teething issues form the main focus of teacher development in the early years (Lee, 1982). In short, the teachers had to learn to adapt to the *New Mathematics* content as well as to use the national language as the medium of instruction at the same time.

The implementation of *New Mathematics* in the curriculum was not without criticisms. As a result of public dissatisfaction, the Cabinet Committee Report (Mahathir, 1979) voiced concern over the inability of school children to acquire the 3R's, namely reading, writing and arithmetic. This would soon lead to the next major reform of the mathematics curriculum in the 1980s which was implemented in two phases; the *Kurikulum Baru Sekolah Rendah* (New Primary School Curriculum), followed by the *Kurikulum Bersepadu Sekolah Menengah* (Integrated Secondary School Curriculum). There were several distinguishable characteristics in the reform:

1. The reform was implemented during a period of global concern that children following school programs, especially in science and mathematics, were not able to master the basic skills (Cockroft, 1982; United States National Commission on Excellence in Education, 1983).
2. Much of this concern came from the public. The Cabinet Committee was essentially a ministerial committee set up to look into the effectiveness of educational policies.
3. The revised mathematics curricula saw a greater emphasis placed on problem solving.
4. Teachers were encouraged to use remediation and enrichment through work groups.

Thus, the immediate needs of professional teacher development in the first few decades after independence can be gleaned from the historical development of the country as well as the development of the national curriculum. The main objectives of professional teacher development in the early years were thus to address the issues of the adequate supply of qualified teachers for the workforce, and to provide the teachers with curricular support programs. The supply of trained teachers was carried out through teacher preparation programs in the teacher's colleges for primary school teachers and in the universities for secondary school teachers. Not surprisingly, the use of the cascade approach was adopted to disseminate curricular changes for inservice teachers. In the cascade model, the first level of training focuses on the national-level master trainers who would conduct training for key teachers at the state or district levels who in turn would train other teachers at the school level. In this approach there is the expectancy of a cascading effect of knowledge from the Curriculum Development Division at the top of the cascade down to the teachers in schools. This approach is deemed most efficient and cost effective as it is able to train the largest number of teachers within a short period of time. However, there are two main disadvantages. First, in the cascade model of teacher professional development the amount of information and knowledge that is passed on to the teachers also diminishes by the time the training reaches the school teachers. Knowledge that is intended for transmission often ends up as a trickle by the time the training reaches the teachers. Thus, the teachers, even though they have been trained, may not have effectively internalized the new knowledge to effectively carry out the new changes in the curriculum. Second, the school teachers do not have ownership of the curricular change. The cascade model is a top-down model of training where teachers have to grapple with the ideas that were conceptualized somewhere else and then implement them in the classroom. Incorporating the teachers' own innovations and ideas would be a challenge. Consequently, often the curricular change could

not be implemented effectively, leading to the resulting gap between the intended and the implemented curriculum.

2.3 Teacher Empowerment and Action Research in Malaysia

In line with global trends in the 1990s that began to emphasize teacher empowerment, *Action Research* was first introduced in Malaysia as part of the Program for Innovation, Excellence and Research (PIER) in 1993 (Lee, 1999). The main thrust for PIER was to improve four main educational areas: Innovations in science and mathematics, small and isolated schools, distance education and educational research. The action research model that was widely adopted consists of a spiral repetition of four stages: (1) developing a plan for improvement, (2) implementing the plan, (3) observing and documenting the effects of the plan, and (4) reflecting on the effects of the plan for further planning and informed action (Kemmis & McTaggart, 1988). It has been reported that action research continues to be one of the thrusts of the Ministry of Education (MOE) with the setting up of research committees at the State Education Department and action research groups at the state level (Kim, 2005; National Institute for Educational Policy Research, 2006). At present Annual research seminars were also organized for teachers to showcase and to share the action research projects (Educational Planning and Research Division, 2007). To further improve the action research program in school the MOE suggested 1) Increasing the financial allocation for this program, 2) Introduce the management of change training for school administrators, 3) Improve monitoring mechanism, and 4) Developing training modules such as standardized training procedures and processes so that teachers who have not been given the opportunity to attend courses can use these materials for their project (National Institute for Educational Policy Research, 2006). The introduction of the ideas for teacher empowerment in the context of professional teacher development thus provides the setting for the introduction of lesson study in Malaysia.

3. Development of Lesson Study in Malaysia

By the turn of the century, the results the Trends in International Mathematics and Science Studies (TIMSS) were already widely known among teacher educators in Malaysia. Lesson Study was to a large extent less widely known at that time. However, Lesson Study was soon to arrive at the shores of Malaysia, and this section intends to trace its development in Malaysia.

The first reported use of Lesson Study was in a small-scale research in 2004 (Lim, White & Chiew, 2005; Lim & Chiew, 2015). The purpose of the research was to explore the plausibility of using Lesson Study as an alternative teacher professional development approach to prepare student-centered activities that constituted good practice in mathematics lessons. Eight teachers in each of the two secondary schools participated. Two Lesson Study cycles were completed in one school while the other managed three Lesson Study cycles. At the end of the project, the participating teachers gave positive feedback, acknowledging that the Lesson Study approach helped promote collegial bonding among the teachers, enhanced their mathematical content knowledge as well as helping the teachers to produce better student-centered classroom activities. The positive responses from the teachers encouraged further small-scale researches that involved the collaboration between the university and the schools. An additional two schools, one primary and one secondary joined the project the following year. The encouraging response from the participating teachers and the school administrators were described as the main reasons of optimism for the continued development of Lesson Study in its initial years.

However, these initial studies also indicated that there were impediments to its implementation in Malaysian classrooms. White and Lim (2008) found certain factors that can both impede and facilitate the implementation of Lesson Study. These were 1) administrator support, 2) teacher commitment, 3) time constraints, and 4) perceptions about teaching. These constraints were consistent with the impediments to professional development programs reported elsewhere. Clarke (1994) reported several impediments to professional staff development programs. These included sustained central office support, lack of time for individual reading and reflection, commitment and ownership of proposed changes, and teachers' perception that the changes ought to be more practical.

3.1 Piloting the APEC-Tsukuba University Lesson Study Project at the Local Level

The next significant move forward in the development of Lesson Study in Malaysia was the launch of the APEC HRDWG (Asia Pacific Economic Cooperation Human Resource Development Working Group) Lesson Study Project. The APEC HRDWG adopted the Lesson Study Project for five years beginning in 2006. The Project is still ongoing with other sources of funds. The following were the areas of focus of the project from 2006 – 2010.

2006 Innovative Teaching Mathematics through Lesson Study

2007 Lesson Study focusing on Mathematical Thinking

2008 Focusing on Mathematical Communication

2009 Connection between Assessment and Subject Matter

2010 Focusing on Mathematics Textbooks, e-Textbooks and Educational Tools

The APEC HRDWG Lesson Study Project is an international cooperation project that plans to involve the member countries of APEC. The Project uses an innovative and pragmatic management approach by organizing two conferences yearly. The first yearly conference is held in the month of February in Japan and focuses on providing the invited specialists from the various APEC economies with information and knowledge that covers the area of focus for that particular year. Equipped with the knowledge the specialists from the first conference, they would return to their home countries and work on the project. Their work is then reported at the second conference, normally held in the month of September in Khon Kaen, Thailand. The project is overseen by the University of Tsukuba, Japan and Khon Kaen University, Thailand. More information and details on the APEC HRDWG Lesson Study Project is available at the Project website (<https://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/>).

The platform provided by the APEC HRDWG Lesson Study Project thus affords a greater level of cooperation offering the advantage of knowledge shared internationally. These new inputs provide new insights not only on Lesson Study but also on new ideas and standards in mathematics didactics. The participants of the project were also able to witness actual lessons in Japanese classrooms and also how Lesson Study is carried out in Japan. These new insights provide another dimension of the plausible ways teaching and learning mathematics that can be improved in the local classrooms in Malaysia.

The immediate effect of the APEC HRDWG Lesson Study Project was the initiation of a pilot project involving two local institutions, the Regional Centre for Education in Science and Mathematics (SEAMEO RECSAM) and Universiti Sains Malaysia (USM) (Cheah, 2012). Both SEAMEO RECSAM and USM had been participating the APEC HRDWG Lesson Study Project since its launch in 2006.

Six primary schools participated in the project. For each of the participating schools, three teachers together with the school administrators formed a Lesson Study group. The reason for an active involvement of the administrators was to allow them to understand how Lesson Study is carried out, so that they may continue implementing Lesson Study in their schools after

the project is completed. Each Lesson Study group also included researchers from external institutions.

The project was carried out in two phases. In the first phase, five two-hour workshops were conducted for all the participants from the six schools. Three workshops were conducted to introduce the participating teachers to the main ideas of the project, namely, Lesson Study, mathematical thinking, and communication. This was followed by two workshops on lesson planning where the participants broke up into the Lesson Study groups according to their schools. The second phase consisted of the research lessons and the post lesson discussions which were conducted in the respective schools. A final workshop session was then conducted where all the participants of the six schools came together to analyze and share the lessons they had conducted. To evaluate the responses of the participants, feedback was obtained through open-ended questionnaires which were administered at the end of each workshop. The responses from the teachers to the questionnaires were then tabulated and analyzed for emergent themes. The findings showed that:

1. The teachers perceive that mathematical thinking and communications promotes deeper student thinking, collaborative learning, student-centered lessons and further increase students' creativity.
2. After going through the Lesson Study cycle and the research lesson, the teachers commented that they have learnt about the application of mathematical thinking, various mathematics teaching activities, teaching techniques and the usefulness of Lesson Study. The conduct of Lesson Study seems to have reinforced their views about mathematical thinking, communications and Lesson Study.
3. Time constraint remains the most often quoted challenge in doing Lesson Study.
4. The teachers found that planning and carrying out relevant activities posed as major challenges for them.
5. The two main views of the teachers about the challenges were corroborated by the views they espoused concerning the types of support that the teachers need. The teachers wished for more input on mathematical thinking and communication, support from teachers and administration as well as more time.

The school administrators who participated in the project gave positive views about Lesson Study. They mentioned that Lesson Study could be used to assist especially by novice teachers to acculturate into the school system. They, however, voiced reservations related to the introduction of new innovative ideas which includes Lesson Study:

- The school curriculum was overloaded and packed, and thus finding the extra space within the present curriculum to accommodate in Lesson Study would be a challenging task.
- The other main constraints were monitoring the implementation and providing guidance to the teachers, and changing the teachers' mindset.

4. Lesson Study in the Government Transformation Program

In 2011, Lesson Study was incorporated as one of the programs in the Government Transformation Program (GTP). This provided the platform to scale up Lesson Study nationwide. Whereas, the initial of the introduction of Lesson Study in Malaysia was mainly confined to small-scale research projects, the GTP provided the opportunity to disseminate and popularize Lesson Study nationwide.

The Government Transformation Program

The results from the Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) 2007 (Mullis *et al.*, 2008), showed that the results had dropped from the previous TIMSS in 2003. Around 20% of Malaysian students failed to meet minimum benchmarks for both Mathematics and Science, compared to only 5% in science and 7% in mathematics in 2003. In addition, the workforce remains relatively unskilled, with 7% educated only up to 11 years of basic education, and with only 28% of Malaysian jobs in the higher skilled bracket (PEMANDU, 2010). Thus, the Malaysian Government embarked on the GTP in 2010. This was the result of the realization that a quality education is a primary driving force to lift the quality of the nation's human capital. Enhancing education had now become not only a matter of basic human rights but an economic imperative.

Under the GTP, the performance of all public schools was assessed and ranked according to a composite score. The composite score comprised the grade point average based on the school's performance in public examinations and on the *Standards for Quality Education in Malaysia*, which measures the quality of teaching and learning, organizational management, educational program management and student accomplishment. Schools were then assessed and ranked into seven performance bands based on their final Composite Score, with Band 1 being the highest performance band and Band 7 being the lowest performance band. Head teachers and principals of schools ranked on the lowest two bands were provided support to help them plan strategically school improvement program that fit the unique needs of their schools.

In 2011, 799 schools ranked on the lowest two bands were given support under the School Improvement Program. The school heads were then provided training in school-based leadership coaching and experiential learning programs. Further, the *Professional Learning Community* (PLC) Program was initiated in these schools to help teachers improve instruction through school-based instructional coaching and to enhance teacher collaboration. During the initial planning of the PLC program there was a strong conviction that teachers could benefit from the Japanese lesson study approach and consequently this approach was chosen to be used to support teachers of low performing classes in Band 6 and Band 7 schools. Lesson Study was subsequently incorporated into the PLC program. There were several aspects that distinguished this program from the earlier Lesson Study initiatives:

1. Lesson Study was introduced as part of a larger PLC Program that includes other teacher professional development methodologies such as learning walks, peer coaching, and teacher sharing (Bahagian Pendidikan Guru, n.d.).
2. Lesson Study in the PLC Program is now applied to other school subjects such as English language, Malay language, history, and science, besides mathematics.
3. The PLC Program facilitators includes specialists from various disciplines, whereas in the earlier initiatives, only mathematics researchers and teachers were involved.

289 schools under the School Improvement Program participated in the Lesson Study project under the PLC initiative. Six PLC workshops were conducted nationwide in 2011, involving subject teachers teaching critical subjects such as English, Mathematics, Science, History and Malay Language in their schools. Each workshop was conducted over four days. During the workshops, participants were exposed to the Japanese Lesson Study model and were shown videos on the implementation of Lesson Study practices from Japanese classrooms. They then had the opportunity to acquire hands-on experience by practicing the Lesson Study cycles in small groups under the supervision of panel experts. The panel experts were formed from a selected group of master teachers and lecturers from teacher training colleges, specializing in the same subjects. Some of them had also been actively practicing Lesson Study either with their own students or through their involvement in Lesson Study research projects. The teachers teaching the same subject were grouped together and planned a lesson plan collaboratively. The lesson plan was carried out via micro teaching by a teacher from the group while others observed the teaching. In some of the workshops, live classroom teaching and observations were

organized. The participating teachers then discussed the lessons at the end of the teaching session.

Two types of workshops were conducted; one for school coordinators and the other for school principals, state and district education officers. The workshops for the school coordinators were conducted over four days. The principals and state and district education officers participated in a one-day workshop where they were briefed about the lesson study project and the potential benefits of its implementation. The school principals and district educational officers were also required to monitor and assist where possible in the implementation of the Lesson Study cycles in their schools and within their districts respectively.

The school coordinators who had attended the workshops were required to disseminate the aim of the Lesson Study project and share their knowledge about Lesson Study with other teachers in their school community and to work collaboratively with their subject committees and implement at least two cycles of Lesson Study. They were furthermore required to choose a “difficult topic to teach” to work on collaboratively with their colleagues. During the implementation of the Lesson Study project, the national Lesson Study steering committee with the assistance of the panel experts were active in providing on-site coaching and mentoring to schools that need further support in implementing the two cycles of Lesson Study.

The teachers’ experiences in implementing Lesson Study cycles as an alternative and innovative teaching strategy was investigated, by administering a survey questionnaire at the end of the Lesson Study project. The questionnaire items were scored using a five-point Likert-scale, with the score of 1 as highly disagree to 5 as highly agree. Table 1 shows the mean scores of the teachers’ responses (Cheah & Mustapha, 2012).

The results showed that the participating teachers felt that they had acquired new knowledge in the area of subject content and pedagogical content knowledge during the project. The teachers further felt they had increased confidence about teaching the topic and had increased ability to reflect on their teaching practice. The lowest scores among the survey items were items that described the teachers’ perception towards the implementation of Lesson Study. These items were related to whether the implementation of Lesson study was worthwhile, or enjoyable and being critiqued at the end of the Lesson Study cycle. This was an indication that

the participating teachers were hesitant and less confident about the implementing the Lesson Study approach in their own classrooms.

Table 1 - *Teachers’ Experiences in Implementing Lesson Study Cycles (N=491)*

No	Items	Mean
1.	Increased knowledge about the subject content	4.26
2.	Increased pedagogical content knowledge about the subject	4.25
3.	Increased confidence about teaching the topic	4.15
4.	Increased understanding about students’ learning needs	4.00
5.	Increase ability to reflect on and improve teaching practices	4.21
6.	Increase the collegiality among members of the subject committees	4.19
7.	Involvement in the implementation of the Lesson Study cycles was worthwhile	3.82
8.	Involvement in the implementation of Lesson Study cycles was an enjoyable experience	3.96
9.	Felt comfortable of being observed and “critiqued” and the end of the Lesson Study cycle	3.47
10.	Lesson Study resulted in improved students’ engagement with the learning activities	4.01
11.	Lesson Study resulted in improved students’ interaction in the classroom	3.99

In the years that followed, the PLC initiative was extended to more schools in the country; 107 schools in 2012, 300 schools in 2013, 393 schools in 2014, and 600 schools in 2015 (Lim, *et al.*, 2018). From 2011 to 2015, a total of 1,689 schools were introduced to Lesson Study. Initially the workshops were managed by the panel experts but as the number of schools were increased, the training and monitoring of the PLC program was assigned to District Education Offices in 2015. To cope with the long-term demand, the District Education Officers would now monitor the PLC program in the district. Each District Education Office would now monitor the implementation of Lesson Study of three schools in the district. Lim *et. al* (2018) raised the concern that the sustainability of the Lesson Study in the schools would be affected as the result of the District Officers’ lack of experience and expertise on the Lesson Study process.

4. Research Incorporating the Lesson Study Approach

Since the first reported research using Lesson Study in 2006, there have been many Lesson Study related researches. Briefly, these researches can be classified into three categories. The first category involves researches that looked into the characteristics of the Lesson Study approach and how it has promoted teacher empowerment (Cheah, 2012; Cheah & Mustapha, 2012; Chew & Lim, 2014; Chiew *et al.*, 2013; Kor *et al.*, 2019; Lim & Chiew, 2015; Lim *et al.*, 2005, 2016; Teh, 2013). The results from these studies point to the suitability and potential of using Lesson Study to empower teachers. The participating teachers also acknowledged that

they acquired much content and pedagogical content knowledge through sharing with peers. Improved collegiality was another aspect that the teachers observed when participating in the research.

The second area of study involved using Lesson Study to investigate into classroom practice and classroom culture (Kor *et al.*, 2019; White & Lim, 2008). The nature of Lesson Study in using collaborative groups makes it possible for peers and researchers to enter into the classroom without creating a sense of intrusion in the research site. This allows for the entry of the researchers into the research site as participatory researchers. Researches that are less intrusive tend to afford better trustworthiness.

The third category of educational investigation involves design research. Design research methodology involves designing tasks that begin with the end-users in mind in contrast to traditional approaches that only seeks the end-users feedback after the product is complete (Zawojewski *et al.*, 2008). In Lesson Study, the teachers who are the end users of learning tasks, participate in the process of designing and discussing about the tasks, right from the beginning of the Lesson Study cycle. In using Lesson Study as a design research method, the researchers join in together with the teachers to design the tasks, observe the lesson where the teacher used the task for teaching, and finally discussed collaboratively on ways to improve the task based on the reflections for the lesson (Cheah, 2013, 2018; Chew *et al.*, 2013; Kor & Lim, 2009; Lim & Chiew, 2015). Classroom tasks that were designed using the Lesson Study process afford a spirit of confidence in its users as they had been part of the collaborative team designing, testing and improving the task together. Further, the participating teachers gained much knowledge and experience in the process. The Lesson Study approach was in fact the methodology used in the production of the Japanese textbook activities. Miyakawa (2007) explained that in-depth Lesson Study cycles were used in the design of the content and activities of the textbooks. The activities that appear in the textbooks were the result of deep discussion on the content and the significance of the activities from the mathematics education perspective. These activities were then improved through Lesson Study cycles.

5. Discussion

This section draws upon the theories of *educational borrowing* (Phillips & Ochs, 2004) and the *anthropological theory of the didactic* (ATD) (Chevallard & Sensevy, 2014; Artigue *et al.*, 2019) to guide the discussion.

5.1 Stages of Development of Lesson Study in Malaysia

The idea of borrowing educational innovations and best practices from another country and applying it to the local context is common, especially in developing and emerging economies. In examining this phenomenon of borrowing educational ideas from other countries, Phillips and Ochs (2004) observed that there are four stages in the process: (i) Stage 1 – Cross-national attraction, (ii) Stage 2 – Decision making, (iii) Stage 3 – Implementation, and (iv) Stage 4 – Internalization and ingestion (Phillips & Ochs, 2003, 2004). In the case of Lesson Study in Malaysia, Stage 1 would refer to the stage when local researchers and educators became aware of Lesson Study as an approach that had been used successfully in Japan. This awareness was as the result of literature as well as collaboration with international researchers. Research about Lesson Study had been well recorded in comparative studies of TIMSS and the TIMSS video studies, and these literatures had been well disseminated through publications (Stigler & Hiebert, 1999, 2004; Stigler *et al.*, 1999). Because of globalization, the ease of sharing and communication had been made possible. It is also worth noting that often the dissemination does not come directly from the country of origin. The first available literature about Japanese Lesson Study and the Japanese educational practices came not directly from Japan but by way of the United States (Lewis, 1995; Stigler & Hiebert, 1999), and the initial collaborative small-scale study about Japanese Lesson Study in Malaysia involved researchers from Malaysia and Australia (White & Lim, 2008). This was to be Malaysia's first initial response to the global movement of Lesson Study. The participation of Malaysia in the APEC HRDWG Lesson Study project provided further awareness and attraction to Lesson Study for its adoption in Malaysia. The initial Lesson Study researches and also the pilot study that was carried in conjunction with the APEC HRDWG Lesson Study project would constitute the beginning of Stage 2 of educational borrowing process. These studies were carried out to explore the possibility of adopting Lesson Study as a strategy that can be used in Malaysian schools. The results of these studies were encouraging and showed the potential of incorporating Lesson Study as a teacher professional development approach. Lesson Study then moved on to Stage 3, when it was upscaled and became part of the Government Transformation Program. Subsequently, however, Lesson Study became less prominent, as it soon became conceptualized as only one out of the many strategies under the bigger umbrella of the Professional Learning Community (PLC) program. Although, the adoption of Lesson Study seems to have arrived in Stage 4 in Phillips

and Ochs (2004) theoretical perspective, the challenge of sustaining Lesson Study has become more conspicuous as newer educational ideas continually appear. In the globalizing world, other novel educational ideas continue to regularly emerge, often giving the educational innovations that have already been endorsed, such as Lesson Study, little time to be internalized and ingested. Unlike in Japan, where the educators have continued to practice Lesson Study since 1945, the teachers in Malaysia have had little time to internalize the essence of Lesson Study. Since the Lesson Study Project had been implemented in 2011, there have been other projects that have been endorsed by the Ministry of Education, which include the promotion of *Science, Technology, Engineering and Mathematics* (STEM) into the curriculum, *the Literacy and Numeracy Screening* program, followed by a renewed focus on the inclusion of technology into the classroom practice. Teachers are often faced with the challenge of how they could integrate all these innovations simultaneously. This challenge was noted by the head teachers in the pilot study who had voiced that the curriculum was already crammed and that teachers would not be able to find the space to practice Lesson Study even though they thought it was a good approach to professional teacher development.

5.2 Teachers' Views of Lesson Study in Malaysia

The *anthropological theory of the didactic* (ATD) (Chevallard & Sensevy, 2014) describes the complexity of transmission and transformation of educational content as it flows through the different levels of the educational system. In ATD, the educational content refers to the educational tasks, the techniques used in relation to the tasks, and the discourse among agents involved in the task as it transcends the different levels of educational system. Because education is a human activity, the activity and the discourse are dynamic and often leads to transformations of the original ideas, resulting in differences in meanings and nuances of the ideas among the agents who are involved.

In the Lesson Study projects described earlier, the perceived meaning of the term *Lesson Study* by the various agents who were involved in the Lesson Study program in Malaysia, evolved as the Lesson Study program cascaded through the different levels of its introduction and implementation in Malaysia. The researchers and teachers in the initial Lesson Study research studies and the Pilot Study had the benefit of observing the practice of Lesson Study in Japan through the APEC HRDWG Lesson Study Project while most of the participating teachers in the PLC program only first learned about Lesson Study in the PLC workshops they

attended. One meaning commonly espoused by some of the teachers was that Lesson Study is a synonym for lesson plan. For these teachers, they believed that they have done Lesson Study once they have completed and taught the lesson plan. Some other teachers relate Lesson Study to the process of video recording the lesson. They believed lessons must be video recorded in Lesson Study. Moreover, the teachers believed that the purpose of Lesson study was to video record exemplary lessons. The emergence of these various meaning and perceptions by the teachers can be explained by the *anthropological theory of the didactic* (ATD) (Chevallard & Sensevy, 2014; Artigue *et al.*, 2019). In ATD, meanings of mathematical terms are transformed as they move across the various levels of the educational system, attributed to the complexities of discourse among the agents in the educational system. From the perspective of ATD, it is highly likely that the meaning of *Lesson Study* would be “shaped, modified, disseminated, introduced, transposed and eliminated” (Artigue *et al.*; p. 17) due to the encompassing anthropological constraints imposed at the various levels of implementation. The agents in the dissemination of Lesson Study come into the program from diverse backgrounds, playing different roles at various levels of its implementation in Malaysia. In the early stages, the researchers not only learnt about Lesson Study from literature but they also had the opportunity to learn through international cooperation, experiencing first-hand how Lesson Study is carried out in Japan and other countries. The teachers who were involved had the benefit of participating and learning in small groups through an extended period of time, enabling them to construct a more in-depth knowledge of Lesson Study. In contrast, the PLC program was conducted in a much larger group within a much shorter period of time. The workshops were normally conducted over a period of four to five days. The depth of interaction and the period over which it occurs will necessarily influence the conceptualization of ideas about Lesson Study. Moreover, the PLC program saw the involvement of specialists from different subjects besides mathematics. This would have made the presentation of Lesson Study more generic, and thus missing out on discussions related to the mathematics curriculum. Mindful that perceptions and beliefs emerge through a milieu of biographical, contextual and interactional influences (Cheah, 2001; Cocklin, 1991), these variations of conceptions of Lesson Study are perhaps not unexpected.

5.3 Sustaining and revitalizing Lesson Study in Malaysia

The various views held by the teachers who participated in the PLC program about Lesson Study, indicate that their views of Lesson Study were superficial. This was perhaps expected due to the short duration of interaction during the workshops. Although the workshops included hands-on lesson planning and real-life classroom teaching, and observations followed by discussions it would not have been intensive enough to provide the teachers with a deeper insight as to the extent Lesson Study can be used as an avenue of professional learning for them. The concern is that these superficial views of Lesson Study would result in superficial lesson planning and lesson observations, followed by discussions that are based on purely behavioral perspectives. There were little in-depth discussions which could provoke reflective thought necessary for professional development. Another implication is that their personal views could influence their perceptions of the purpose of Lesson Study. This would influence the teachers to devise personal short-term goals for implementing Lesson Study: To plan an exemplar lesson, to implement the lesson, and to critique the lesson. While these aims are aligned with the process of Lesson Study, these short-term goals are unlikely to motivate the teachers to persevere to achieve higher long-term goals as the short-term goals involve superficial targets could be achieved using less demanding approaches. On the contrary, the teachers would need to develop more significant and meaningful long-term goals in order to sustain the practice of Lesson Study.

In contrast, Lesson Study in Japan, while still based on the four-step model of lesson planning, implementing the lesson, observations and reflective discussion, is practiced with more rigor. Several features of Lesson Study in Japan comprise deeper discussions that include focus on *hatsumon* – presentation of a problem, *kikan-shido* – instruction at students' desk, *neriage* – dynamics of whole class discussion, and *matome* – summing up (Shimizu, 2007). Lesson Study in Japan is also practiced to achieve the long-term goals of developing student-centered learning and the structured problem-solving approach for teaching and learning. Thus, in Japan the Lesson Study approach is used as a means to an end, and not an end in itself; to attain the higher goal of quality mathematics didactics. In Japan, Lesson Study is used as a means of developing a culture within the community of mathematics educators. The skills, knowledge and attitudes of the teachers are encultured within the community of professional community of mathematics educators (Baba, 2013). Lesson Study is thus a tool which is used

for the purposes of developing the knowledge, skills and attitude of the professional community. Besides Japan, the Lesson Study community in Thailand has also been able to sustain the use of Lesson Study to achieve the long-term goal of accomplishing the open-ended approach in the teaching and learning of mathematics (Inprasitha, 2011). This perspective of looking at Lesson Study as part of the culture of the professional community could possibly provide indications of the way forward to sustain and revitalize the practice of Lesson Study.

The ensuing suggestions emerge through juxtaposing the development of Lesson Study in Malaysia against the backdrop of the Lesson Study in Japan and Thailand as a professional community of practice:

1. *Alignment of the long-term goals of Lesson Study to the needs of the professional community.* The long-term goals of Lesson Study should address the needs of the professional community. This is particularly essential in Malaysia as Lesson Study has been conceptualized as PLC which includes the various subjects taught in school. The goal for the mathematics community could include themes that focus on attaining the vision of teaching mathematics as embodied in the national curriculum. In Japan, the goal was to create lessons using the structured problem-solving approach, while Thailand adopted the open-ended approach. Setting the appropriate long-term goals will allow deeper discussions and consequently expand the understanding of the curriculum. In Japan, a significant amount of time in Lesson Study is spent on *kyouzai kenkyuu* – the careful study of academic content and teaching materials (Takahashi & McDougal, 2016). In the early small-scale studies and the related APEC HRDWG project in Malaysia, the clarity and relevance of the goals provided meaningful direction in the implementation of Lesson Study. However, by the time Lesson Study was upscaled in the PLC project in the GTP, there was little relevance and connection of the goals to the mathematics community. Part of the reason was that the PLC project had by now been expanded to include other subjects besides mathematics.
2. *Building and developing Lesson Study groups over a period of time.* Learning about Lesson Study through a one-week workshop allows for quick dissemination and awareness of the features of Lesson Study, but for Lesson Study to be sustained the Lesson Study groups must be allowed time to develop and build the bonds of collegiality, attitude and trust. In the case of Malaysia, the support of the school administration is essential, as Lesson Study also entails re-scheduling lessons in order that lesson observations and discussion meetings can be conducted. The results from the early small-scale studies and the APEC HRDWG pilot study showed more teacher professional learning was attained though longer engagement in Lesson Study with the collaboration of the school administration.
3. *Emphasizing and expanding the pool of Knowledgeable Others.* In Lesson Study, the *knowledgeable other* is someone with extensive knowledge and experience either in content area or in Lesson Study (Takahashi & McDougal, 2016). In the case of Malaysia,

the *knowledgeable other* sometimes play dual roles, as a content expert and also as the lead person and advisor to the Lesson Study group. This was the case in the early researches on Lesson Study and the APEC HRDWG Pilot Study where the *knowledgeable other* were the researchers. The head teachers of the schools involved, recognized the critical role played by the knowledgeable other and indicated their wish that the *knowledgeable other* could continue to extend their assistance to the school even after the end of the project. In the PLC project, the *knowledgeable others* were the master trainers in the project who had extensive experience in the teaching the relevant subjects. To sustain the Lesson Study program, it is necessary to expand the pool of *knowledgeable others* to lead in developing the professional community.

4. *Empowering teachers to participate in the decision-making process related to the Lesson Study Groups.* In envisioning the growth of Lesson Study groups as part of the wider professional community, it is necessary to incorporate shared visions into the community. Opportunities should be created where the voices of the members of the community comprising of administrators, researchers and teachers can be shared, acknowledged and taken into consideration in the decision-making process
5. *Championing Lesson Study at various levels of the professional community.* One of the essential features that has helped the development of Lesson Study in Japan was the sharing of the results at various levels of the professional community. Lesson Study is carried out in a highly structured manner at school and district levels in Japan (Takahashi & McDougal, 2016). This provides opportunities for the teachers to share their teaching ideas and materials with their peers. For Lesson Study to be sustained, the professional community can be encouraged through various events and programs that highlight the work of the community. Lesson Study open class and other activities at school, district, state and national level can serve as platforms for knowledge, ideas and products to be shared among members of the professional community.

6. Conclusion

This article set out to trace the development of Lesson Study in Malaysia and examine the issues and challenges, and its contribution to mathematics education. Lesson Study started as small scale collaborative studies which showed its potential as a professional development approach. Malaysia's participation in the APEC HRDWG Lesson Study project further propelled Lesson Study into prominence among educators in Malaysia. Eventually, the upscaling of Lesson Study was to occur when it became part of the Government Transformation Program, which involved a reconceptualization of Lesson Study under the bigger umbrella of Professional Learning Community. Feedback from the PLC project show that while the participating teachers were confident about enhancing their subject matter knowledge and pedagogical content knowledge, they were less confident about implementing Lesson Study in

their own classrooms. Evaluating the implementation of Lesson Study in Malaysia, however, would be incomplete unless it is done by taking into consideration the needs of the professional community. It is perhaps pertinent to suggest that the adoption of Lesson Study in Malaysia could hopefully be reviewed and revitalized by considering the needs and vision of the mathematics education community, particularly in the direction mathematics didactics in Malaysia should take. Clarity of this vision would then provide teachers and researchers with motivation to use Lesson Study to improve the teaching and learning of mathematics in Malaysia.

7. References

- Artigue, M., Bosch, M., Chaachoua, H., Chellougui, F., Chesnais, A., Durand-Guerrier, V., ... & Trouche, L. (2019). The French didactic tradition in mathematics. In W. Blum, M. Artigue, M. A. Mariotti, R. Sträßer & M. Van den Heuvel-Panhuizen (Eds.), *European traditions in didactics of mathematics* (pp. 11-56). Springer.
- Baba, T. (2013). Professional competence and professional community in mathematics education. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, **36**(2), 105-120.
- Bahagian Pendidikan Guru. (n.d.). **Komuniti pembelajaran profesional. Strategi 2: Amalan penswastaaan.** [Professional Learning Community. Strategy 2: De-privatization of practice]. Bahagian Pendidikan Guru, Kementerian Pelajaran Malaysia.
- Cheah, U. H. (2001). **The construction of mathematical beliefs by trainee teachers in a teachers college:** A multiple case study. Unpublished Ph.D. thesis, Universiti Sains Malaysia.
- Cheah, U. H. (2012). **Implementing teaching and learning innovations through lesson study: Mathematical thinking and communication.** SEAMEO RECSAM
- Cheah, U. H. (2013). A design research approach towards development of curricular materials: The case of modelling ratio and proportions. In M. Inprasitha (Ed.), **Proceedings: The 6th East Asia conference on mathematics education (EARCOME 6)** 3, (pp. 51-60). Center for Research in Mathematics Education, Khon Kaen University.
- Cheah, U. H. (2018). Designing instruction in geometry: Using lesson study to improve classroom teaching. In P. Herbst, U. H. Cheah, P. Richard, & K. Jones (Eds.), **International perspectives on the teaching and learning of geometry in secondary schools** (pp. 181-196). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77476-3_11

- Cheah, U. H., & Mustapha, Z. (2012). **Enabling the professional learning among teachers of low performing schools in Malaysia through lesson study: Aspiration and challenges.** Paper Presented at the APEID Hiroshima Seminar “Innovation for the Promotion of Lesson Study in Asia and Pacific Regions” held at the Hiroshima University in Japan on 6-9 March, 2012
- Chevallard, Y., & Sensevy, G. (2014). Anthropological approaches in mathematics education: French perspectives. In S. Lerman (Ed.), **Encyclopedia of mathematics education** (pp. 38-43). Springer.
- Chew, C. M., & Lim, C. S. (2014). Primary mathematics teachers’ stages of concern about the implementation of lesson study. In A. L. White, S. Tahir, & U. H. Cheah (Eds.), **Empowering the future generation through mathematics education** (pp. 52-63). SEAMEO Regional Centre for Education in Science and Mathematics.
- Chew, C. M., Lim, C. S., Wun, T. H., & Lim, H. L. (2013). Enhancing pre-service secondary teachers’ Geometer’s Sketchpad activities for teaching mathematics through lesson study. In M. Inprasitha (Ed.), **Proceedings: The 6th East Asia conference on mathematics education (EARCOME 6)3**, (pp. 79-89). Center for Research in Mathematics Education, Khon Kaen University.
- Chiew, C. M., Goh, S. I., & Kim T. S. (2013). Implement and sustain lesson study from mathematics teachers’ perspective. In M. Inprasitha (Ed.), **Proceedings: The 6th East Asia conference on mathematics education (EARCOME 6) 3**, (pp. 90-93). Center for Research in Mathematics Education, Khon Kaen University.
- Clarke, D. (1994). Ten key principles from research for the professional development of teachers. In D. B. Aichele & A. F. Coxford (Eds.), **Professional development for teachers of mathematics** (pp. 37-48). The National Council of Teachers of Mathematics.
- Cocklin, B. (1991). Back to school: A model of the process of becoming an adult student. **British Journal of Sociology of Education**, **12**(1), 3-21.
- Cockroft, W. H. (1982). **Mathematics counts**. Her Majesty’s Stationary Office.
- Educational Planning and Research Division (2007). **Bahan kursus kajian tindakan 2007** [Action research course material 2007]. Retrieved on 12 September 2008 from http://apps.emoe.gov.my/bppdp/kajian%20Tindakan%202007/index_kajian%20tindakan%202007.htm
- Ghani, Z. (1988). **Curricular decision-making in the diffusion of educational innovation in Malaysia**. Unpublished PhD thesis. University of Southampton, United Kingdom.
- Inprasitha, M. (2011). One feature of adaptive lesson study in Thailand: Designing a learning unit. **Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia**, **34**(1), 47-66.

- Karp, A. (2013). From the local to the international in mathematics education. In M.A. Clements **et al.**, (Eds.), **Third international handbook of mathematics education** (pp. 797-826). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2>.
- Kemmis, S., & McTaggart, R. (1988). **The Action research planner** (3rd edition). Deakin University Press
- Kim, P. L. (2005). The environments of action research in Malaysia. In S. Hollingsworth (Ed.), **International action research: Educational reform** (pp.238-260). Routledge.
- Kor, L. K., & Lim, C. S. (2009). Lesson study: A potential driving force behind the innovative use of Geometer's Sketchpad. **Journal of Mathematics Education**, **2**(1), 69-82.
- Kor, L. K., Tan, S. F., & Lim, C. S. (2019). Capturing changes and differences in teacher reflection through lesson study: A comparison of two culturally diverse Malaysian primary schools. In Huang, R., Takahashi, A., da Ponte, J.P. (Eds.), **Theory and practice of lesson study in mathematics. An international perspective** (pp. 369-391). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04031-4_18
- Lee, C. S. (1982). Reform in mathematics education in Malaysia. **Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia**, **2**(2), 34-40.
- Lee, M. N.N. (1999). Education in Malaysia: Towards Vision 2020, school effectiveness and school improvement. **School Effectiveness and School Improvement**, **10**(1), 86-98. <https://doi.org/10.1076/sesi.10.1.86.3514>
- Lewis, C. (1995). **Educating hearts and minds: Reflections on Japanese preschool and elementary education**. Cambridge University Press.
- Lim, C. S., & Chiew, C. M. (2015). Initiating lesson study to promote good practices: A Malaysian experience. In M. Inprasitha, M. Isoda, P. Wang-Iverson & B. H. Yeap (Eds.), **Lesson study: Challenges in mathematics education** (pp. 255-272). World Scientific.
- Lim, C. S., Kor, L. K., & Chia, H. M. (2016). Revitalising mathematics classroom teaching through Lesson Study (LS): A Malaysian case study. **ZDM Mathematics Education** **48**, 485–499. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0779-7>
- Lim, C. S., Teh, K. H., & Chiew, C. M. (2018). Promoting and implementing lesson study in Malaysia: Issue of sustainability. In M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. da Ponte, A. N. Shúilleabháin & A. Takahashi (Eds.), **Mathematics lesson study around the world: Theoretical and methodological issues** (pp. 47-64). Springer.
- Lim, C. S., White, A. L., & Chiew C. M. (2005). **Promoting mathematics teacher collaboration through lesson study. What can we learn from two countries' experience?** Paper presented at the 8th International Conference of the Mathematics Education into the 21st Century Project: "Reform, Revolution and Paradigm Shifts in Mathematics Education" in Cooperation with the Universiti Teknologi Malaysia (UTM), Nov. 25-Dec. 1, 2005. Johor Baru, Malaysia

- Mahathir, M. (1979). **Laporan jawatankuasa kabinet mengkaji pelaksanaan dasar pelajaran** [Cabinet committee report on the implementation of educational policies]. Kementerian Pelajaran Malaysia.
- Miyakawa, T. (2007). Textbooks and teaching guides. In M. Isoda, M. Stephens, Y. Ohara & T. Miyakawa (Eds.), **Japanese lesson study in mathematics: Its impact, diversity and potential for educational development** (pp. 48-51). World Scientific.
- National Institute for Educational Policy Research. (2006). **Best practices in professional learning of science and mathematics teachers**. National Institute for Educational Policy Research (NIER), Tokyo. http://www.apecneted.org/resources/downloads/BestPracticeMSTeacher_NIER2005Nov.pdf
- PEMANDU (2010). **Government transformation programme: The roadmap**. Prime Minister's Department, Malaysia.
- Phillips, D. (2009). Aspects of educational transfer. In R. Cowen & A. M. Kazamias (Eds.), **International handbook of comparative education** (pp.1061-1077). Springer.
- Phillips, D., & Ochs, K. (2003) Processes of policy borrowing in education: Some explanatory and analytical devices. **Comparative Education**, **39**(4), 451-461.
- Phillips, D., & Ochs, K. (2004). Researching policy borrowing: Some methodological challenges in comparative education. **British Educational Research Journal**, **30**(6), 773-784.
- Shimizu, Y. (2007). Understanding Japanese mathematics lessons. In M. Isoda, M. Stephens, Y. Ohara & T. Miyakawa (Eds.), **Japanese lesson study in mathematics: Its impact, diversity and potential for educational development** (pp. 64-67). World Scientific.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). **The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving in the classroom**. The Free Press.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (2004). Improving mathematics teaching. **Educational leadership**, **61**(5), 12-17.
- Stigler, J. W., Gonzales, P., Kawanaka, T., Knoll, S., & Serrano, A. (1999). **The TIMSS videotape classroom study: Methods and findings from an exploratory research project on eighth-grade mathematics instruction in Germany, Japan, and the United States**. National Center for Education Statistics. <https://nces.ed.gov/pubs99/1999074.pdf>
- Takahashi, A., & McDougal, T. (2016). Collaborative lesson research: Maximizing the impact of lesson study. **ZDM Mathematics Education**, **48**, 513-526.

Teh, K. H. (2013). A comparative study of the efficacy between the clinical supervision and lesson study approach for teaching practicum. In M. Inprasitha (Ed.), **Proceedings: The 6th East Asia conference on mathematics education (EARCOME 6)**3, (pp. 258-265). Center for Research in Mathematics Education, Khon Kaen University.

United States National Commission on Excellence in Education. (1983). **A nation at risk: the imperative for educational reform**. A report to the Nation and the Secretary of Education, United States Department of Education. National Commission on Excellence in Education.

White, A. L., & Lim, C. S. (2008). Lesson study in Asia Pacific classrooms: Local responses to a global movement. **ZDM Mathematics Education**, **40**, 915-925.

Zawojewski, J., Chamberlin, M., Hjalmarson, M. A., & Lewis, C. (2008). Developing design studies in mathematics education professional development. In A. E. Kelly, R.A. Lesh & J.Y. Baek (Eds.), **Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology and mathematics learning and teaching** (pp. 219-239). Routledge.

Author

Ui Hock Cheah

BSc. (HONS) with Education; Universiti Sains Malaysia

Master's Diploma M.Ed.; Deakin University, Australia

Ph.D.; Universiti Sains Malaysia

(Formerly) SEAMEO RECSAM, Penang Malaysia

International Cooperation Development in Mathematics Education; International Cooperation,

Lesson Study, Task Design Research

uccheah@recsam.edu.my

<https://orcid.org/0009-0001-0670-7002>

How to cite the article:

CHEAH, U. H. The Development of Lesson Study in Malaysia: Issues and Challenges, and Its Contribution Towards Mathematics Education. **Revista Paradigma**, Vol. XLIV, Edición Temática Estudio de Clases: Contribuciones ..., mayo de 2023 / 36 – 60.

DOI: [10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p36-60.id1411](https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p36-60.id1411)

Chinese Lesson Study: its history, development, and implications

Rongjin Huang

rhuang@mtsu.edu

<https://orcid.org/0000-0003-1442-6144>

Middle Tennessee State University
Murfreesboro, USA

Received: 28/03/2023 **Accepted:** 17/04/2023

Abstract

This paper provides a holistic portrayal of Chinese lesson study (LS). It includes the historical and cultural traditions of Chinese LS, the mechanisms of Chinese LS, the major features of Chinese LS in comparison with Japanese LS, and its recent development and further directions. The implications of Chinese LS for the development of LS internationally are discussed.

Keywords: Lesson study. Chinese Lesson Study. Teaching Research System. Teacher Professional Learning. Improvement Science.

Lesson Study China: su historia, desarrollo e implicaciones

Resumen

Este artículo presenta un retrato holístico de Lesson Study Chinese (LS). Incluye las tradiciones históricas y culturales del LS chino, los mecanismos del LS chino, las características principales del LS chino en comparación con el LS japonés y su desarrollo reciente, y otras direcciones. Se discuten las implicaciones del SL chino para el desarrollo del SL a nivel internacional.

Palabras clave: Estudio de lecciones. Lección de estudio chino. Sistema de Investigación Docente. Formación Profesional Docente. Ciencia de la Mejora.

Lesson Study China: sua história, desenvolvimento, e implicações

Resumo

Este artigo apresenta um retrato holístico da Lesson Study China (LS). Inclui as tradições históricas e culturais da LS chinesa, os mecanismos da LS chinesa, as principais características da LS chinesa em comparação com a LS japonesa e seu desenvolvimento recente e outras direções. As implicações da LS chinesa para o desenvolvimento da LS internacionalmente são discutidas.

Palavras-chave: Lesson study. Lesson Study China. Sistema de Pesquisa do Ensino. Aprendizagem Profissional do Professor. Ciência do Aperfeiçoamento.

Introduction

Based on the TIMSS video study, which examined nationally representative eighth-grade mathematics classrooms (81 in the US, 100 in Germany, and 50 in Japan), Stigler and Hiebert (1999) revealed the high-quality mathematics teaching in Japan (90% of classrooms studied were rated as medium and high) in comparison with the classrooms studied in Germany (66%) and in the US (11%) and identified a unique Japanese pedagogical approach of teaching mathematics through “structured problem-solving.” They argued that teaching is a system and a cultural activity, and the unique Japanese teacher professional development (PD) approach, coined as Lesson Study (LS, *jogyo kenkyuu plan.*, 授業研究) helps develop teachers’ capacities needed for teaching through problem-solving nationwide. LS typically includes a collaborative study of teaching materials, joint design of a lesson, and teaching of the lesson observed by colleagues with a post-lesson debriefing followed by a revision of the lesson.

In Japan, LS has been in place with multiple models nationwide for over a century that has significantly contributed to the improvement of math and science education (Lewis, 2015, 2016; Makinae, 2019). Thanks to the seminal work by Stigler and Hiebert (1999), LS has been adopted in the US since the 1990s (Lewis; Tsuchida, 1998) and then has spread globally (Huang et al., 2019). The positive effects of Japanese LS on promoting teacher professional learning, improving student learning outcomes, and building professional learning communities (Huang & Shimizu, 2016; Lewis, 2016; Lewis & Perry, 2017; Willems & Bossche, 2019) have been well-documented, although there are various challenges of adapting LS in other countries (Fujji, 2016; Huang & Shimizu, 2016).

Recently, Chinese LS has occurred in the LS community (Huang & Shimizu, 2016; Huang et al., 2017). Educators may wonder whether this is an adapted Japanese LS or whether Chinese LS has unique features. This paper aims to provide a brief introduction to Chinese LS: its historical development, mechanisms for supporting LS, and its features in comparison with the Japanese LS. The paper ends with a discussion of the implication of the Chinese LS for the international LS community.

1. Chinese LS: A brief history

The outstanding performance of Chinese Mainland students in mathematics and science on the Programme for Student Assessment (PISA) (OECD, 2013; 2019) has prompted

international scholars to study mathematics education and mathematics teacher education in China (FAN ET AL., 2015; LI; HUANG, 2018). The Shanghai teaching approach has been characterized as mastering teaching and learning through variation and includes the five big ideas of coherence, representation and structure, mathematical thinking, fluency, and variation (HUANG ET AL., 2021; HUANG; LI, 2017; NCET, 2017). Several Shanghai lessons have been recommended as exemplary lessons in a popular book, *Mathematics Mindset* (BOALER, 2018). Thus, how to prepare and ensure teachers can teach mathematics in such a way has become an interesting question.

There is a job-embedded, hierarchical PD system of teaching research activity in China. It includes studying teaching materials, jointly planning a lesson, teaching the lesson, observing the lesson, and having a post-lesson discussion as a core component (HUANG ET AL., 2017; YANG, 2009). The Chinese PD approach, focusing on examining and polishing a lesson aligned with reform-oriented teaching, was initially coined as Keli (exemplary lesson) study (HUANG; BAO, 2006). Recently, it has been theorized as Chinese LS through two special issues included in the International Journal for Lesson and Learning Studies (see HUANG ET AL., 2017; FANG ET AL., 2022).

From a historical perspective, Li (2019) illustrated how Chinese LS has evolved through three major stages and finally developed its own characteristics. In the first phase (1896-1949), the initial forms of Lesson Study activities were first introduced and practiced. During that period, the schools affiliated with normal universities provided a venue for pre-service teachers' teaching practicum experience in which (1) experienced teachers observed and provided feedback on lessons taught by student teachers and (2) experienced teachers demonstrated how to teach, to student teachers. These two types and their variations continue to be practiced in schools in China today.

In the second stage (1949-1999), adapted from the former Soviet Union, the Chinese government officially established a nationwide teaching research group (TRG) system. Teaching Research Groups focused on three main themes: (1) In-depth analysis of textbooks and other instructional materials and pedagogy; (2) Collective lesson planning by teachers in the same group; and (3) Observation of an exemplary lesson taught by expert teachers or an experimental lesson involving new teaching strategies; teaching or observing a public lesson,

followed by the audience commenting on the lesson; mutually observing lessons taught by other teachers in the same group, providing feedback.

In the third stage (2000-), to address the challenges of implementing new curriculum, teacher educators developed their own style of LS by adopting ideas of community of practices (WENGER,1998) and Japanese LS. The most recognized work was done by the Action Research Project team at Qingpu County in Shanghai (WANG; GU, 2007). Based on over 20 years of teaching experiments and empirical research in mathematics classrooms, the project team formulated an Action Education model for teacher professional development that incorporates LS as the main platform for teacher learning, planning, teaching, reflections, and new behaviors (GU; GU, 2016; HUANG; BAO, 2006). It is called “three foci (teacher belief, gaps identification, and adaptive change) with two rounds of reflections between the iterative research lesson planning for improvement (三关注, 两反思)” (WANG; GU, 2007, p. 37).

More specifically, a teacher starts with planning a lesson aiming at making visible his or her own existing teaching beliefs and behaviors by reflecting on feedback from colleagues and identifying the gaps in what the reform requires. Then the teacher redesigns and teaches the lesson aiming at gaining lived experience of the new standards, ending with reflecting, redesigning, and teaching it again based on colleagues’ observation feedback and evidence of student learning in order to arrive at a new behavior phase. Gu and colleagues’ work also marked the first time that researchers were called upon to work with schools to provide expert guidance (zhuanjia yinglin, 专家引领) (HUANG; BAO, 2006).

The recent development of Chinese LS within the context of 21st-century competency-oriented curriculum reform is discussed in a recent special issue on Chinese LS (FANG ET AL., 2022). In the following sections, I will provide more details about the features of Chinese LS and why and how Chinese LS works in China.

2. Underpinnings of Chinese Lesson Study

Chinese LS has played important roles in implementing curriculum reform and improving mathematics instruction over decades (WANG; GU, 2007; HUANG, HUANG ET AL., 2019). In this section, the reasons why Chinese LS works are explored from multiple perspectives.

2.1 A cultural perspective

From a cultural perspective, Chen (2017) argues that the following three core cultural orientations frame the Chinese LS.

First, unity of knowing and doing (知行合一) rather than conceptual explication is behind teacher knowing and understanding through embodied actions and practical discourse. Ontologically, in Chinese culture, knowing and doing are integrated.

Second, practical reasoning (实践推理) drives the deliberate practice of repeated teaching through group inquiry and reflection. Epistemologically, knowledge of good teaching is not so much talked about in verbal concepts as enacted in teachers' actions in deliberate practice through critical inquiry and reflection. As a Chinese saying states, "Proficiency comes from familiarity" (熟能生巧).

Third, a tendency to emulate those better than oneself (见贤思齐) motivates teachers to learn from "good" exemplars of expert teachers.

Methodologically, it is believed that watching model teaching, practicing for "*making perfect*," and learning from making errors are valuable opportunities for teachers. This corresponds to the statements: "doing things" cannot be separated from "being humane," and "respecting virtues" should go hand in hand with "learning knowledge."

These cultural values about teacher professional learning could help explain why in Chinese LS, repeated teaching of the same topic, developing an exemplary lesson, and knowledgeable others' involvement throughout the LS process are emphasized.

Moreover, Li (2019) argues that the following three principles and practices are crucial for understanding the nature of Chinese LS: (1) respecting and learning from masters and experts; (2) teaching and learning by integrating profound theory and deliberate practice, and (3) learning taking place among learner peers through mutual observation and discussion.

It is argued that these cultural roots could help us better understand the nature and features of Chinese LS (CHEN, 2017; LI, 2019). Yet, some unintended consequences should be noticed. For example, some teachers have taken a utilitarian or opportunist approach, participating in LS activities mainly for the sake of winning a contest or promotion, social status, and financial incentives (LI, 2019). Furthermore, it is often difficult to agree upon the criteria for "good" lessons during LS amid ongoing curricular reforms (CHEN, 2017).

2.2 An institutional perspective

From an institutional perspective, both a teacher professional promotion system and an associated teaching research system are fundamentally important for ensuring Chinese LS be implemented at scale. *The professional ranking and promotion system*, established in 1993, has evolved to support teachers' professional development.

There are three levels of professional titles: senior (高级), intermediate (中级, Level 1), and primary (初级, Level 2 &3).

For each level, political, moral, and academic qualifications are specified. In addition, there are specific titles for honoring teachers with excellence in teaching, research, and leadership, such as “exceptional teacher,” which is equivalent to university professor status (HUANG ET AL., 2016a), or “master teacher” and “subject leader” (CRAVENS; DRAKE, 2017). This system not only specifies components of teacher professional expertise but also provides incentives (the salaries are associated with different professional levels) and a culturally supported mechanism for teacher professional development (LI ET AL., 2011).

There is a *teaching research system* supporting teacher professional development (CHEN, 2020; RICKS; YANG, 2013). Teaching research (Jiaoyan) is a special term that refers to various activities of professional development at different levels (school, district, city, or national), and is organized by teaching research groups (school-based) and institutes (Jiaoyan Jigou).

The teaching research system, initially established in 1956 (WANG, 2013), has evolved into a hierarchical system with school, district, county, city, province, and national levels (YANG, 2019). Different departments, including educational bureaus, educational science research academies, and curriculum development centers at both national and local levels, are responsible for teaching research activity at different levels. Their major responsibilities include (1) guiding teaching research, (2) overseeing teaching administration in schools on behalf of educational bureaus, (3) providing consultation for educational authorities, (4) mentoring the implementation and revision of new curricula, (5) building the bridge between modern educational theories and teaching experiences, and (6) promoting high-quality classroom instruction (HUANG ET AL., 2016b).

There are more than 100,000 teaching researchers (inclusive of other disciplines) working in teaching research institutes (WANG, 2013). The teaching research specialists play

multiple roles, including (1) interpreting opinions regarding the implementation of teaching plans, syllabi, and materials based on local contexts; (2) providing evidence and suggestions on decision-making for local education authorities; (3) organizing a variety of teaching research activities at different levels; and (4) helping teachers study teaching materials, implement teaching schedules, and improve their teaching efficiency.

Specific requirements for recruiting teaching research specialists have been set by the Ministry of Education and are further specified by local education authorities (HUANG ET AL., 2012). In general, a teaching research specialist must be an excellent teacher with good teaching research ability and leadership.

Within the teaching research system, many teaching research specialists and educational researchers, who have excellence in teaching and doing educational research and with needed skills in facilitating teaching research activity, could serve as knowledgeable others for facilitating LS. Some advanced teachers are selected to serve as subject leaders at district or city levels to lead in carrying out school-based teaching research, including Chinese LS. These subject leaders help teachers interpret the curriculum standards, demonstrate their own teaching, mentor other teachers, and decode instructional expertise by comparing teaching conducted by experts and regular teachers.

Chinese LS and district research projects, with the support of subject leaders (or/and knowledgeable others from universities), have made curriculum reform transparent for teachers to ensure their learning to teach reform-oriented lessons (CRAVENS; WANG, 2017; FANG, 2017).

3. Studies on Chinese LS

Similar to Japanese LS, Chinese LS has played roles in improving mathematics teaching (HUANG ET AL., 2011), promoting students' outcomes of learning (HUANG ET AL., 2016b), developing both teachers' and specialists' professional knowledge and skills (HUANG; HAN, 2015; HUANG, ZHANG ET AL., 2017), implementing reform/innovative ideas (HUANG, HUANG ET AL., 2019; ZHAO ET AL., 2022), and building connections between research and practice (HUANG ET AL., 2016b).

In Huang and Li's (2009) study, with the aim of developing exemplary lessons to supplement the textbook, LS groups from a school, a district, and a city, supported teachers in developing lessons that demonstrated new curriculum-oriented instruction.

Huang et al. (2011) further documented how teachers could develop their instructional expertise by developing exemplary lessons and collaboration through LS. Huang et al. (2016b) explored how an LS informed by theories of learning trajectory and variation pedagogy could promote students' conceptual understanding of the mathematical algorithm of the division of fractions. Similarly, Huang, Zhang et al. (2019) revealed that theory-informed LS could develop students' ability to solve word problems.

Regarding the effect of LS on curriculum reform, both Huang and Huang et al. (2019) and Zhao et al. (2022) documented how innovative ideas introduced in curriculum standards could be implemented in the classroom effectively through iterations of LS. Concerning the learning of knowledgeable others (e.g., mathematics teaching research specialists in China), Huang and Han (2015) documented how mathematics specialists and teachers co-learned through boundary crossing during LS.

Huang and Zhang et al. (2017) detailed what knowledge and skills are needed to be specialists and how specialists develop their professional knowledge. With regard to the roles in linking theories to practice through Chinese LS, Huang et al. (2016b), Han et al. (2019), and Zhao et al. (2022) documented how a certain theory (e.g., learning trajectory, variation pedagogy) could inform the LS process and promote student learning outcomes.

Recently, Huang et al. (2021) portrayed teachers' expansive learning process through Chinese LS. In the journal special issue on Chinese LS and its adaptation in other countries (HUANG ET AL., 2017), it was argued that Chinese LS is a deliberate practice for developing instructional expertise, a research methodology for linking research and practice, and an improvement science for instruction and school improvement system-wide.

To understand recent developments of LS in China, a new journal special issue revisits the roles of LS within the context of competency-based curricula (FANG ET AL., 2022). This special issue argues that LS in China continues to serve as a powerful platform to support change in teaching and reveals a new feature of Chinese LS, namely, research-practice partnerships (RPPs) in LS (FARRELL ET AL., 2022), where researchers, who are university faculty

members, support teachers to implement competency-based (*hexing suyang* 核心素养) curriculum reform through boundary crossings (ENGESTRÖM; SANNINO, 2010).

From the lens of learning at the boundary of research-practice partnerships (RPPs), the features of Chinese LS are highlighted in three major themes: (1) the role of university-school partnerships in meeting the new demands of key competency reform; (2) resourceful tools, strategies and structures to support boundary crossing for teachers; and (3) roles and relationships for mutual learning in university-school partnerships.

Thus, it urges the need to redefine Chinese LS to engender versatility and hybridity and to enlist mutual learning relationships in future university-school partnerships.

3.1 Comparisons of Japanese LS and Chinese LS

Embedded in a nationwide, hierarchical teaching research system (school-based, district-based, city-based, province-based, nation-based), Chinese LS includes multiple modes with different purposes at different levels as well.

In general, various types of Chinese LS focus on polishing the research lesson based on classroom observation and collective reflection and emphasize the LS product as “public lessons” or “exemplary lessons” (HUANG ET AL., 2017; YANG, 2019). There are “report lessons” for novice teachers to demonstrate their professional growth, “exemplar lessons” for expert teachers to demonstrate reform-oriented good practice, and “contest lessons” for winning awards for excellence in teaching (HUANG ET AL., 2017).

There are similarities between Japanese and Chinese LS regarding the focus on examining and reflecting upon classroom practice and the nature of job-embedded and nationwide PD activity, with each having a long history and a cultural and institutional support system (LEWIS, 2016; Li, 2019; YANG, 2019).

Yet, some essential differences between Chinese and Japanese LS are identified.

Especially the essential components of Chinese LS are: (1) repeated teaching of the same topic, (2) focusing on both content and pedagogy, (3) exemplary lessons as products of LS, and (4) the involvement of knowledgeable others throughout the LS process (HUANG ET AL., 2017; LI, 2019).

First, for a long time, Chinese LS has been content-focused, oriented to developing the best teaching strategies for specific subject contents for student learning, while Japanese LS was regarded as focusing on general and long-term education goals.

Second, there are various kinds of lesson studies for teachers at different stages of their professional development in China, with a focus on demonstrating and/or developing exemplary lessons to demonstrate effective teaching. Yet, the Japanese model focuses more on the process of teacher learning than the product of a “perfect lesson.”

Third, rehearsal teaching is repeated multiple times until the teachers involved feel satisfied with the goals they set out to achieve, while Japanese teachers might or might not repeat the teaching with the improved lesson.

Fourth, knowledgeable others are involved throughout the entire process of Chinese LS, while in Japanese LS, knowledgeable others may also be involved, but not necessarily or not throughout the entire process.

4. Further directions of Chinese LS

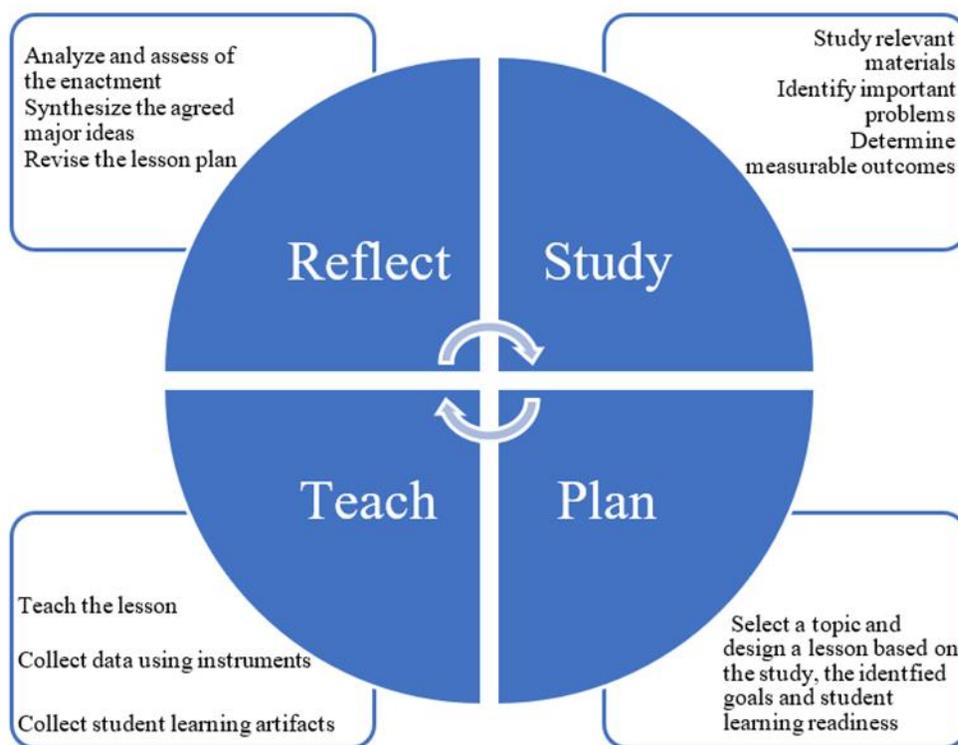
As a traditional and powerful teacher professional development approach, Chinese LS has to cater to the needs of uncharted challenges in the artificial intelligence technology-mediated education era.

By recognizing weaknesses of Chinese LS, such as focusing on teacher performance rather than student thinking and focusing on reflection based on experience rather than analytical analysis, several strategies could be adopted to improve the LS process.

First, theoretical notions such as learning trajectory (SIMON, 1995) and variation theory (GU ET AL., 2004; HUANG; LI, 2017) could be used as guiding principles during the LS process.

Second, the LS process could be carried out as disciplined inquiry (BRYK ET AL., 2015) by adopting the ideas (pre, post- tests; intended, enacted, and achieved goals of learning) from the learning study (MARTON; PANG, 2006) and investigating a focus-group of students during LS (DUDLEY, 2012). Thus, the LS process could be enriched, as displayed in Figure 1.

Figure 1 - Enriched Chinese LS process



Source: Adapted from Lewis *et al.* (2019)

Within the LS cycle, it is crucial to identify important problems to address and how to measure the outcomes of solving the problems. Before planning the lesson, it is important to understand student learning readiness through a pre-test and/or an interview with focused students. During teaching and observation, it is necessary to use certain instruments to capture critical teaching moments and student learning evidence. Immediately after the research lesson, a post-test and/or interview are needed to collect student learning outcomes and students' perceptions. During debriefing, based on the collected data, analytical analysis results should be incorporated for revising the lesson plan for the next cycle of LS.

With regard to promoting Chinese LS systemwide, some ideas from improvement science (BRYK ET AL., 2015) and networked improvement community (RUSSELL ET AL., 2017) could be adopted.

There are six core principles of improvement.

The first is to make the work problem-specific and user-centered. It starts with a single question: "What specifically is the problem we are trying to solve?"

Second is that variation in performance is the core problem to address. The critical issue is not just what works but rather “what works, for whom, and under what set of conditions.”

The third core principle is seeing the system that produces the current outcomes. It is hard to improve what you do not fully understand. It is important to understand how local conditions shape work processes and make hypotheses for change public and clear.

Fourth, we cannot improve at scale what we cannot measure. It is important to embed measures of key outcomes and processes to track if improvement occurs.

The Fifth is to anchor improvement in disciplined inquiry. Engaging rapid cycles of *Plan, Do, Study, Act (PDSA)* makes learning faster and improvement quicker. It is not a problem that failures may occur, but it is a problem if we fail to learn from failures.

The last core principle is to accelerate improvements through networked communities. We can accomplish more together than even the best of us can accomplish alone.

An examination of PDSA cycles (core principle 5) (See Figure 2) shows that the PDSA and LS cycles are nicely matched. At each phase of PDSA, there is a detailed description of what needs to be done.

For example, to plan, we analyze the cause of the problem within the system. To act, we have to make explicit the measurable outcome and hypothesis and have a theory in action (protocol). In the context of LS, it is crucial to measure what students learn and how certain types of intervention link to learning outcomes.

Figure 2 - Plan-Do-Study-Act (PDSA) circle

Source: Adapted from Bryk *et al.* (2015)

The PDSA cycle could be repeated to continuously hypothesize and test the improvement. Regarding LS context, building on the product of a cycle of LS (lesson plan and video lessons, measurement, and learning evidence), further cycles of LS could continue to address the identified problem. Thus, this type of LS could be conducted across schools in the same district or across districts.

5. Implications of Chinese LS for LS Globally

Rooted in Chinese cultural values and supported by the teaching research system and teacher promotion system, Chinese LS has contributed to the improvement of mathematics and science education nationwide over the decades. Meanwhile, Chinese LS itself has evolved and developed into new forms and connotations to meet teachers' professional development needs in changing contexts. The continuity and change keep the Chinese LS a dynamic and vital professional development vehicle for teachers to meet changing challenges. At the same, the practice and development of Chinese LS may provide insights into teacher professional development in other countries.

The key features of Chinese LS, such as iteration, the involvement of knowledgeable others, focusing on both process and product, and linking theory and practice, may provide insight into the enrichment of LS around the world. For example, the repeated teaching of the same content (similar to design-based implementation research) (FISHMAN ET AL., 2013) has been adopted by UK-research LS, which focuses on using multiple cycles of LS with a deep investigation of a group of focus-students.

The involvement of knowledgeable others (or facilitators) in the LS process has been recognized as one of the important factors ensuring the success of LS (TAKAHASHI; MCDOUGAL, 2016; SELEZNYOV, 2019). Focusing on both process and products of LS is critical for scaling up LS and building a networked improvement community (MORRIS; HIEBERT, 2011).

However, when adopting lessons originating in Asia to other countries, cultural transposition (cultural beliefs, institutional intentions) should be considered (BARTOLINI BUSSI ET AL., 2017; RAMPLOUD ET AL., 2022), and necessary modifications need to be made by incorporating local culture and traditions.

Acknowledgment

Thank Dr. Dovie Kimmins from Middle Tennessee State University for proofreading the manuscript.

References

- BARTOLINI BUSSI, M. G.; BERTOLINI, C.; RAMPLOUD, A.; SUN, X.. Cultural transposition of Chinese lesson study to Italy. An exploratory study on fractions in a fourth-grade classroom. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, 6(4), p. 380-395, 2017. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-12-2016-0057>
- BOALER, J. *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. CA: Jossey-Bass, 2018.
- BRYK, A. S., GOMEZ, L. M., GRUNOW, A., LEMAHIEU, P. G, 2015. **Learning to improve: how America's schools can get better at getting better**. Cambridge, MA: Harvard Education Press, 2015.

- CHEN, L. A historical review of professional learning communities in China (1949- 2019): some implications for collaborative teacher professional development. **Asia Pacific Journal of Education**, 40(3), p. 373-385, 2020.
- CHEN, X. Theorizing Chinese lesson study from a cultural perspective. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, 6 (4), 283-292, 2017.
- CRAVENS, X.; DRAKE, T. From Shanghai to Tennessee: developing instructional leadership through teacher peer excellence groups. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, 6 (4), 348-364, 2017.
- CRAVENS, X.; WANG, J. Learning from the masters: Shanghai's teacher-expertise infusion system. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, 6(4), 306-320, 2017.
- DUDLEY, P. Lesson study development in England: from school networks to national policy. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, 1(1), 85–100, 2012.
- ENGESTRÖM, Y.; SANNINO, A. Studies of expansive learning: Foundations, findings and future challenges. **Educational Research Review**, 5(1), 1-24, 2010.
- FAN, L., WONG, N. Y., CAI, J, LI, S. **How Chinese teach mathematics: perspectives from insiders**. Singapore: Word Scientific, 2015.
- FANG, Y. School-based teaching research and Lesson-case study in mediating the second-cycle curriculum reform in Shanghai. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, 6 (4), 293-305, 2017.
- FANG, Y., LYNN, P.; HUANG, R. Continuity and change: Chinese lesson study redefined in the context of key competencies-based reform. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, Vol. ahead-of-print No. ahead-of-print, 2022.
- FARRELL, C. C., PENUEL, W. R., ALLEN, A., ANDERSON, E. R., BOHANNON, A. X., COBURN, C. E.; BROWN, S. L. Learning at the Boundaries of Research and Practice: A Framework for Understanding Research-Practice Partnerships. **Educational Researcher**, 0013189X211069073, 2022.
- FISHMAN, B. J., PENUEL, W. R., ALLEN, A. R., CHENG, B. H.; SABELLI, N. O. R. A. Design-based implementation research: An emerging model for transforming the relationship of research and practice. **Teachers College Record**, 115(14), 136-156, 2013.
- FUJII, T. Designing and adapting tasks in lesson planning: A critical process of lesson study. **ZDM Mathematics Education**, 48, 411–423, 2016.
- GU, F.; GU, L. Characterizing mathematics teaching research mentoring in the context of Chinese lesson study. **ZDM Mathematics Education**, 48 (4), 441-454, 2016.

- GU, L., HUANG, R.; MARTON, F. Teaching with variation: An effective way of mathematics teaching in China. In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), **How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders** (pp. 309–348). Singapore: World Scientific, 2004.
- HUANG, R.; BAO, J. Towards a model for teacher's professional development in China: introducing keli. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 9 (3), 279-298, 2006.
- HUANG, R.; HAN, X. Developing mathematics teachers' competence through parallel lesson study. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, 4 (2), 100-117, 2015.
- HUANG, R.; LI, Y. **Teaching and learning mathematics through variations: Confucian heritage meets western theories**. Rotterdam: Sense, 2017.
- HUANG, R.; SHIMIZU, Y. Improving teaching, developing teachers and teacher educators, and linking theory and practice through lesson study in mathematics: an international perspective. **ZDM**, 48(4), 393-409, 2016.
- HUANG, R., FANG, Y.; CHEN, X. Chinese lesson study: An improvement science, a deliberate practice, and a research methodology. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, 6(4), 270-282, 2017.
- HUANG, R., GONG, Z.; HAN, X. Implementing mathematics teaching that promotes students' understanding through theory-driven lesson study. **ZDM-Mathematics Education**, Vol. 48 (4), 425-439, 2016b.
- HUANG, R., SU, H.; XU, S. Developing teachers' and teaching researchers' professional competence in mathematics through Chinese lesson study, **ZDM Mathematics Education**, 46 (4), 239-251, 2014.
- HUANG, R., TAKAHASHI, A.; DA PONTE, J. **Theory and practices of Lesson Study in Mathematics: an international perspective**. New York, NY: Springer, 2019.
- HUANG, R., XU, S., SU, H., TANG, B.; STRAYER, J. (2012). Teaching researchers in China: Hybrid functions of researching, supervising and consulting. Paper presented at **12th International Conference on Mathematics Education**, July 8–15, 2012. Seoul, Korea, 2012.
- HUANG, R., YE, L.; PRINCE, K. Professional development system and practices of mathematics teachers in Mainland China. In B. Kaur, K. O. Nam, & Y. H. Leong (Eds.), **Professional development of mathematics teachers: An Asian perspective**. (pp.17-32). New York: Springer, 2016a.
- HUANG, R., ZHANG, J., MOK, I., ZHOU, Y., WU, Z.; ZHAO, W. The competence of teaching research specialists and their development in China. **International Journal for Lesson and Learning Studies, Special issue**, 6(4), 321-335, 2017.

- HUANG, X., HUANG, R., HUANG, Y., WU, C.; WANNER, C. A. Lesson study and its role in the implementation of curriculum reform in China. In R. Huang, A. Takahashi, & J. P. da Ponte (Eds.), **Theory and practices of lesson study in mathematics: An international perspective** (pp.229-254). New York, NY: Springer, 2019.
- HUANG, X., HUANG, R.; BOSCH, M.. Analyzing a teacher's learning through cross-cultural collaboration: a praxeological perspective of mathematical knowledge for teaching. **Educational Studies in Mathematics**, 107(3), 427-446, 2021.
- HUANG, X., HUANG, R.; LEE, M. Y. (2022). Characterizing expansive learning process in Chinese lesson study: A case of representing fractions on a number line. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, Vol. ahead-of-print No. ahead-of-print. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-03-2021-0026>, 2022.
- LEWIS, C. What is improvement sciences? Do we need it in education? **Educational Researcher**, 44 (1), 54-61, 2015.
- LEWIS, C. How does lesson study improve mathematics instruction? **ZDM Mathematics Education**, 48 (4), 571-580, 2016.
- LEWIS, C.; TSUCHIDA, I. A lesson is like a swiftly flowing river: How research lessons improve Japanese education. **American Educator**, 22(4), 1998.
- LEWIS, C.; PERRY, R. Lesson study to scale up research-based knowledge: A randomized, controlled trial of fractions learning. **Journal for research in mathematics education**, 48(3), 261-299, 2017.
- LEWIS, C., FRIEDKIN, S., EMERSON, K., HENN, L.; GOLDSMITH, L. How does lesson study work? Toward a theory of lesson study process and impact. In R. Huang, A., Takahashi & J. P. da Ponte (Eds.), **Theory and practice of lesson study in mathematics**. pp. 13-37. Springer, Cham, 2019.
- LI, X. Analysis of Chinese lesson study from historical and cultural perspective. In Huang, R., Takahashi, A., & da Ponte, J. (2019), **Theory and practices of lesson study in mathematics: An international perspective** (pp.201-228). New York, NY: Springer, 2019.
- LI, Y.; HUANG, R. (Eds.). How Chinese acquire and improve mathematics knowledge for teaching. BRILL, 2018.
- MAKINAE, N. The origin and development of lesson study in Japan. In Huang, R., Takahashi, A., & da Ponte, J. (2019), **Theory and practices of lesson study in mathematics: An international perspective** (pp.169-200). New York, NY: Springer, 2019.
- MARTON, F.; PANG, M. F. On some necessary conditions of learning. **The Journal of the Learning Science**, 15, 193–220, 2006.
- MORRIS, A. K.; HIEBERT, J. Creating shared instructional products: An alternative approach to improving teaching. **Educational Researcher**, 40(1), 5-14, 2011.

NATIONAL CENTER FOR EXCELLENCE IN THE TEACHING OF MATHEMATICS (NCETM)(2017). **Five big ideas in teaching for mastery: the fundamental characteristics that underpinned teaching for mastery in all school and college phases**, 2017. <https://www.ncetm.org.uk/teaching-for-mastery/mastery-explained/five-big-ideas-in-teaching-for-mastery/>

OECD. PISA 2018 results: What students know and can do (Vol. I). Paris: OECD, 2019.

OECD. **PISA 2012 results: What students know and can do: Student performance in mathematics, reading and science (Vol. 1)**. Paris: OECD, 2013.

RAMCLOUD, A., FUNGHI, S.; BARTOLINI, M. G. Chinese lesson study: critical aspects of transfer from China to Italy. **International Journal for Lesson & Learning Studies**, 2022. Vol. ahead-of-print No. ahead-of-print. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-04-2021-0031>

RUSSELL, J. L., BRYK, A. S., DOLLE, J. R., GOMEZ, L. M., LEMAHIEU, P. G.; GRUNOW, A. A framework for the initiation of networked improvement communities. **Teacher College Record**, 119 (5), 1-36, 2017.

SELEZNYOV, S. Lesson study beyond Japan: evaluating impact. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, 8 (1), 2-18, 2019. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-09-2018>.

SIMON, M. A. Prospective elementary teachers' knowledge of division. **Journal for Research in Mathematics Education**, 24 (3), 233–254, 1995.

STIGLER, J. W.; HIEBERT, J. **The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom**. Simon and Schuster, 1999.

TAKAHASHI, A.; MCDUGAL, T. Collaborative lesson research: Maximizing the impact of lesson study. **ZDM Mathematics Education**, 48(4), 513-526, 2016.

WANG, J. **Mathematics education in China: tradition and reality**. Singapore: Galeasia Cengage Learning, 2013.

WANG, J.; GU, L. **Action education – A paradigm shift in teacher in-service learning**. Shanghai: East China Normal University Press (in Chinese), 2007.

WENGER, E. **Communities of practice: Learning, meaning, and identity**. Cambridge University Press, 1998.

WILLEMS, I.; VAN DEN BOSSCHE, P. Lesson study effectiveness for teachers' professional learning: A best evidence synthesis. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, 8(4), 257–271, 2019. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-04-2019-0031>

YANG, Y. How a Chinese teacher improved classroom teaching in Teaching Research Group: A case study on Pythagoras theorem teaching in Shanghai. **ZDM**, 41(3), 279-296, 2009.

- YANG, Y. The characteristics and development trends of Chinese lesson study from an international comparison perspective. **Study on Educational Development**, 39-43. (in Chinese), 2019.
- YANG, Y., & RICKS, T. E. How crucial incidents analysis support Chinese lesson study. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, 1(1), 41–48, 2013.
- ZHAO, W., HUANG, R., CAO, Y., NING, R.; ZHANG, X. A teacher's learning of transforming curriculum reform ideas into classroom practices in lesson study in China. **International Journal for Lesson & Learning Studies**, 11(2), 133-146, 2022.

Author

Rongjin Huang

Bachelor's Degree in Mathematics, Hangzhou Normal University, China
Master's degree in Mathematics Education, East China Normal University, China
Ph.D. in Mathematics Education, The University of Hong Kong, SAR, China
Ph.D. in Curriculum and Instruction, Texas A&M University, USA
Middle Tennessee State University, USA
World Association of Lesson Studies
Hrj318@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-1442-6144>

How to cite this article:

HUANG, R. Chinese Lesson Study: its history, development, and implications. **Revista Paradigma**, Vol. XLIV, Edición Temática Estudio de Clases: Contribuciones Contribuciones de la educación japonesa en diferentes países, mayo de 2023 / 61 – 79. DOI: <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p61-79.id1412>

The promise and challenge of school-wide Lesson Study in the United States

Catherine C. Lewis

cclewis150@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-0557-0876>

Mills College at Northeastern University

Oakland, CA

Justin Stoddard

stoddardj@sfusd.edu

<https://orcid.org/0009-0001-1492-5974>

John Muir Elementary School (SFUSD)

San Francisco, CA

Joshua D. Lerner

lerner.joshua@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0006-4319-461X>

Helen C. Peirce School of International Studies, Chicago Public Schools (CPS)

Chicago, IL

Hanna A. Sufrin

hannasufrin@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0005-3148-4241>

Oakland Unified School District (OUSD)

Oakland, CA

Received: 31/03/2023 **Accepted:** 20/04/2023

Abstract

This paper describes school-wide Lesson Study, a type of site-based professional learning that is near-universal in Japan but rare in the United States. After discussing the core elements of school-wide Lesson Study, we examine its promise and challenges in the United States. Promise is shown in the demonstrated potential of school-wide Lesson Study, when joined with an approach such as Teaching Through Problem-solving, to solve two persistent problems of U.S. education: (1) transforming mathematics learning to center on problem-solving; and (2) addressing the opportunity gap faced by students from historically marginalized groups. We identify two principles underlying successful development of school-wide Lesson Study: support for teachers' intrinsic motivation; and teacher-administrator joint leadership. Together, these principles are posited to support teachers' collective efficacy, a powerful influence on student learning. Finally, we discuss a major challenge to school-wide Lesson Study: sustaining it across changes in school and district leadership.

Keywords: Lesson Study. Jugyou Kenkyuu. Mathematics Teaching. Professional Learning. Professional Community. Equity. Collaborative Lesson Research.

La promesa y el desafío del Lesson Study en toda la escuela en los Estados Unidos

Resumen

Este artículo describe el Lesson Study basado en la escuela, un tipo de aprendizaje profesional local que es casi universal en Japón pero raro en los Estados Unidos. Después de discutir los elementos centrales de Lesson Study en toda la escuela, examinamos sus promesas y desafíos en los Estados Unidos. La promesa se muestra en el potencial presentado por el Lesson Study en toda la escuela, cuando se combina con un enfoque como la enseñanza a través de la resolución de problemas, para resolver dos problemas persistentes en la educación de los EE. UU.: (1) transformar el aprendizaje de las matemáticas para centrarse en la resolución de problemas; y (2) abordar la brecha de oportunidades que enfrentan los estudiantes de grupos históricamente marginados. Identificamos dos principios subyacentes al desarrollo exitoso del Lesson Study en toda la escuela: apoyo a la motivación intrínseca de los docentes; y liderazgo conjunto maestro-administrador. Juntos, estos principios se postulan para apoyar la efectividad colectiva de los maestros, una poderosa influencia en el aprendizaje de los estudiantes. Finalmente, discutimos un gran desafío para el Lesson Study en toda la escuela: sostenerlo en medio de cambios en el liderazgo de la escuela y del distrito.

Palabras clave: Lesson Study. Jugyou Kenkyuu. Enseñanza de las matemáticas. Aprendizaje profesional. Comunidad profesional. Equidad. Investigación colaborativa en el aula.

A promessa e o desafio do Lesson Study em âmbito escolar nos Estados Unidos

Resumo

Este artigo descreve o Lesson Study em âmbito escolar, um tipo de aprendizado profissional local que é quase universal no Japão, mas raro nos Estados Unidos. Depois de discutir os elementos centrais do Lesson Study em toda a escola, examinamos suas promessas e desafios nos Estados Unidos. A promessa é demonstrada no potencial apresentado pelo Lesson Study em toda a escola, quando combinado com uma abordagem como o Ensino por meio da Resolução de Problemas, para resolver dois problemas persistentes da educação nos EUA: (1) transformar o aprendizado de matemática para centrar-se na resolução de problemas; e (2) lidar com a lacuna de oportunidades enfrentada por alunos de grupos historicamente marginalizados. Identificamos dois princípios subjacentes ao desenvolvimento bem-sucedido do Lesson Study em toda a escola: apoio à motivação intrínseca dos professores; e liderança conjunta professor-gestor. Juntos, esses princípios são postulados para apoiar a eficácia coletiva dos professores, uma poderosa influência na aprendizagem dos alunos. Por fim, discutimos um grande desafio para o Lesson Study em toda a escola: sustentá-lo em meio a mudanças na liderança da escola e do distrito.

Palavras-chave: Lesson Study. Jugyou Kenkyuu. Ensino de matemática. Aprendizagem profissional. Comunidade profissional. Equidade. Pesquisa de aula colaborativa.

Introduction

School-wide Lesson Study is near-universal in elementary schools in Japan (NIER, 2011), but rare in the United States. This chapter describes school-wide Lesson Study, which has three core elements: a long-term vision for student development shared by all educators at a school; Lesson Study cycles through which educators enact and study their vision in practice; and pathways that support knowledge flow within the school and with the outside.

We present three cases of U.S. school-wide Lesson Study; information on these cases (School S, School O, and School CE) is provided in a subsequent section of the chapter. The cases suggest the potential of school-wide Lesson Study to solve two daunting problems in U.S. education: (1) transforming mathematics instruction from “telling” by teachers to active knowledge creation by students; and (2) the opportunity gap faced by students from historically marginalized groups. From these cases, we identify two principles underlying successful school-wide expansion of Lesson Study—support for teachers’ intrinsic motivation; and teacher-administrator joint leadership. We speculate that these two principles build teachers’ collective efficacy, a powerful influence on student learning. Finally, we look at the challenges faced by schools as they try to build and sustain school-wide Lesson Study.

What is School-Wide Lesson Study?

School-wide Lesson Study has three core elements:

- A long-term vision for student development shared by teachers;
- Lesson Study cycles through which teachers enact and study their vision in practice; and
- Pathways that support knowledge flow within the school and with the outside.

Each of the three elements has an important function. The vision creates a sense of collective purpose among teachers and grounds the work in teachers’ heartfelt goals. The Lesson Study cycles enable teachers to build and examine their vision in practice. The knowledge flow pathways enable teachers to learn from other teams within their school and from outside resources.

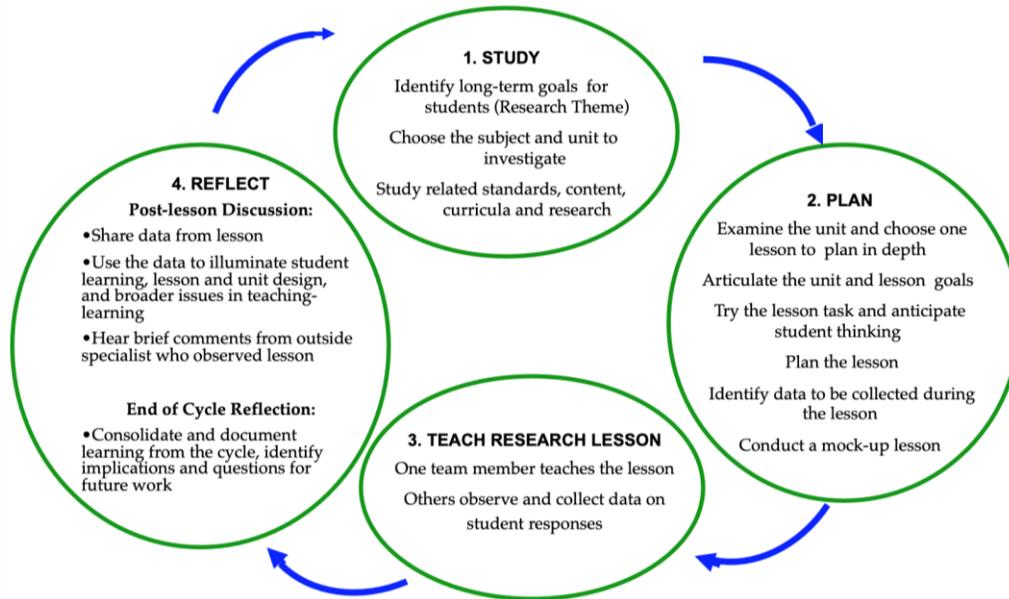
Shared vision

Teachers together identify the qualities they want all students to have at graduation or later in life and develop a vision statement that expresses these qualities. Schools often call this vision statement a “Research Theme,” (from the Japanese term *Kenkyuu Shudai*) or “Vision for Student Success.” As part of the vision statement, teachers build a “Theory of Action” about how to achieve their vision—for example, that students’ mathematical agency and identity is built through lessons that engage students in problem-solving and productive talk. A basic process for building the vision and theory of action is found in LSGAMC, 2022a.

Lesson Study cycles

Teachers conduct Lesson Study cycles (see Figure 1) that address a specific topic taught at the grade level and also the long-term vision for students. Typically, each Lesson Study team is made up of 3-6 teachers from a grade level or grade band. The team studies what is known about the teaching-learning of the topic and co-plans a “research lesson” designed to bring to life their ideas about teaching of the topic and about their long-term vision for students. Ideally, all teachers in the school observe the research lessons and discuss the implications for their shared school vision. In practice, it may take several years to lay the groundwork for many or all teachers at the school to observe all teams’ research lessons.

Figure 1 - Lesson Study Cycle



Source: Elaboration by authors

Each phase of the Lesson Study cycle offers opportunities for teachers' learning. For example, the Study Phase allows teachers to look at a mathematical topic in depth, studying curriculum, standards and research. After conducting a Lesson Study cycle on multiplication of fractions, teachers at School CE "just kept going on and on about how much they learned about the topic...they had taught this topic before but had never really understood it conceptually. It was really clear to them how much they had learned about the content." The next phase of the cycle, Plan, sparked further insights about the curriculum: As teachers anticipated the knowledge students needed for the research lesson, they realized that an idea in the curriculum that they "had glossed over earlier was actually important for the children's understanding of this topic."

Teaching a research lesson in front of colleagues for the first time is an experience that many teachers look back on as a pivotal moment in their career, when they realize the power of learning from colleagues and from practice. Justin Stoddard explains, "When you have a dedicated team of critical observers, it provides a unique opportunity to gather data on how different students are engaging in their work, misconceptions, and the patterns emerging with that particular group of students." Years later, teachers recall specific ideas from the post-lesson reflection phase, such as the simple question from an outside commentator: "What is the new

learning in this lesson? Mathematics is joyful when students can expect to learn something new in every lesson.” Josh Lerner reflects on the power of the post-lesson discussion:

I think most people teaching a research lesson for the first time are somewhat intimidated or worried. But usually the result is that they listen really deeply to what is said because it's about them and their students, and they find it very inspiring in some way. For example, last spring, teachers extended the introduction of the lesson a lot more than we had planned, perhaps out of nerves, and front-loaded a lot of information to help students be successful once they were attempting the problem. Dr. Takahashi's final comments called this “just in case” teaching—telling students everything upfront just in case they need it, even though the goal is to challenge students to try to do it themselves. He contrasted this with “just in time” teaching, in which you plan out things to say or do only if needed.

Knowledge flow pathways

Knowledge flow pathways allow teachers to learn from one another and also from outside resources. Table 1 provides some examples of knowledge flow pathways at school-wide Lesson Study sites. These pathways differ from site to site, but share the same underlying purpose: ensuring that teachers can learn from each other and from outside knowledge resources.

Table 1 - Knowledge flow pathways

Pathway	Examples
Shared school-wide study of an outside resource	A book on educating for equity read by the whole faculty argues that joy and agency should be central to student learning; these ideas inform the vision of student success developed by teachers. Teachers review videos of Teaching Through Problem-solving lessons (LSGAMC 2022b) to build their vision about how mathematics instruction nurtures self-confident, independent learners.
Bi-weekly school-wide inquiry prompt	Teachers collect and discuss individual classroom artifacts in response to a school-wide prompt such as “What do you do to support academic conversations in your classroom?”
Lesson Study teams study outside resources	Teams study standards, curriculum units and research; the team summarizes the implications of these resources in the research lesson Teaching-Learning Plan handed out to all observers
Lesson Study teams consult with outside specialists	Teams ask for feedback on the draft lesson plan from an experienced mathematics educator who poses questions or makes suggestions (e.g., “I understand the task but I am not sure what is the mathematics you want students to learn from this lesson”)

	Teams invite an experienced mathematics educator to observe the research lesson and provide “final commentary” to help the team consider next steps in their learning (e.g., “You need to adjust the planned boardwork so that struggling students see their thinking represented on the board”)
Teachers observe research lessons by other teams	Teachers closely observe students throughout a research lesson, seeing the instructional strategies used by colleagues to enact the school vision in practice; teachers see content, instruction and learning at other grade levels, so they can connect student learning over time to their own teaching
Lesson study newsletter or bulletin board shares team findings	Pictures and key learnings from different teams’ research lessons are published in a newsletter or posted on a bulletin board so teachers can learn from the work of other teams
Teachers present or publish	Teachers present their Lesson Study findings to a state conference of mathematics educators, publish an article in a magazine for mathematics teachers, or conduct a research lesson as part of a professional conference, reshaping outside knowledge resources

Source: Elaboration by authors

School-Wide Lesson Study cases

Selection of the School-wide cases

The school-wide cases were chosen from 12 schools that worked with researchers¹ to build school-wide Lesson Study. Initially the project assumed that schools would use their locally-adopted instructional materials to improve instruction. However, during the 2015-16 school-year (the first year of the project), it became clear that local mathematics instructional resources did not offer sufficient support for teachers’ Lesson Study work, so the researchers shared resources on Teaching Through Problem-solving in mathematics, creating or translating materials based on Japanese practice (LSGAMC, 2022c).

For this paper, we draw examples from three school-wide Lesson Study sites. In each of the three districts, we report on one school that focused on mathematics Lesson Study school-

¹ Catherine Lewis of Mills College and Akihiko Takahashi of DePaul University were co-principal investigators of the work; Shelley Friedkin co-led the Mills College team, working with Kathy Emerson, Kevin Lai and Laura Henn. District educators co-led the work in each district.

wide and that: (1) showed continued evidence of school-wide Lesson Study (many or all teachers participating) two years after the end of external funding; (2) showed evidence of positive changes in teaching and learning after starting school-wide Lesson Study; and (3) had an educator interested in co-authoring this chapter.

School demographics

Schools O and S are elementary schools in two large, urban West Coast districts. School CE is a PK-8 school in a large, urban midwestern district. As Table 1 shows, Schools S and O serve higher proportions of students from most historically underserved groups than do their respective districts. School CE serves a population of students similar to the district, with slightly lower proportions from some historically underserved groups.

Table 2 - School and District Demographics

	Black	Latinx	Asian	White	English Learner	Low SES
School S	24.9%	51.6%	4.0%	2.7%	41.8%	84.0%
District S	7%	27%	35%	15%	28.1%	51.4%
School O	6.3%	89.5%	1.0%	2.1%	70.6%	92.0%
District O	23.9%	46.2%	11.8%	9.9%	31.2%	73.0%
School CE	10.8%	44%	6.3%	33%	18.7%	55.6%
District C	36.6%	46.6%	4.1%	10.5%	19.4%	77.9%

Source: Elaboration by authors

Standardized tests

Districts O and S measure mathematics performance using SBAC (Smarter Balanced Assessment; California Department of Education, 2023), the standardized test used in about a dozen U.S. states. District C uses NWEA MAP. These two mathematics standardized tests differ considerably. SBAC is the product of a major assessment re-design to capture the ambitious instruction expected by the Common Core State Standards (NGACBP & CCSSO, 2010). Hence SBAC includes constructed-response items as well as multiple-choice items and it addresses four domains: concepts and procedures; problem-solving; communicating reasoning; and modeling/data analysis. It is administered once a year (starting in grade 3) and takes about 3.5 hours. Its grade-specific forms are aligned with the Common Core State Standards for the corresponding grade level.

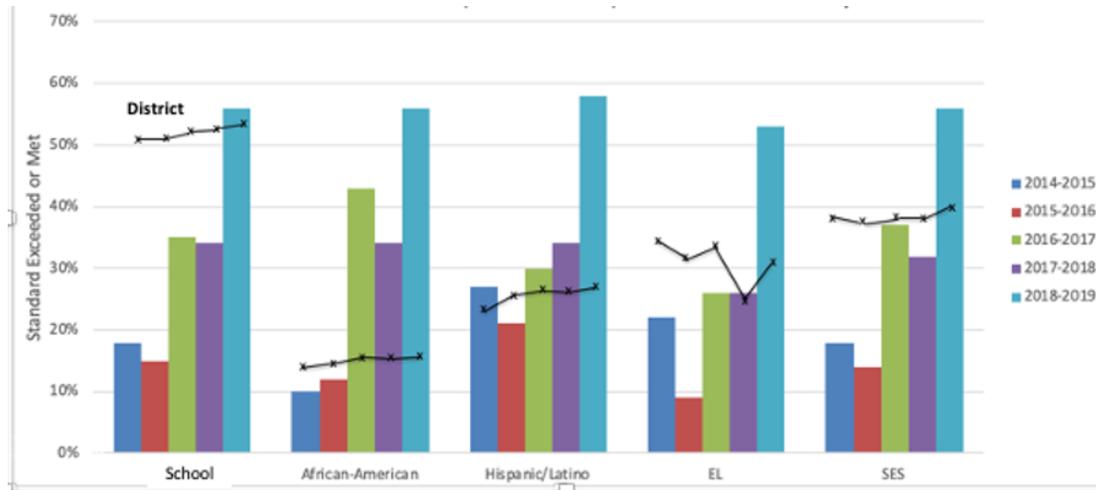
In contrast, the NWEA MAP used by District C is a fully multiple-choice assessment of 30-45 minutes, designed for repeated administrations three times during a school-year to provide brief feedback on students' mastery of specific mathematical content so that teachers can re-

teach topics as needed. NWEA's adaptive structure (a single computerized item bank for grades 3-5, with item selection determined by student response to the prior questions) means that students who answer grade-level items correctly are presented with above-grade-level content. It seems likely that NWEA's use of multiple grade-level items rewards superficial knowledge of not-yet-taught content and that the multiple-choice format fails to measure problem-solving or reasoning in depth. As a further challenge, NWEA's adaptive format substitutes a new item when students pause for a certain length of time during testing, a feature that may have been exploited by some District C schools to raise scores, according to a district report that questions the test's validity as a way to compare schools (Burke & Kunichoff, 2020).

Figures 2-4 show mathematics standardized test data from the three schools, starting the year before school-wide Lesson Study (2014-15) and going through the 2018-19 school year (four years into building school-wide Lesson Study and after external funding ended in 2018). Standardized tests were not conducted in 2019-20, due to COVID-19. In Figures 2-3, the bars show SBAC mathematics results for a school over time (for all students and demographic subgroups) and the x'd lines show district results. The difference between school and district results is striking. Schools S and O show dramatic increases in mathematics scores over time for the school and all demographic subgroups, whereas district-wide profiles show mostly flat growth profiles. In fact, School S's growth makes it a 3-sigma positive outlier in achievement growth within its district.

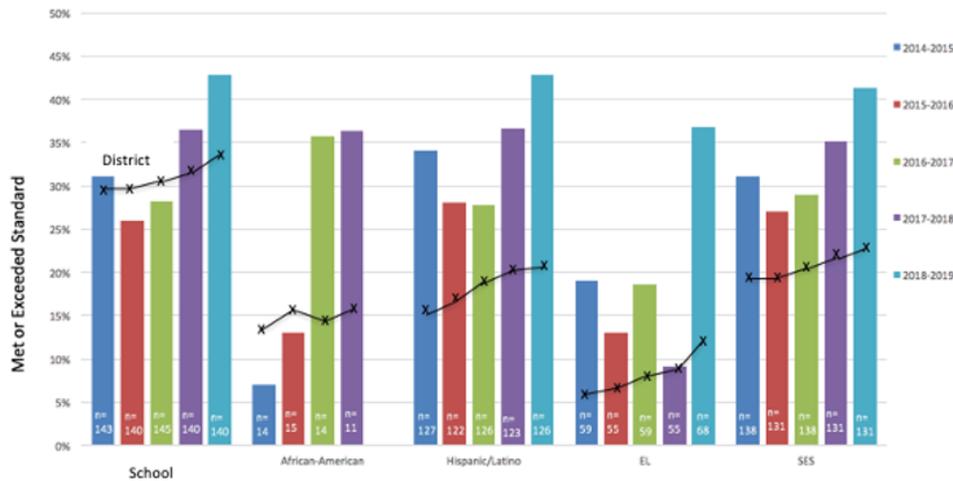
Figure 4 shows the NWEA MAP scores at all four school-wide Lesson Study sites in District C compared to the District. As it shows, the great year-to-year variability in test scores makes it hard to draw any conclusions about growth. However, outside educators (from across the United States and around the world) who attended District C's large public research lessons positively evaluated instructional quality and several lesson videos (with accompanying plans) are available online (LSGAMC, 2022b), so readers can judge instructional quality for themselves.

Figure 2 - SBAC Mathematics Proficient or Above, 2014-19, School S (bars) vs. District (lines)



Source: Elaboration by authors

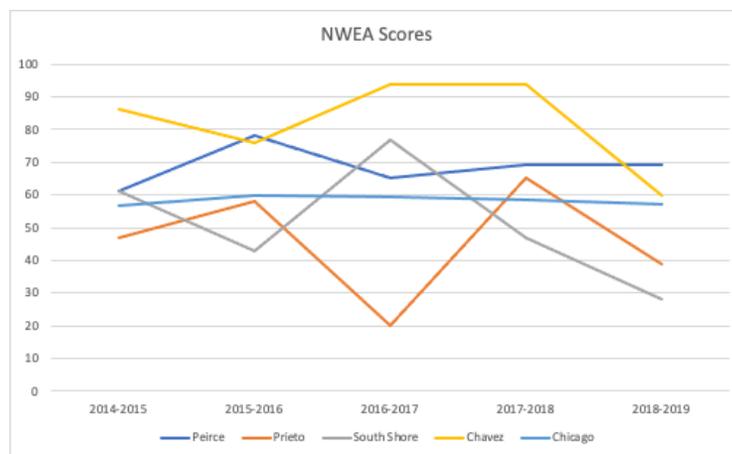
Figure 3 - SBAC Mathematics Proficient or Above 2014-19, School O (bars) vs. District (lines)



(lines)

Source: Elaboration by authors

Figure 4 - NWEA Mathematics Scores 2014-19, District C Lesson Study Schools



Source: Elaboration by authors

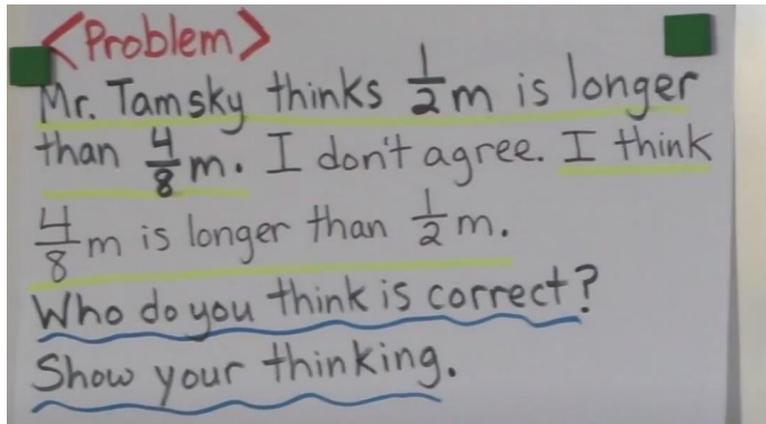
The potential of School-wide Lesson Study to solve two persistent problems in U.S. Education

Figures 2 and 3 suggest the potential of school-wide Lesson Study to address the persistent opportunity gap for students from low-income and historically marginalized communities in U.S. schools. Teaching Through Problem-solving (TTP), introduced as part of Lesson Study, was the major change in mathematics instruction during this period.

A TTP lesson typically focuses on a single problem that has been carefully designed to allow *students* to develop the targeted new mathematical procedure or concept from their prior knowledge as they work to solve the problem (Fujii, 2019; McDougal & Takahashi, 2014; Takahashi, 2021). Mathematicians reserve the term “problem” for tasks where a solution method has not previously been demonstrated; if a solution method has already been taught, the task is considered an “exercise” (Schoenfeld, 1985). Although U.S. mathematics educators have advocated for decades that “problem solving be the focus of school mathematics” (NCTM, 1980, p. 1), U.S. instruction continues to center on teacher-presented knowledge followed by student practice (Banilower et al., 2018). Teaching Through Problem-solving places great demands on *teachers’* mathematical content knowledge, since teachers need to grasp and respond to the mathematics in students’ ideas, rather than simply show students the correct mathematical procedures. Transforming instruction typically requires repeated cycles of experimentation and refinement in practice. So a transformation like Teaching Through Problem-solving is very hard to achieve without a professional learning approach like Lesson Study that enables teachers to engage in repeated cycles of practice and reflection over time.

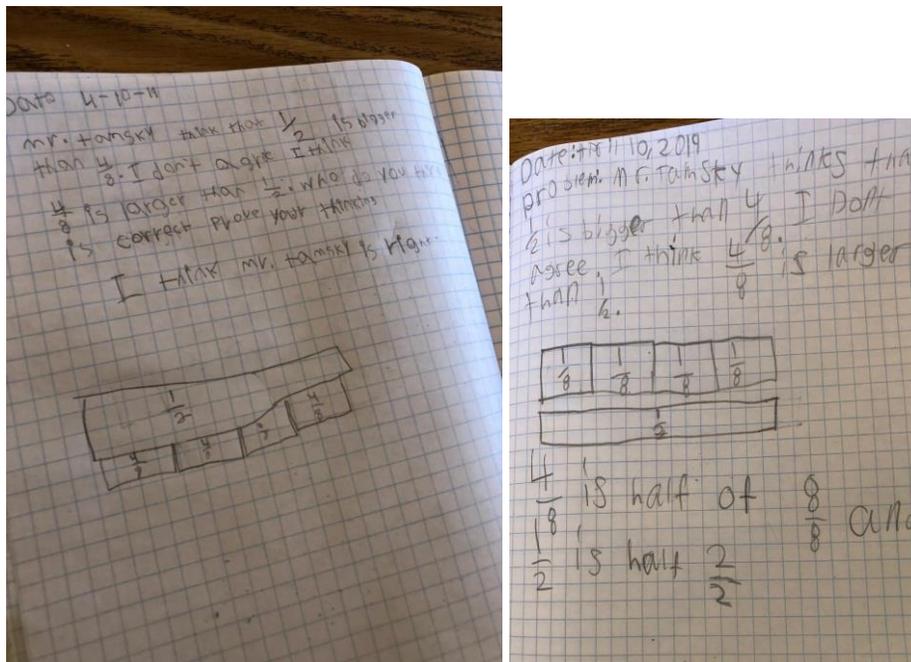
To illustrate TTP, Figures 5-8 provide artifacts from a 2019 research lesson at School S. The lesson instructor, Justin Stoddard, was in his fourth year of experimentation with TTP. The lesson revolves around a single challenging problem (see Figure 5) that allows students to build the new mathematical content—an understanding of equivalent fractions. Students initially grapple with the problem independently, working in their mathematics journals to devise a solution (Figure 6).

Figure 5 - Lesson task



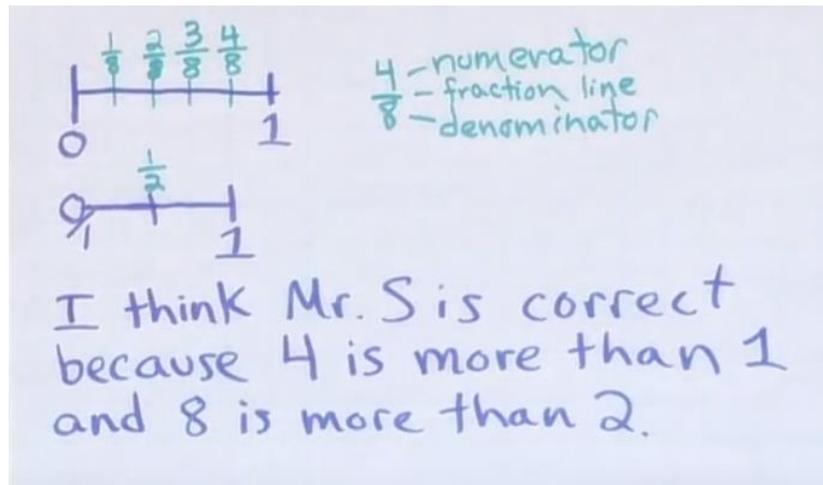
Source: Authors

Figure 6 - Student journals



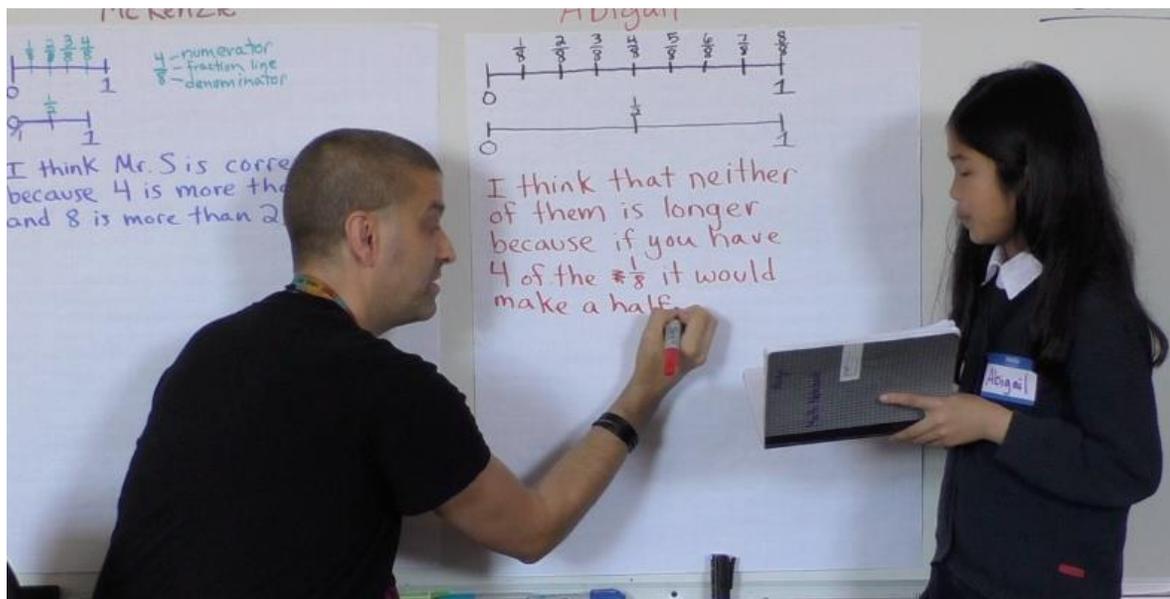
Source: Authors

Figure 7 - Student A's response, reproduced on board by teacher



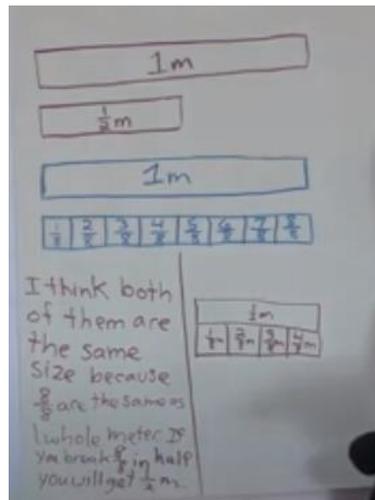
Source: Authors

Figure 8 - Student B's response, reproduced on board by teacher



Source: Authors

Figure 9 - Student C's response, reproduced on board by teacher



Source: Authors

Japanese teachers say that “the real lesson begins *after* the problem is solved,” and about half the lesson was spent in whole-class discussion of the three pieces of student work shown in Figures 7-9, which students presented and explained, followed by questions from classmates. Each piece of work showed the student’s name at the top (omitted for confidentiality) and, as Figure 8 shows, Mr. Stoddard reproduced their work at the board, directed by the students, who used their journals to guide the reproduction. The whole-class discussion elicited gasps and exclamations from students at several points. For example, a student asked Student A why she did not draw two same-length number lines, and Student A said she was not sure. Mr. Stoddard added “You’re still thinking. That’s OK.” When Student B next presented work, a student asked why she used two same-length number lines, and Student B answered, “Because I wanted to make both of them one meter,” provoking several loud “ohs” from classmates. Likewise, when a classmate asked Student C why she made $8/8$ since the number in the problem is $4/8$, Student C explained that she made the whole meter “because it is the same size as $8/8$, and if you rip it in half it is $4/8$ ”—provoking loud exclamations of “I get it” and even one “bravo!”

Table 3 provides a window on the change in mathematics teaching-learning at School S, by comparing the 2019 research lesson with a 2016 research lesson also planned by the grade 3 Lesson Study team when teachers were just beginning to experiment with TTP; two of four team members were the same in 2016 and 2019. Both research lessons focused on comparing fraction size and both were taught by Justin Stoddard. However, as Table 3 reveals, the lesson tasks differed substantially, changing from a series of “bare-number” tasks in 2016 to a single context-

embedded problem in 2019: proving whether $\frac{4}{8}$ or $\frac{1}{2}$ is greater. (The team deliberately chose to omit the problem's correct answer, to heighten the drama of the lesson.) In the 2016 lesson, before attempting the task themselves, students were handed a tool (fraction bars) and they watched a classmate solve the task (with a different fraction) on the board using fraction bars. In 2019, students devised their own strategies to solve the problem and choose their own tools. Established class routines of writing in mathematics journals, questioning presenters during whole-class discussion and using information from the boardwork enabled students to build the new mathematics largely through their own thinking, questioning, and discussion.

Table 3 - Comparison of 2016 and 2019 research lessons on fraction size

	2016	2019
Task	Worksheet of 8 same-format problems (with different fractions substituted for $\frac{3}{8}$): "Explain why $\frac{3}{8}$ is bigger, smaller or the same size as benchmarks (0, $\frac{1}{2}$, 1)"	A single problem: "Mr T. thinks that $\frac{1}{2}$ meter is longer than $\frac{4}{8}$ meter. Mr. S thinks that $\frac{4}{8}$ meter is longer than $\frac{1}{2}$ meter. Who do you think is correct? Show your thinking."
Tool and Solution Method	Tool (fraction strips) is handed out by teacher; a number line and a solution method using the fraction strips is demonstrated by a student at the board before students try the task	Students are not given a tool or shown a solution method before trying the task; they draw on tools and ideas from prior lessons to independently develop solution methods
Work on Task	After brief independent work time, students work mainly in groups, sometimes telling each other the answers	Students work to solve the problem independently in their journals (17 minutes) before hearing classmates' ideas
Discussion of Work	Most discussion in table groups. Students exchange work and correct a partner's work; two groups complete a poster summarizing their work and show it to the class	Most discussion is whole-class, focused on three students' work presented on the board in large, legible print that can be read by all students

<p>Presentation of Work</p>	<p>Groups <i>volunteer</i> to present their posters, which are not legible beyond first row; about 7 minutes is spent presenting posters</p>	<p><i>Teacher strategically selects</i> three students whose work is reproduced on board, allowing side-by-side comparison; each student is questioned by classmates in whole-class discussion (20 minutes)</p>
<p>Examples of Student-to-Student Speech</p>	<p>Student speech focuses mainly on logistics and whether answers are correct. “Do you think we can get extra credit if we explain it in words?” “Do you get what we’re supposed to do?” “You can change mine if our answers are different.”</p>	<p>Student speech focuses on the mathematical models and concepts. “Why did you draw different length number lines?” “Why did you show 8/8 on your number line if the problem says 4/8?”</p>
<p>Reflective Mathematics Journals</p>	<p>Students used journals only to write reflections at the end of lesson.</p>	<p>Students used their journals to record the problem, work out a solution, take notes on classmates’ solution methods, record the lesson summary agreed on by the class, and write reflections on what they learned or still wondered about. Several student reflections from the prior lesson are selected by the teacher to introduce each day’s lesson.</p>
<p>Lesson Summary</p>	<p>No student-voiced summary, but students conclude from looking at presented work that some groups used fraction bars and some used number lines</p>	<p>Student-voiced summaries such as “Just because something sounds like it’s longer than something else, it doesn’t mean that it is,” contribute to a class summary on board: “Sometimes two different fractions can be the same length, such as 4/8 and 1/2”</p>

Source: Elaboration by authors

The comparison of the 2016 and 2019 lessons in Table 3 illuminates the shift toward problem-solving—a shift that has been notoriously elusive for U.S. schools, as noted earlier. In

2019, the students solved a challenging problem that allowed them to build a new mathematical idea (equivalent fractions) using their own and classmates' thinking and drawing on tools/models from prior learning; in 2016, students were *given* the tools to complete a series of tasks whose solution method had already been demonstrated. When asked to reflect broadly on the changes in his mathematics instruction between 2015 and 2019, Justin Stoddard said:

One of the things that jumps out is that TTP lessons have naturally elevated the engagement of students. The big ideas are coming from each other, and there's this enhanced level of excitement when it's coming from another student. A couple weeks ago, we were looking at the area of irregular shapes, and one student came up with the idea of adding on to a shape to make a regular shape and then subtracting [the added quantity] at the end, and the class just erupted into "Oh my god." If I had been doing direct instruction and showed them "this is how you do it; now you practice" it would have been nothing. They've really held on to that strategy, and days later they're saying "I really want to try Edwin's idea."

Principles underlying successful school-wide Lesson Study

Not every site that tries to build school-wide Lesson Study is able to do so. We next discuss two principles that underlie the work of successful school-wide Lesson Study sites: support for teachers' intrinsic motivation; and joint teacher-administrator leadership.

Support for teachers' intrinsic motivation

Self-determination theory and research establish that settings that meet three basic human needs—autonomy, social relatedness, and competence—elicit participants' intrinsic motivation and commitment (Deci & Ryan 1985; Ryan & Deci, 2000). Lesson study responds to these three basic needs of educators. For example, educators' own questions and vision shape Lesson Study (autonomy). Team members work together and support each other by exchanging ideas, co-planning, sharing lesson observations, making sense of new ideas, and celebrating the team's work (social relatedness). Cycles of study, planning, observation and reflection build teachers' skill as teachers and observers and their knowledge of teaching, learning and content (competence). Justin Stoddard's description of the changes at School S with school-wide Lesson Study illuminates how both autonomy (choosing the focus of the work) and social relatedness support teachers' work to improve instruction:

I can go to colleagues and say hey I'm struggling with this. If I know that my discourse is too teacher-student-teacher-student...I can go to my colleagues because we're all engaging in the same type of work. I can take advantage of what they've learned....The wealth of knowledge is within each other. We see that and learn from that directly, rather than gambling on some outsider to come in and share information....It is collectively building on the wisdom and experience that we all bring to the school site community.

In talking about the changes that came with school-wide Lesson Study at School O, Hanna Sufrin referred to the “fun” and “depth” and “juicy math conversations” that came with school-wide Lesson Study.

The nature of the conversations and really getting into one another's teacher brains just kicked off a different way of seeing one another as fellow learners. You realize everyone at the table has something big to offer. And that's pretty exciting. Wanting to learn together has to be one of the key levers in actually getting teachers to shift their practices. So once we felt like this was really fun work, that we were inspired by everyone at the table, and we realized we all wanted to grow together, then we're holding each other accountable. So Lesson Study made us see one another as colleagues in a different way.

Sufrin notes that much non-Lesson Study professional development (PD) does not provide sufficient time or an effective design for teachers to really learn together. It feels “scattered: Math PD one week, English the next week; it's really hard to feel focused with so much going on.”

So then you take Lesson Study and you say every week you are going to meet only on this one specific topic within this content area. You drill way down, zoom in. Those conversations were so much more focused than anything we had ever done together as a group of teachers. It was the opportunity to say: this is all we're doing for the next eight weeks, and let's put everything else to the side for the next 2 hours.

Focusing on the whole unit during a Lesson Study cycle, and studying the standards in depth, allowed “really deep conversations about how to break up the objectives of the overall unit.”

People are always amazed when they look at the standards for a unit and realize that though it's 35 lessons, it's actually just, for example, four main Common Core Standards. And so doing that work of choosing for ourselves how to break down those standards, rather than just saying “oh, tomorrow's lesson says the kids have to learn how to do blank.” A big shift that I made was working from the standards rather than working from the curriculum.

Sufrin says that the deep study of the standards, content and the whole unit during a Lesson Study cycle enabled her to shift her planning from a single lesson focus to the whole unit, making it much easier to identify the problem-solving experiences that would enable

students to learn the unit content. Students' responses to successful problem-solving lessons motivated her to keep investing in problem-solving:

Because wow, a great TTP lesson feels so powerful for the kids. It's all over their journals, it's all over their faces. It's so obvious. And every time that we had one, it just made me want to do double the following week. I saw the growth in so many ways. I could see the progress in their journals and every piece of qualitative and quantitative data. Of course, that's what makes you want to keep going with anything in your classroom.

Each site made decisions about Lesson Study scale-up in ways that respected teachers' autonomy, social relatedness and competence. For example, at School S, just five teachers initially volunteered for Lesson Study, so the work began with just one cross-grade team of five teachers. Site leaders did not urge other teachers to participate, but did involve the whole faculty in creating the vision for student success and theory of action, so all teachers would feel invested in the cross-grade team's work on the vision. Over time, the cross-grade team invited the whole faculty into many elements of the work, such as joint study of resources related to the vision and observation of research lessons. By the time the whole faculty was expected to join Lesson Study teams two years later, they felt connected to the work and had seen the positive response of their colleagues who originally volunteered. As Justin Stoddard, a member of the original cross-grade team, later noted:

One of the things that made the progression to whole-school Lesson Study more successful was the gradual transition—we started with the teachers who were passionate and interested in exploring the process...and then they became the team leads as we transitioned to whole school. Rather than coming top-down from administration, when other teachers were hearing from the pilot teachers about why this is such a powerful practice, it's received better.

At School CE, Lesson Study spread slowly over more than five years. Most teachers in the K-5 grades are involved in Lesson Study in some way, but research lessons are typically observed by just a few teachers outside the team, not the whole faculty. Josh Lerner, whose work over time has included lead math teacher and lead bilingual teacher, initially nurtured colleagues' interest in Lesson Study in many ways, including by volunteering to teach in other teachers' classrooms:

I've often volunteered to go and teach a lesson in a classroom if I know a difficult topic is coming up, and I'll treat it a little bit like a research lesson, giving people a plan ahead of time. I'd invite people and try to arrange some substitute coverage, make it easy on them to participate, and then give some rationale for the lesson design, to show them that I put some work into thinking about this and what I think is interesting to observe and think about. We wouldn't always have a post-lesson discussion officially, but I would try to find a time to check in with people afterwards. I definitely remember getting really good feedback from certain people saying that it was a real highlight for them to be able to just go into another classroom and see something that they found interesting and be able to talk about it afterwards. Actually, that was one of the ways that I started getting a few more people involved in research lesson cycles was first by just inviting them to that experience because it's pretty low stakes for them.

When asked about the experiences that led School CE teachers to go deeper with Lesson Study, Josh Lerner mentioned the power of summer institutes, large public research lessons, and celebrations following research lessons, which are “really motivational for people....they’ve built a relationship with each other about a shared interest or practice. Honestly, the *kanpai* (celebrations) are influential; they reinforce the bond that people have made about teaching and their students.”

Teacher-Administrator joint leadership

School-wide Lesson Study requires two different kinds of leadership that are hard to engineer together: *teachers’ leadership* of the day-to-day Lesson Study work and *administrators’ leadership* in protecting and resourcing teachers’ work. Teachers need to lead the work of *doing* Lesson Study, because the work needs to evolve in response to teachers’ emerging needs and questions—something likely to be possible only if teachers hold day-to-day leadership. The School S Principal had tried to introduce school-wide Lesson Study at a prior school, but it did not get taken up by teachers. When asked if he wanted to try to build it at School S, he answered “If teachers buy in.” A Teacher Leader Fellow at School S who was experienced in Lesson Study worked closely with the principal to lay the groundwork to build teachers’ buy-in.

At all three case sites, one or more teacher-leaders were actively involved in leading Lesson Study. School O had a strong tradition of teacher leadership since its 2003 founding. A lead instructional team of six teachers met bi-weekly with the principal to discuss and decide instructional issues. When the mathematics leads on this team became interested in Lesson Study and TTP, it was natural for them to initiate these, since there was already an expectation that teachers would suggest and lead changes in instruction. It required only a modest re-design

of the weekly professional learning time (2 hours on an early-release day) to build in Lesson Study cycles of 6-8 meetings for each grade-band.

At School S, the Teacher Leader Fellow recruited a cross-grade team of volunteers interested in Lesson Study, and this team conducted Lesson Study cycles and experimented with TTP for two years before having each member become a facilitator of a grade-band Lesson Study team. The cross-grade team then became a strategic leadership team for Lesson Study, meeting bi-weekly to plan next steps in Lesson Study work based on their collective knowledge of every team in the school. At School CE, Lesson Study began with a mathematics lead teacher; teacher leaders to facilitate additional teams emerged gradually over time as teachers saw the usefulness of Lesson Study and TTP. Prior to the closure of in-person schools due to the pandemic, the teacher leaders met monthly to coordinate their efforts collectively as a Lesson Study Steering Committee. School CE is now making an effort to reinstate this committee.

Administrators create the organizational space for teachers' leadership to emerge and they ensure teachers' access to high-quality knowledge resources. At all three schools, the principals created and protected the space for teachers to experiment with Teaching Through Problem-solving. This looked different at each site, but included actions such as getting exemptions from district initiatives that would impinge on teachers' time, supporting curriculum waivers for materials to support problem-solving, finding high-quality resources to support teams' study and identifying outside mathematics specialists to comment on draft research plans and to observe and provide final commentary on research lessons.

To summarize, building Lesson Study school-wide required coordinated leadership from teachers and administrators. Teachers were positioned to pick up colleagues' responses to the unfolding Lesson Study work and adjust the work in response to teachers' questions and concerns; site administrators were positioned to protect teachers' time to conduct Lesson Study, to ensure their access to high-quality mathematical and instructional resources and expertise, and to run interference when teachers asked, for example, to use resources beyond the district curriculum.

The principles of intrinsic motivation and integrated teacher-administrator leadership mean that Lesson Study typically took several years or more to spread school-wide. School O had a pre-existing tradition of teacher instructional leadership and instructional autonomy that allowed TTP and school-wide Lesson Study to be integrated into professional learning during

the first year of their work. At School S, the work spread school-wide after two years of work by a single cross-grade Lesson Study team to lay the groundwork. In both cases, teachers and administrators worked together to plan the work and continuously adjust their plans based on teachers' ongoing responses. At School CE, a math lead teacher was hired to facilitate Lesson Study cycles and build capacity among teacher leaders to lead their own cycles, so teachers came to see Lesson Study as a process led by teachers themselves. Over time, teachers came to regard the principal as a visionary school leader who trusted teachers with responsibility for professional learning by prioritizing Lesson Study—an approach that respects teachers' collaboration, autonomy and self-motivation.

Collective efficacy

“Collective efficacy” is typically measured through teachers' responses to items such as “How much can teachers in your school do to produce meaningful student learning?” and agreement with items such as “Teachers in this school have what it takes to educate students here” (Goddard, Hoy & Hoy, 2004). Teachers' collective efficacy is an astonishingly powerful predictor of student achievement—more than three times as powerful as student socioeconomic status, parental involvement, or student motivation and persistence (Hattie, 2017).

Why does teachers' collective efficacy have such a powerful relationship to student achievement? When teachers think they are well-positioned to impact student learning, they probably act in accordance with that perception—working hard to persist against any obstacles that threaten student learning. They may also build strong norms that expect all colleagues to persist in improving student learning.

Collective efficacy is higher among teachers who feel more influence over instruction-related school decisions such as professional learning and curriculum (Goddard, 2002). Lesson study can give teachers greater influence over professional learning and curriculum—for example, as they build a school-wide vision and theory of action for their work, revise instruction to reflect what they learn from content study, and use their own first-hand observation of research lessons—rather than externally imposed mandates—to guide instructional improvement.

Collective efficacy is also enhanced by experiences that allow teachers to see the link between their collective actions and student outcomes (Donohoo, Hattie & Eels, 2018). Lesson

study provides many such experiences. For example, School S Lesson Study teams reported that studying mathematics research enabled them to better anticipate and respond to students' mathematical thinking. School S teachers also noticed positive changes in their own and colleagues' classrooms after testing academic conversation supports related to their school theory of action. Teachers at all three sites observed, during research lessons, the power of new classroom routines such as planning the information to be presented on the board.

Teachers also built efficacy *vicariously*, by seeing colleagues succeed (Goddard et al., 2000). For example, a School S teacher was motivated to use reflective mathematics journals after seeing their power for students during a large public research lesson in District O. Direct and vicarious efficacy experiences both build collective efficacy. Justin Stoddard explains how school-wide Lesson Study enables teachers to join forces around school-wide instructional priorities:

When we're engaging in whole school Lesson Study, the depth of conversation around the mathematics increases. It helps us become more thoughtful about what we want to prioritize and what we want to hold as vital parts of instruction in different units, because we're having these collective conversations about what number sense looks like in Kindergarten through fifth grade. Whole school critical conversations around standards, content, and instruction enable us to see the progression of standards and allow important patterns to emerge about student learning and impactful instructional moves. It helps us understand how much of an impact our own instruction has on students throughout the grades.

Challenges to School-wide Lesson Study and Teaching Through Problem-solving

This section addresses several challenges encountered by the three schools as they worked to build school-wide Lesson Study and Teaching Through Problem-solving.

How to encourage colleagues' participation while respecting their autonomy. Josh Lerner reflects on this dilemma:

One of the main tensions for me at our school has been to what extent to push others to get involved versus to organically spread through relationships to let it grow naturally. Over the six years, we definitely have a growing number of teachers who are doing it or interested in it. But that number has grown slowly over time. I do think that's the best way in the end. Everyone who's gotten more involved has done it through relationships with their coworkers or through genuine interest. And so the experiences for basically everyone have been positive and motivating to continue. But the flip side of that is that it's been incremental. It's been pretty gradual.

Educational administrators often expect immediate results, and many initiatives are discarded if they do not produce results rapidly. So schools may not be given the time to build

participation in ways that respect teacher autonomy. As Figures 2 and 3 reveal, standardized test scores at School S and School O both showed slight dips from baseline (2014-15) to the first project year (2015-16) for most subgroups. An initial performance dip is typical for innovations that require teachers to develop new skills and understandings; how educational administrators respond to the performance dip can play a critical role in a reform's success or failure (Fullan et al., 2005).

Hanna Sufrin, in a subsequent position as an assistant principal at another District O school, used teachers' own curiosity as an entry point for an introductory Lesson Study-TTP experience. A group of teachers interested in bringing out student voice and getting kids to be doing more of the mathematical thinking volunteered to watch and discuss two TTP lessons (LSGAMC, 2020b).

It made the teachers very curious. And there were all these amazing concrete next steps that came out of it—every teacher having a few things they wanted to start doing. For example, teachers loved the idea of the journals. They wanted to bring kids up to the board and write their name when it's their idea so the kids start to realize that their ideas matter. Each teacher brought three or four of those types of strategies back to their room.

Teacher turnover. Although School S has generally had much lower teacher turnover than other District S schools, there was considerable teacher turnover during the pandemic and some teachers new to the school did not see the value of having all teachers work on the same subject (mathematics). Teachers were then given a choice of subject area focus for their Lesson Study work, but the Lesson Study leadership team found that working on different subjects diminished the quality of cross-grade conversations about alignment: “If you are going to build in choice, you need to build in ways to learn from each team's learning.” After a year of working on multiple subject areas, School S returned to a school-wide mathematics focus.

Logistics of scheduling meetings. Another challenge to building and sustaining school-wide Lesson Study is the logistical complexity of bringing together teachers in the same place at the same time for Lesson Study activities. School S and School O are relatively small schools (around 300 students), but School CE is larger. At School CE, the lead math teacher works closely with the principal and school clerks to determine the number of classrooms that can be handled by substitute teachers so that staff members can participate in Lesson Study meetings and research lessons. Leaders make sure to distribute the Lesson Study work across the school year and across grade levels. By the end of each year, a representative cross-section of the school

faculty have participated in research lessons and have gotten a chance to share their learning, either formally or informally, in order to broaden impact.

Need for curriculum updates and a broader Lesson Study ecosystem. In Japan, teachers' learning from Lesson Study ripples throughout the country, since Lesson Study takes place in many different settings, and educators carry their learning across settings (Lewis, 2015; Lewis & Tsuchida, 1997). Classroom teachers, university-based content specialists, district administrators, textbook authors and national policy-makers attend research lessons and transport ideas across settings (Lewis & Takahashi, 2013). For example, elementary teachers who are especially interested in mathematics teaching might take part in a district-based mathematics Lesson Study group, and might attend research lessons at the district level, at university-affiliated lab schools or at meetings of regional and national mathematics education associations, bringing back ideas to the Lesson Study work at their school. Effective approaches reshape textbooks (since the teachers and university-based educators who write textbooks are active in Lesson Study) and reshape the National Course of Study. For example, solar energy was added to the National Course of Study after classroom teachers pioneered it in local Lesson Study, with the goal of adding a more ecologically friendly approach to the curriculum's content on conventional batteries (Lewis & Tsuchida, 1997).

In the U.S., we lack such an ecosystem where approaches like Teaching Through Problem-solving will reshape textbooks once educators see the effectiveness of a new approach. Japanese textbooks are specifically designed for students to build each new procedure or concept using their prior learning, and they provide support for students to learn to make their thinking visible in reflective mathematics journals (LSGAMC 2022d, Watanabe, 2014). When asked about where to begin with Teaching Through Problem-solving, Josh Lerner suggests:

With Teaching Through Problem-solving, I think it's very difficult to do without a good task or curriculum as a starting point. When I wanted to tackle an important topic, such as division in third grade, I chose the unit from the Tokyo Shoseki curriculum to do as a whole unit and then return to the school's adopted curriculum. I tried out Teaching Through Problem-solving (by) participating in research lessons (and by) having a unit I knew I could trust, where I could see the progression of learning. I think that's a really strong way to try problem solving-based teaching—to have something you can base your teaching on, even if it's not your core curriculum.

Hanna Sufrin also noted the initial challenge of designing problems for TTP lessons before she had learned how to study the whole unit and the related Common Core Standards.

Our batting average was about 50% with our TTP problems. One day we would try one and have this absolutely gorgeous TTP lesson where we would feel euphoric after it worked and the learning was so obvious. And then two days later, another story problem would completely fall flat on its face, and we would look back at it and realize that it was not a successful problem to pitch to kids. We always felt pretty alone in that process— just trying things out and seeing what worked. And it's pretty intense to be doing that with real children whose real math learning is at stake.

U.S. curricula vary vastly in their capacity to support student-led problem-solving, and in many districts teachers are expected to follow the district curriculum as written, especially during the early years of a new curriculum adoption, when all teachers are expected to give the new curriculum a chance to work. At School O, the principal had freedom to innovate in the curriculum because he had been in the district for a number of years and was well-respected; also, the mathematics curriculum had been in use for a number of years and had not improved test scores. A School O teacher pointed out that the principal would not have had the freedom to innovate if he had been in the early years of his principalship, “and the average tenure for a principal is only about three years.” School S and several other schools using TTP petitioned for a curriculum waiver to use Japanese materials; their growth in test scores, the low teacher turnover rate and teachers’ advocacy (through the Teacher Leader Fellow network) probably contributed to a favorable response to the waiver request and to the district’s decision to study the work at these schools.

Surviving changes in school leadership. Another challenge is maintaining Lesson Study through changes in school leadership. When the School S principal decided to leave the district, the Teacher Leader Fellow who had been co-leading the school-wide spread of Lesson Study stepped up to become the interim principal and then principal (after obtaining the needed credential). Despite the Teacher Leader Fellow’s reluctance to leave the classroom, she took on the principalship in order to ensure that the progress at the school would not be reversed by a change in leadership. At several other sites, school-wide Lesson Study did not survive a change in principals.

A Teacher-Leader Network as a resource for school-wide Lesson Study. The Teacher Leader Fellowship in District S creates a network of Lesson Study Teacher Leader Fellows that is somewhat insulated from changes at individual schools. The District’s Office of Professional Learning and Leadership (OPLL) selects Teacher Leader Fellows from experienced teacher-applicants who want to develop expertise as Lesson Study facilitators while remaining classroom teachers at their sites. These Teacher Leader Fellows (TLFs) receive a

salary bonus, extra substitute hours, online Lesson Study resources and mentoring. TLFs also meet monthly as a Network to share emerging learnings from their site-based work and to discuss challenges. The funds for the Teacher Leader Fellowships come from a special voter-approved initiative designed to retain experienced teachers in the district. Because the funds are voter-approved and cannot generally be used for other purposes, they are somewhat insulated from budget pressures.

The Teacher Leader Network seems to make school-wide Lesson Study somewhat more resilient in District S than in the other two districts, since teachers have access to support and resources outside their school. Teachers have collaborated in cross-site public research lessons, worked together to petition for a curriculum waiver, and worked together to bring additional schools into the work.

Teaching Through Problem-solving resources and expertise. Teachers from all three schools mentioned outside resources and partners as valuable supports to their work. The partners included both Japanese and U.S. educators who were knowledgeable about Lesson Study and the in-depth content study that it entails, as well as the vision of TTP that students will build the new mathematics in the curriculum. Support included expert final commentators for research lessons, partnering with an outside facilitator for a Lesson Study cycle, and high-quality curriculum resources.

Summary

This chapter briefly describes school-wide Lesson Study, an approach that is ubiquitous in Japanese elementary schools but rare in the U.S. We look at three U.S. sites that have used school-wide Lesson Study in conjunction with Teaching Through Problem-solving. Growth in mathematics learning at the school-wide Lesson Study sites is substantially greater than in other district schools, largely eliminating the learning gaps for historically discriminated groups. (Standardized tests allow in-depth assessment of mathematics at only two of the three sites.)

Two principles seem to characterize successful school-wide Lesson Study development: (1) attention to the conditions that support teachers' intrinsic motivation; and (2) integrated teacher-administrator leadership. The cases also suggest the power of combining school-wide Lesson Study—a powerful set of routines for teachers' development of professional knowledge—and Teaching Through Problem-solving – a powerful set of routines for student mathematics

learning. Finally, the cases surface a number of challenges in building and sustaining school-wide Lesson Study and transforming mathematics instruction. These include building school-wide involvement while respecting teachers' autonomy; surviving changes in school leadership; and refining curriculum to support problem-solving.

References

- Banilower, E. R., Smith, P. S., Malzahn, K. A., Plumley, C. L., Gordon, E. M., & Hayes, M. L. (2018). **Report of the 2018 NSSME+**. Horizon Research, Inc.
- California Department of Education (2023). **Smarter Balanced Assessment System** <https://www.cde.ca.gov/ta/tg/sa/LSGAMC> (Lesson Study Group at Mills College) (2022a).
- California Department of Education (2023). **Develop a Research Theme**. <https://lessonresearch.net/study-step/develop-research-theme/>
- Deci, E., & Ryan, R. (1985). **Intrinsic motivation and self-determination in human behavior**. Plenum.
- Donohoo, Hattie, J. & Eells, R. (2018). **The power of collective efficacy**. *Educational Leadership*, **75**(6), 40-44.
- Fullan, M., Cuttress, C., & Kilcher, A. (2005). 8 Forces for leaders of change. *Journal of Staff Development*, **26**(4). 54-64. <https://michaelfullan.ca/wp-content/uploads/2016/06/13396067650.pdf>
- Fujii, T. (2019). Designing and adapting tasks in lesson planning: A critical process of Lesson Study. In R. Huang, A. Takahashi, & J. DaPonte (Eds.), **Theory and Practice of Lesson Study in Mathematics: An International Perspective** (pp. 681–704). Springer.
- Goddard, R. D. (2002). Collective Efficacy and School Organization: A Multilevel Analysis of Teacher Influence in Schools. *Theory and Research in Educational Administration*, **1**, 169-184.
- Goddard, R. D., Hoy, W. K., & Woolfolk Hoy, A. (2000). Collective teacher efficacy: Its meaning, measure, and impact on student achievement. *American Educational Research Journal*, **37**(2), 479–507.
- Hattie, J. (2017). **Visible learning for mathematics, grades K-12: What works best to optimize student learning**. Corwin Mathematics.
- LSGAMC (Lesson Study Group at Mills College) (2022a). **Develop a Research Theme**. <https://lessonresearch.net/study-step/develop-research-theme/>
- LSGAMC (Lesson Study Group at Mills College) (2022b). **Teaching Through Problem-solving**. <https://lessonresearch.net/teaching-problem-solving/tp-in-action/>

- Lesson Study Group at Mills College (2022c), **Teaching Through Problem-solving: Overview**. <https://lessonresearch.net/teaching-problem-solving/overview/>
- Lesson Study Group at Mills College (2022d), **Teaching Through Problem-solving: Journals**. <https://lessonresearch.net/teaching-problem-solving/journals/>
- Lewis, C. (2015). What is improvement science? Do we need it in education? **Educational Researcher**, **44**(1), 54–61. <https://doi.org/10.3102/0013189X15570388>
- Lewis, C., & Takahashi, A. (2013). Facilitating curriculum reforms through Lesson Study. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, **2**(3).
- Lewis, C., & Tsuchida, I. (1997). Planned educational change in Japan: The case of elementary science instruction. **Journal of Educational Policy**, **12**(5), 313–331.
- McDougal, T., & Takahashi, A. (2014). Teaching mathematics through problem solving. **Independent Teacher**, **Fall**. <http://www.nais.org/Magazines-Newsletters/ITMagazine/Pages/Teaching-Mathematics-Through-Problem-Solving.aspx>
- NCTM. (1980). **An agenda for action**. National Council of Teachers of Mathematics.
- NGACBP & CCSSO (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers). (2010). **Common Core State Standards for Mathematics**. National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers.
- NIER (National Institute for Educational Policy Research) [Kokuritsu Kyouiku Seisaku Kenkyuujo]. (2011). **Report of Survey Research on Improvement of Teacher Quality [Kyouin no Shitsu no Koujou ni Kansuru Chosa Kenkyuu]**. Kokuritsu Kyouiku Seisaku Kenkyuujo.
- Takahashi, A. (2021). **Teaching Mathematics Through Problem-solving: A Pedagogical Approach from Japan**. Routledge.
- Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. **American Psychologist**, **55**(1), 68.
- Watanabe, T. (2014). Transformation of Japanese Elementary Mathematics Textbooks: 1958–2012. In Y. Li, E. A. Silver, & S. Li (Eds.), **Transforming Mathematics Instruction** (pp. 199–215). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-04993-9_12

Autores

Catherine C. Lewis

cclewis150@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-0557-0876>

Mills College at Northeastern University

Oakland, CA

Justin Stoddard

stoddardj@sfusd.edu

<https://orcid.org/0009-0001-1492-5974>

John Muir Elementary School (SFUSD)

San Francisco, CA

Joshua D. Lerner

lerner.joshua@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0006-4319-461X>

Helen C. Peirce School of International Studies, Chicago Public Schools (CPS)

Chicago, IL

Hanna A. Sufrin

hannasufrin@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0005-3148-4241>

Oakland Unified School District (OUSD)

Oakland, CA

How to cite the article:

LEWIS C. C.; STODARD, J.; LERNER, J. D.; SUFRIN, H. A. The promise and challenge of school-wide Lesson Study in the United States. **Revista Paradigma**, Vol. XLIV, Edición Temática Estudio de Clases: Contribuciones de la educación japonesa en diferentes países ... mayo de 2023 / 80 – 109.

DOI: <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p80-109.id1413>

Lecciones compartidas: un modelo chileno de Lesson Study aplicado con profesores de primaria y con formadoras de profesores de primaria que enseñaran matemáticas

Soledad Estrella

soledad.estrella@pucv.cl

<https://orcid.org/0000-0002-4567-2914>

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile (PUCV)

Valparaíso, Chile.

Raimundo Olfos

raimundo.olfos@pucv.cl

<https://orcid.org/0000-0002-9886-4282>

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile (PUCV)

Valparaíso, Chile.

Recibido: 15/03/2023

Aceito: 02/04/2023

Resumen

Se presenta un modelo chileno de Lesson Study de ocho sesiones con dos ciclos, cuyo propósito es fomentar la colaboración profesional entre docentes en la planificación, implementación, observación y reflexión de las lecciones que se investigan. Aunque se reconocen las fortalezas de esta metodología, existe escasa información sobre cómo perciben la efectividad del proceso, profesores de primaria en servicio y formadores de profesores de primaria. Se analiza una encuesta de 16 ítems sobre la percepción de los profesores participantes acerca de la efectividad del proceso, esto es, de la utilidad y relevancia del Lesson Study de matemáticas. De los dos grupos de Lesson Study, uno estuvo conformado por 4 profesores de primaria en servicio y 6 facilitadores; el otro grupo estuvo conformado por 5 formadores de profesores y 4 facilitadores. Los resultados de la encuesta, complementados con las reflexiones docentes, indican que, en ambos grupos, el modelo de Lesson Study de ocho sesiones fue altamente efectivo para fomentar el trabajo colaborativo entre los participantes, quienes manifestaron haber realizado mayores observaciones y reflexiones críticas sobre su práctica docente y el pensamiento de los estudiantes para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar.

Palabras clave: Estudio de Clases. Desarrollo profesional docente. Modelo de Estudio de Clases. Creencias de los profesores.

Shared lessons: a Chilean Lesson Study model applied with primary school teachers and with primary teacher educators who will teach mathematics

Abstract

A Chilean model of a Lesson Study of eight sessions with two cycles is presented, whose purpose is to promote professional collaboration among teachers in the planning, implementation, observation, and reflection of the lessons being investigated. Although the strengths of this methodology are recognized, there is little information on how in-service

primary school teachers and primary school teacher educators perceive the effectiveness of the process. A 16-item survey on the perception of the participating teachers about the effectiveness of the process, that is, the usefulness and relevance of the mathematics Lesson Study, is analyzed. Of the two Lesson Study groups, one consisted of 4 in-service primary school teachers and 6 facilitators; the other group was made up of 5 mathematics teacher educators and 4 facilitators. The results of the survey, complemented with the teacher reflections, indicate that, in both groups, the eight-session Lesson Study model was highly effective in fostering collaborative work among the participants, who stated that they had made more observations and critical reflections on their teaching practice and student thinking to improve the teaching and learning process of school mathematics.

Keywords: Lesson Study. Teacher professional development. Lesson Study model. Teachers' beliefs.

Aulas compartilhadas: um modelo chileno de Lesson Study aplicado com professores primários e com educadores de professores primários que ensinarão matemática

Resumo

Apresenta-se um modelo chileno de Estudo de Lições de oito sessões com dois ciclos, cujo objetivo é promover a colaboração profissional entre os professores no planejamento, implementação, observação e reflexão das aulas investigadas. Embora os pontos fortes dessa metodologia sejam reconhecidos, há pouca informação sobre como os professores do ensino fundamental em serviço e os formadores de professores do ensino fundamental percebem a eficácia do processo. É analisada uma pesquisa de 16 itens sobre a percepção dos professores participantes sobre a eficácia do processo, ou seja, a utilidade e relevância do Estudo da Aula de Matemática. Dos dois grupos de Estudo de Aula, um consistia em 4 professores primários em serviço e 6 facilitadores; o outro grupo era composto por 5 formadores de professores e 4 facilitadores. Os resultados da pesquisa, complementados com as reflexões dos professores, indicam que, em ambos os grupos, o modelo Lesson Study de oito sessões foi altamente eficaz para promover o trabalho colaborativo entre os participantes, que afirmaram ter feito mais observações e reflexões críticas sobre suas prática de ensino e pensamento do aluno para melhorar o processo de ensino e aprendizagem da matemática escolar.

Palavras-chave: Lesson Study. Desenvolvimento profissional docente. Modelo de Lesson Study. Crenças dos professores.

Introducción

Lesson Study es la principal forma de desarrollo profesional docente en Japón, brindando a los docentes oportunidades para mejorar sus habilidades y prácticas de enseñanza a través de la reflexión colaborativa sobre la propia práctica. Esta metodología se utiliza en la educación para mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje, y se basa en la colaboración de los profesores para planificar, implementar, observar y analizar la enseñanza, identificando las fortalezas y debilidades del proceso de enseñanza-aprendizaje.

En el año 2006, se produjo uno de los primeros acercamientos al Lesson Study en Chile, cuando un grupo de profesores de universidades chilenas fue invitado a Japón para conocer esta práctica profesional (Olfos, Isoda y Estrella, 2020). Como resultado de esta experiencia, se estableció una colaboración entre la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso en Chile y la Universidad de Tsukuba en Japón. Esta colaboración culminó en una primera etapa con la publicación de tres libros en español sobre el Lesson Study (Isoda, Arcavi y Mena, 2007; Isoda y Olfos, 2009; Isoda y Olfos, 2011) y la fundación del Grupo de Lesson Study del Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, GEC PUCV.

El desarrollo y la implementación de Lesson Study en Chile, ha sido analizado tanto en su potencial como en los desafíos que enfrenta (Estrella, Mena-Lorca y Olfos, 2018). Estos autores señalan que Lesson Study se ha venido utilizando en Chile hace más de 15 años -desde 2007-, principalmente en escuelas públicas y en el contexto de la formación inicial y continua de profesores, y ha tenido el apoyo sostenido del académico Dr. Masami Isoda de la Universidad de Tsukuba, Japón. A pesar de los avances en su aplicación en Chile, existen desafíos como la falta de reconocimiento institucional y la necesidad de formación de equipos docentes estables en el tiempo, como también, la necesidad de investigaciones más profundas sobre el impacto de Lesson Study en el aprendizaje de los estudiantes de todos los niveles y de los docentes participantes, y el mejoramiento de la calidad de la enseñanza de las matemáticas en el aula de primaria.

En Olfos, Isoda y Estrella (2020) se informa que las experiencias chilenas de Lesson Study -como una herramienta poderosa para mejorar la enseñanza de las matemáticas-, ha logrado el incipiente y progresivo compromiso de algunas instituciones gubernamentales dadas las fortalezas demostradas de Lesson Study, junto a una mayor colaboración dialógica entre profesores e investigadores.

Aspectos relevantes en la introducción de LS en Chile

A continuación, resumimos algunos hitos en la introducción de LS en Chile, principalmente a partir del capítulo sobre LS escrito por Estrella, Mena y Olfos (2018) y su homólogo (Olfos, Isoda y Estrella, 2020).

Como se señalaba, en 2006, comenzó el Estudio de Clases en Chile, un proyecto para mejorar la calidad de la educación en el país. Como parte de su interés en unirse a la OCDE y mejorar la educación, Chile solicitó a la organización un estudio exhaustivo sobre su realidad

educativa, cuyos resultados fueron entregados en un Informe oficial (OCDE, 2004). El informe identificó varios problemas, incluyendo la formación inicial docente excesivamente general, la falta de conexión entre los aspectos disciplinarios y pedagógicos, la inducción de profesores noveles y la escasez de investigación educacional. Además, señaló que la enseñanza de matemáticas y ciencias en el primer ciclo de educación secundaria se realizaba por profesores que desconocían las materias.

En el Global Forum on Education de 2005, celebrado en Santiago de Chile, los representantes de los ministerios de educación de Japón (MEXT) y de Chile (MINEDUC) se reunieron y firmaron un convenio de colaboración para abordar los temas identificados por el citado informe de la OCDE. El Programa de Colaboración "Mejora de la educación matemática en Chile, con el apoyo de Japón" se estableció como resultado, y permitió a tres grupos de diez profesores de matemáticas de once universidades, involucrados en la formación inicial y continua de profesores, asistir a cursos intensivos de capacitación en las metodologías japonesas del Lesson Study y en el enfoque abierto en la resolución de problemas, así como en otros aspectos del sistema educativo de Japón.

Financiado por JICA [Japan International Cooperation Agency], el programa se llevó a cabo en el Center for Research on International Collaboration in Educational Development (CRICED) de la Universidad de Tsukuba, bajo el liderazgo del Dr. Masami Isoda. Los cursos incluyeron la observación de clases en diferentes niveles, la participación en clases públicas y ciclos de Lesson Study, visitas a centros de formación continua de profesores, editoriales de textos de estudio y fabricantes de material de apoyo a la enseñanza, así como reuniones con representantes de diversas áreas del sistema educativo japonés y visita a un centro de desarrollo profesional de docentes.

A medida que los participantes regresaban a Chile, llevaron a cabo diversas iniciativas relacionadas con el Lesson Study, incluyendo su introducción en los términos de referencia para los postítulos financiados por el MINEDUC. Los académicos participantes también diseñaron programas para sus respectivas universidades de acuerdo con los términos de referencia aprendidos en Japón. Además, en cada año del Programa y en el siguiente visitaron Chile, además del Dr. Isoda, profesores expertos y de renombre del Japón, quienes dieron clases públicas a niños y jóvenes chilenos en las sedes de las universidades de los académicos participantes, a lo largo del país.

Por su parte, el CPEIP desarrolló dos iniciativas adicionales: la primera, fue una serie de talleres comunales para profesores de primaria, enfocados en lenguaje, ciencias, historia y matemáticas. La segunda fue un Programa de aprendizaje para toda la vida, que se ocupaba de la formación de profesores líderes en servicio, quienes harían talleres para profesores de primer ciclo de enseñanza primaria y de preescolar en sus establecimientos educacionales. Los talleres estaban destinados a diseñar, realizar, observar y analizar una clase siguiendo la metodología de Lesson Study. Cerca de 300 escuelas declaradas emergentes trabajaron estas metodologías.

Además, durante cuatro años se sucedieron al menos un par de reuniones anuales de evaluación y monitoreo del Programa de colaboración, con participación del encargado del Programa por CRICED, Dr. Isoda, y diversas personalidades de JICA. Hubo un cierre formal del Programa, en septiembre de 2009, ceremonia a la que asistieron diversas personalidades relevantes del ámbito educativo y autoridades del gobierno. La evaluación interna del Programa fue comunicada y comentada durante la reunión de clausura. Tanto el CPEIP como las universidades valoraron la contribución del Programa a la educación primaria de matemáticas en Chile.

Hubo además una evaluación del Programa realizada por una organización externa, de resultados igualmente positivos. Las recomendaciones de esta evaluación tenían como objetivo dar continuidad a las iniciativas de Lesson Study en Chile y mantener intercambios académicos con la Universidad de Tsukuba. Se proponía que el CPEIP asumiera más liderazgo y se aprovecharan instancias tales como talleres comunales, la red de “maestros de maestros” (es decir, profesores líderes) que había creado el MINEDUC, y su plataforma de e-learning, para ampliar el LS en el país. A las universidades se les recomendaba emplear sistemáticamente LS y el enfoque abierto en la resolución de problemas en la formación inicial y continua de profesores, establecer acuerdos con las corporaciones municipales.

En el ámbito del desarrollo continuo de metodologías japonesas y de teorías locales, dos instituciones se destacan: la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV) y la Universidad Católica del Maule, ambas ubicadas fuera de la capital. Una característica común de estas instituciones es que, en el momento en que comenzó el Programa de colaboración con Japón, eran las únicas en el país que ofrecían, y siguen ofreciendo, programas de posgrado en Didáctica de la Matemática.

Los investigadores del Instituto de Matemáticas de la PUCV notaron que tanto la Ingeniería Didáctica (ID) como algunas teorías de la Didáctica de la Matemática cuentan con un dispositivo de vigilancia epistémica, el cual protege que el estudio se realice sin caer en especulaciones infundadas. Se puede notar fácilmente que LS tiene un dispositivo similar, con etapas similares a las de la ID, cuya diferencia más notable es que el LS combina la investigación y el desarrollo profesional en las mismas escuelas. Es en esta perspectiva de integración y estudio que la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV) ha participado en actividades de difusión y desarrollo del LS, en varias comunidades de aprendizaje.

Para abordar el desafío de mejorar el rendimiento y la capacidad de resolución de problemas matemáticos de los estudiantes del país, la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación de Chile, convocó investigadoras de la Universidad de Chile y de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. En este último caso, un equipo del Grupo de Estudio de Clases del Instituto de Matemáticas de la PUCV, liderado por la investigadora Soledad Estrella, fue el encargado de elaborar el texto escolar de matemática del grado 3 para el año 2021, acorde a los objetivos de aprendizaje del currículo nacional. Actualmente, los textos escolares de matemáticas que distribuye el Ministerio de Educación para primaria, grados 1 a 6, son de autoría del profesor Masami Isoda. Durante la introducción de los libros a todo el país, el CPEIP abrió postulaciones a cursos en línea ofrecidos a todos los docentes para impulsar la enseñanza de la matemática y promover las ideas y uso de los textos de matemática de la serie denominada “Sumo Primero”. Dichos textos se caracterizan por el enfoque de resolución de problemas, con situaciones provenientes de profundos Lesson Study de larga data, y tienen un foco en el desarrollo del pensamiento matemático de los niños y niñas.

A continuación, se presenta el modelo de Lesson Study desarrollado por el GEC PUCV (Estrella et al., 2022a), el cual consta de ocho sesiones y dos ciclos. Además, se exponen ideas sobre cómo aplicar Lesson Study para la enseñanza de las matemáticas y la estadística en Chile. El objetivo es demostrar cómo esta metodología de desarrollo profesional es percibida para la efectiva mejora de la calidad de la enseñanza y el aprendizaje en estas disciplinas, tanto en grupos docentes de Lesson Study en escuelas de preescolar a primaria, como en grupos de formadoras de futuros profesores de matemáticas en universidades.

Lesson Study

Lesson Study (LS) es una metodología de desarrollo profesional que se centra en la colaboración y el aprendizaje de los profesores para mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes, la que tiene una creciente popularidad en todo el mundo. Según Isoda y Olfos (2009; 2014), LS se enfoca en la resolución de problemas como medio para desarrollar habilidades matemáticas y la comprensión de los estudiantes. Además, LS se basa en la observación y reflexión de la práctica docente, con el objetivo de mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje (Lewis, 2002). Los objetivos de LS incluyen mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes, desarrollar habilidades y conocimientos de los profesores en la enseñanza de las matemáticas, fomentar la colaboración y el trabajo en equipo entre los profesores, y promover la reflexión y el aprendizaje continuo en la práctica docente (Inprasitha et al., 2015; Isoda et al., 2007). El punto central de LS para Lewis, Perry y Murata (2006) es la observación de lecciones en vivo en el aula por parte de un grupo de profesores que recopilan datos sobre la enseñanza y el aprendizaje y los analizan colectivamente.

En particular, se ha encontrado que la metodología de Lesson Study: fomenta la colaboración entre los docentes y ayuda a desarrollar una cultura de trabajo en equipo, en que los profesores trabajan unidos para planificar, observar y analizar lecciones (Fernandez y Yoshida, 2004; Isoda y Olfos, 2009; Olfos, Estrella y Morales, 2015); promueve la reflexión crítica sobre la práctica docente, fomentando la mejora continua (Estrella, Mena y Olfos, 2018), al diseñar, implementar, evaluar y rediseñar propuestas de enseñanza; mejora la calidad de la enseñanza y el aprendizaje al centrarse en las necesidades de los estudiantes, por ejemplo, el Lesson Study se enfoca en la resolución de problemas como medio para desarrollar habilidades matemáticas y la comprensión de los estudiantes (Isoda y Olfos, 2009, 2012); ayuda a los profesores a desarrollar su capacidad de observación y análisis crítico de la enseñanza (Estrella, Vidal y Morales, 2022), al desarrollar habilidades y conocimientos en los profesores sobre la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje en sus estudiantes; fortalece la relación entre los maestros y los estudiantes al centrarse en el aprendizaje efectivo (Olfos, Isoda y Estrella, 2021); y también, LS establece un puente dialógico entre la teoría y la práctica, en que los docentes se convierten en actores clave (Kieran et al., 2013).

Modelo de Lesson Study de matemáticas

GEC PUCV ha tenido como objetivo principal reunir a grupos de docentes para que desarrollen su profesionalidad en colaboración y consoliden su conocimiento matemático a enseñar a través del enfoque de resolución de problemas, considerando aspectos de género y de la socioemocionalidad. La mayoría de los Estudios de Clases promovidos por GEC PUCV se han enfocado en primaria, puesto que es reconocido como desafío la falta de una formación profunda de los profesores en los tempranos años escolares en materias específicas, puesto que ellos son los responsables de enseñar todas las disciplinas.

En el ámbito de las matemáticas, los profesores trabajan juntos en la planificación de las lecciones, en la discusión de estrategias de enseñanza y evalúan las implementaciones de tales planes. Asimismo, comparten sus reflexiones, experiencias y conocimientos para mejorar la calidad de la enseñanza de temas específicos de una disciplina o de un objetivo común.

La reflexión compartida entre profesores es fundamental, pues permite la creación de una cultura comprometida con la mejora continua, en la que los profesores trabajan conjuntamente para identificar y abordar los desafíos que enfrentan en su enseñanza. Como se ha mencionado anteriormente, se espera que la participación de los docentes en un proceso de investigación colaborativa, como el LS, produzca cambios en la percepción que tienen del proceso, al captar, organizar, interpretar y dar sentido de forma activa a la información que reciben.

El modelo de LS que se presenta, involucra acciones de los estudiantes y de los profesores en la resolución de problemas (matemáticos o estadísticos), atendiendo de manera simultánea a propósitos tanto cognitivos como afectivos (Isoda y Olfos, 2009; Morales, 2021). En Estrella Vidal-Szabó y Morales (2022), se considera que una lección convencional en este enfoque consta de cinco momentos en el aula escolar: activación de los conocimientos previos de los estudiantes, presentación del problema, resolución del problema por parte de los estudiantes, discusión y comparación de los métodos utilizados por los estudiantes, y resumen del aprendizaje obtenido. Estos momentos permiten que los estudiantes reflexionen, compartan sus ideas, debatan y disfruten del proceso de construcción de nuevos conocimientos sobre la base de los ya adquiridos.

Asimismo, el modelo propuesto es útil como herramienta analítica de la enseñanza llevada a cabo por profesores que experimentan un LS (ver ejemplo en Figura 1). Durante todo el proceso, los docentes se involucran en actividades profesionales colaborativas que dan forma

a construcciones teóricas locales acerca de la enseñanza, con el fin de anticipar rutas de aprendizaje que pueden experimentar los estudiantes durante la lección; la acción de implementación de las construcciones teóricas, provistas en un plan de la lección, favorece la validación de hipótesis y la reformulación de las mismas, mediante las observación y las reflexiones acerca de la enseñanza y la evaluación del aprendizaje, involucrando así a los docentes en ciclos de actividades profesionales específicas durante el LS.

Figura 1 - Pasos de un ciclo de Lesson Study

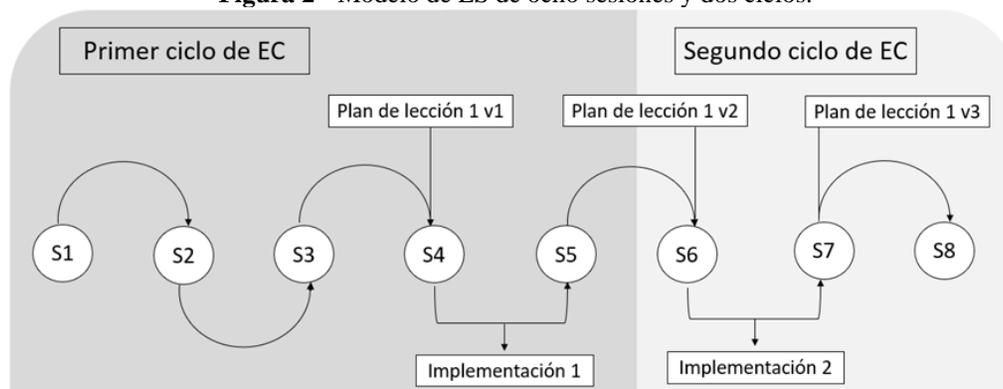


Fuente: Adaptado para LS de Kínder desde Bruce y Ladky, 2011.

El modelo chileno de LS se compone de ocho sesiones con dos ciclos (Estrella et al., 2022a, 2022b). Desde Figura 2, se esquematizan las primeras sesiones, que inician con experiencias que viven los participantes del GEC sobre el tema, permitiendo activar el estudio del currículo y el razonamiento de los estudiantes sobre ese tema específico; en tres sesiones se planifica en profundidad una lección, estableciendo una meta de aprendizaje para los estudiantes y anticipándose a sus respuestas y dificultades; tras la cuarta sesión se implementa la lección investigada mientras otros miembros del grupo observan y recopilan datos en el aula acerca de

las respuestas de los estudiantes y sus procesos de razonamiento; en la quinta sesión se analiza, interpreta y discute la efectividad de la lección mediante el análisis de las respuestas de los estudiantes y los resultados de la enseñanza propuesta; el ciclo se repite con una nueva implementación entre las sesiones 6 y 7; se finaliza en la sesión 8, con una mejora final del plan de la lección investigada y se profundiza en las reflexiones y el aprendizaje profesional obtenido (Estrella et al., 2022a).

Figura 2 - Modelo de LS de ocho sesiones y dos ciclos.



Fuente: Elaboración propia.

Como señalan Shimizu y Kang (2022), desarrollar una mejor comprensión del mecanismo del crecimiento profesional de los profesores participantes en un LS es clave para teorizarlo como modelo para el aprendizaje profesional. La presente investigación que se reporta se centró en la percepción y reflexiones finales acerca de la efectividad del proceso de LS de los docentes, de primaria y de universidad, que participaron en un LS. Por tanto, nos preguntamos ¿Cuál es la percepción la efectividad del proceso de LS de los docentes participantes en un grupo de Lesson Study?

Metodología

Se empleó un enfoque cualitativo interpretativo para analizar la percepción de los profesores acerca de la efectividad del proceso de LS. Se estudian dos casos independientes con el fin de compararlos y analizar las similitudes y diferencias entre ellos.

Aunque la variable de efectividad del proceso implica varios procesos, el objetivo de esta variable es medir la interacción entre los diferentes procesos que contribuyen a la efectividad del proceso educativo, en el sentido de Akiba et al. (2019).

Cada tema a ser estudiado en la lección de los grupos de LS que se presentan, fueron proporcionados por los investigadores a los docentes participantes debido a proyectos de investigación específicos que lideran. Los temas para estos dos LS, fueron: la inferencia estadística informal (en primaria) y el sentido numérico (en formación inicial docente), ambos conocimientos eran nuevos para los participantes.

Informantes

La investigación se enfoca en dos casos de estudio para ilustrar el modelo de Lesson Study de GEC PUCV. Participaron dos grupos informantes clave, un grupo de nivel escolar (reportado en Estrella et al. 2022a), y el otro de nivel universitario (reportado en Reyes-Bravo y Estrella, *submitido*). Además, el estudio contó con la colaboración de facilitadores que poseen vasta experiencia en LS y son expertos en educación matemática. Estos grupos diversos de informantes permiten obtener diferentes perspectivas y enriquecer la comprensión del fenómeno estudiado.

En la Tabla 1 se entregan detalles de los participantes de los grupos de Lesson Study.

Tabla 1 - Características relevantes de los dos casos que se informan

Grupo de LS	Participantes del LS	Contexto
Caso 1: lección online para estudiantes de primaria de escuela pública sobre inferencia estadística informal	-Tres profesores de educación primaria y una educadora diferencial -Seis facilitadores con experiencia en LS	Cuatro profesores de primaria se desempeñan en una escuela de Viña del Mar que enseñan grados 1-4
Caso 2: lección presencial para futuros profesores en formación universitaria sobre división entre números naturales que desarrolla el sentido numérico	-Cinco formadoras de profesores de primaria -Dos facilitadoras expertas en Didáctica de la Matemática y con experiencia en LS	Cinco mujeres formadoras de profesores de primaria provenientes de distintas universidades ubicadas en diferentes regiones del país

Fuente: Elaboración propia, con base en datos de la investigación.

Además, en ambos casos, se obtuvieron todos los consentimientos informados de los participantes en las lecciones implementadas y del equipo docente de cada GEC.

Instrumento

Los 16 ítems de la encuesta provienen de una encuesta compuesta por 32 ítems (ver Anexo), que fueron propuestos por Akira et al. (2019), la cual se aplicó en formato pre y postest, a través de Google Forms, a profesores y formadoras que participaron en un LS. Todos los ítems de la encuesta fueron traducidos del inglés y sometidos a un proceso de validación por tres jueces expertos (uno de los autores y otros dos externos) para asegurar su fidelidad a los ítems originales, incluida una aplicación piloto.

Específicamente, los ítems solicitaban a los encuestados que valoraran sus actividades de aprendizaje en relación con la efectividad del proceso educativo. Los 16 ítems provienen de una escala original de 18 ítems con un índice de confiabilidad alfa de .93; los ítems se evalúan en una escala tipo Likert de 4 puntos: “Para nada”, “En pequeña medida”, “En bastante medida”, “En gran medida”.

Los ítems permitieron evaluar aspectos como el proceso de estudio, la planificación de lecciones y el cuestionamiento; la elección de un tema; las discusiones sobre el pensamiento y la progresión de los estudiantes; la selección de una tarea de resolución de problemas y la anticipación de las respuestas de los estudiantes; el aprendizaje de los estudiantes y la efectividad de la enseñanza, sin tener en cuenta los ítems relacionados con la elaboración de un plan de recogida de datos durante una lección de investigación y las discusiones de datos de los estudiantes.

Resultados y Discusión

Para estudiar los casos 1 y 2 – que ilustran la operacionalización del modelo de Lesson Study GEC PUCV– se tabularon y graficaron las respuestas obtenidas a los 16 ítems, las que se complementaron con las reflexiones expresadas por los docentes en la sesión 8. En concordancia con Shimizu y Kang (2022) quienes señalan que tras un proceso de LS, las reflexiones escritas de los docentes ofrecen una perspectiva a los investigadores sobre cómo se aborda la discusión posterior a la lección y cómo esto puede influir en el crecimiento profesional del docente.

Caso 1: 4 Profesoras De Primaria

Como se observa en la Figura 3, al inicio del proceso, tres de los profesores mostraban percepciones en los niveles más bajos de la escala, “pequeña medida” y “para nada”. Tras el

proceso de LS vivido, la tendencia positiva de las percepciones dadas en el postest llega a los niveles más altos de la escala.

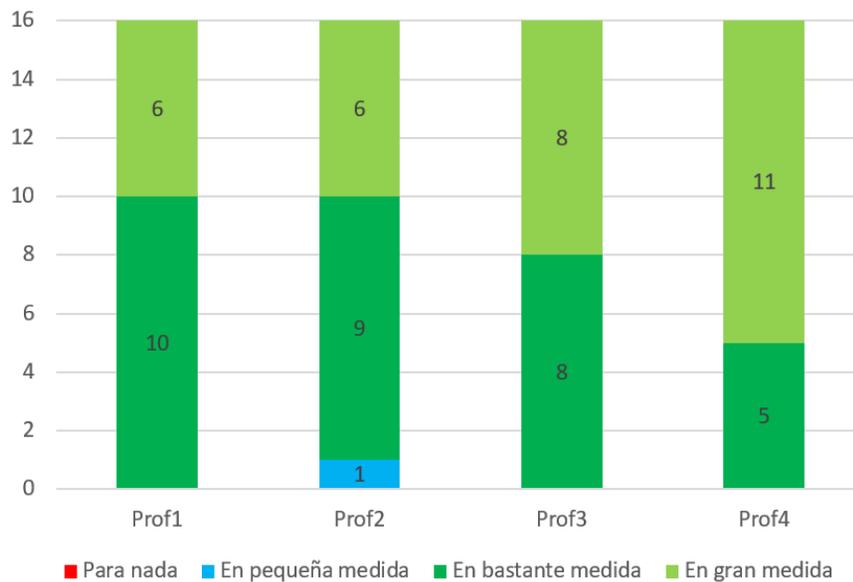
Prof1, con experiencia en LS, presenta una disminución en su percepción de la efectividad del proceso en 12 ítems, inicialmente tenía una percepción alta del proceso, la cual mantuvo en casi un 40% de ellos y el restante lo percibió como “en bastante medida”.

El docente etiquetado como Prof2, fue el único que en el postest percibió la efectividad en el nivel “en pequeña medida” para el ítem “Elegimos una tarea de resolución de problemas que revelara los conceptos erróneos comunes de los estudiantes”. Lo cual es concordante con lo señalado anteriormente, puesto que fueron los investigadores quienes proporcionaron los temas a ser estudiados en cada lección.

El docente Prof4 manifestó que el proceso “fue un proceso enriquecedor en cuanto conocimientos y prácticas pedagógicas”.

Figura 3 - Percepción de los profesores de primaria sobre la efectividad del proceso de LS

Percepción de la efectividad del proceso de Estudio de Clases por cuatro profesores de primaria en servicio (16 ítems)



Fuente: Elaboración propia.

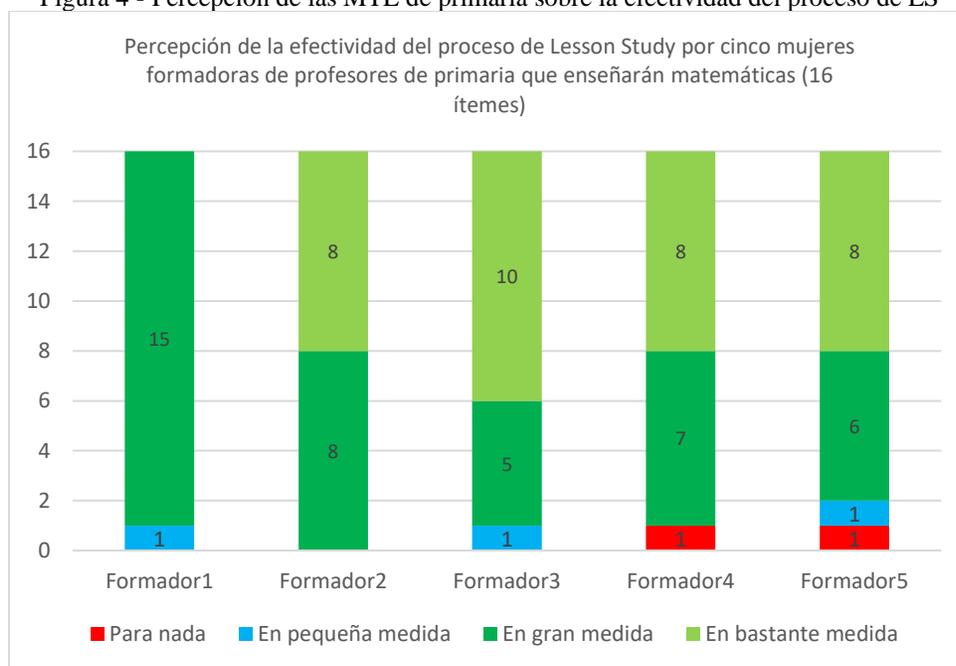
Caso 2: 5 Profesoras Formadoras

Todas las formadoras de futuros profesores muestran tendencia positiva de las percepciones en los niveles más altos de la escala, considerando tanto “En gran medida” como “En bastante medida”, en al menos 14 de los 16 ítems (ver Figura 4). Destaca la concordancia

de la evaluación positiva a los ítems “Desarrollamos una secuencia de preguntas y devoluciones que ayudarían a los estudiantes a lograr el estándar de la profesión docente”; “Resolvimos una tarea de resolución de problemas por nosotros mismos para anticipar las diversas soluciones de los estudiantes” y “Compartimos nuestras experiencias de enseñanza de las asignaturas referentes a Matemáticas”.

En cuanto al ítem referido a "Como formadora o formador de profesores de educación básica que enseñarán matemática pudo escribir su reflexión sobre cómo fue la lección y lo que aprendió del Lesson Study (bitácora u otra instancia)", tres las formadoras lo consideraron en el nivel más bajo, actividad que no fue obligatoria en el GEC. No obstante, la Formadora2 lo evaluó en el nivel más alto, lo que podría indicar un mayor compromiso profesional con el proceso de LS vivido.

Figura 4 - Percepción de las MTE de primaria sobre la efectividad del proceso de LS



Fuente: Elaboración propia.

La Formadora3 manifestó “En lo personal me gusta el trabajo colaborativo, porque es un trabajo que te permite hacer algo acompañado. Generalmente, una siempre está trabajando sola en las universidades, a veces las universidades son pequeñas, no hay equipo. Pero al realizar estos trabajos, te hace trabajar no tan solitario, discutir problemáticas, todo lo que hemos estado haciendo en equipo. Es igual cuando uno dice que los niños construyan su conocimiento, pero que aprendan con otro”.

Esta formadora valora y da importancia del trabajo colaborativo propio del LS, en que los participantes pueden discutir y resolver problemas juntos en lugar de trabajar de manera aislada. Además, destaca la idea que los estudiantes aprenden mejor cuando trabajan en equipo y se equivocan y aprenden juntos.

La Formadora5 manifiesta que “el Estudio de Clases [Lesson Study], en lo personal, te dice que las clases se preparan, se analizan, no se improvisa una clase. [...] las discusiones matemáticas tienen que ir orientadas para que puedan surtir el efecto [aprendizaje] que uno quiere”, y comprende que el proceso le permite “como una puesta en escena de una obra, en la que tú analizas cada detalle, y que es mejorable, o sea siempre hay una clase mejor, [...] hay un estudio, la clase se analiza, uno se anticipa, el problema que voy a buscar lo voy a orientar para que aparezcan estos aprendizajes, que en este caso era el sentido numérico, y eso yo creo que es súper valioso tener esa consideración”.

Las ideas expresadas en las reflexiones de esta formadora muestran características del proceso de LS, como la importancia de la planificación y análisis de las lecciones, la orientación de las discusiones matemáticas para lograr los aprendizajes buscados, el enfoque en los detalles para mejorar constantemente y la consideración de una reflexión cuidadosa y una anticipación estratégica de la enseñanza para responder a las necesidades de aprendizaje de los estudiantes.

La Formadora2 afirma que coincide con las demás formadoras puesto que el proceso de LS “ha puesto en valor todo lo que hay detrás, el trabajo también de pensar cómo van a actuar nuestros estudiantes, qué es lo que van a decir, cómo podemos afrontar una pregunta o un error, para llevarlo [al aprendizaje] a donde queríamos nosotras, que era poner en el centro, el sentido numérico. Creo que eso es realmente valioso del trabajo que se hizo”. Las formadoras coinciden en que planificar y anticiparse a lo que sucederá en una lección enfocada en la resolución de problemas, con un contenido matemático específico, les permite desarrollar sus habilidades de enseñanza y una mayor comprensión de los razonamientos y estrategias de sus estudiantes.

Como sugieren Shimizu y Kang (2022), los resultados muestran que el crecimiento profesional de los docentes puede estar relacionado con su reconocimiento de la importancia de comprender el pensamiento de los estudiantes, puesto que ello es acorde con los ítems positivamente evaluados por las formadoras y sus reflexiones, sobre preguntas y devoluciones que ayudarían a los estudiantes en sus dificultades y la anticipación a las posibles soluciones.

Conclusiones

El escrito presenta un modelo chileno para la aplicación de Lesson Study que fue aplicado por dos grupos, uno de profesores en servicio, y otro, de formadoras de profesores, indagando en las percepciones respecto a la efectividad del proceso de los docentes participantes en dos procesos de Estudio de Clase, tanto del grupo de profesores en servicio de primaria, como del grupo de formadoras de futuros profesores de primaria que enseñarán matemáticas. Ambos grupos participaron en dos ciclos de Lesson Study, respondieron 16 ítems acerca de la efectividad del proceso de LS, los cuales se analizan junto a sus reflexiones finales.

El proceso de LS fue percibido por los docentes en sus características de colaboración y discusión entre pares, siendo una oportunidad valiosa para compartir estrategias de enseñanza efectivas y fomentar la reflexión crítica sobre la propia práctica docente. Los participantes de los Lesson Study valoran el trabajo profesional y colaborativo de este enfoque, que contribuyen a su tarea de mejora de la calidad de la enseñanza y del aprendizaje de los estudiantes, y manifestaron haber realizado mayores observaciones y reflexiones críticas sobre su práctica docente y sobre el pensamiento de los estudiantes.

Para ambos casos estudiados se usó el mismo modelo de LS propuesto por GEC PUCV que tiene una duración de dos meses con una sesión semanal, y sigue las directrices del enfoque japonés de Lesson Study, obteniéndose los mismos resultados positivos de la percepción de los docentes participantes sobre la efectividad del proceso. Dada esta diversidad de contextos, se destaca la facilidad de adaptar el modelo de LS PUCV a las necesidades y contextos particulares de cada comunidad escolar y su cultura, adecuándose al desarrollo profesional docente en todos los niveles educativos.

Referencias

- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). **Content knowledge for teaching: What makes it special?** *Journal of Teacher Education*, **59**(5), 389–407.
- Baldin, Y., Isoda, M., Olfos, R., & Estrella, S. (2018). A STEM cross-border lesson on energy for primary education under APEC Lesson Study Project. En Hsieh, F. J. (Ed.), (2018). **Proceedings of the 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education**, Vol 1, Taipei, Taiwan: EARCOME, pp. 236-247.
- Bruce C. D., & Ladky M. S. (2011). What's Going on Backstage? Revealing the Work of Lesson Study with Mathematics Teachers. In Hart L., Alston A., Murata A. (eds). **Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education**. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_19

- Estrella, S., Morales, S., Olfos, R., & Salinas, R. (2022a). Estudio de e-Clases en Chile: cambios percibidos por profesores que diseñan, mejoran e implementan una tarea que desarrolla el razonamiento inferencial informal desde PK-3. En A. Richit, J. da Ponte y E. Soto, **Estudios de aula na formação inicial e continuada de professores** (pp. 83-113). Editora Livraria da Física.
- Estrella, S., Vidal-Szabó, P. y Morales, S. (2022b). Enseñanza de la estadística en Chile con Lesson Study: innovaciones y buenas prácticas. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), **Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades** (pp. 137-163). CIEME, Universidad Católica del Maule.
- Estrella, S., Zakaryan, D., Olfos, R. y Espinoza, G. (2020). How teachers learn to maintain the cognitive demand of tasks through Lesson Study. **Journal of Mathematics Teacher Education**, **23**(3), 293-310. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-018-09423-y>
- Inprasitha, M., Isoda, M., Wang-Iverson, P., & Yeap, B. H. (2015). **Lesson study: Challenges in mathematics education**. World Scientific.
- Isoda, M., Stephens, M., Ohara, Y., & Miyakawa, T. (Eds.). (2007). **Japanese lesson study in mathematics: Its impact, diversity and potential for educational improvement**. World Scientific.
- Isoda, M., & Olfos, R. (2009). **El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del Estudio de Clases**. Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Isoda, M., & Olfos, R. (2012). **El enfoque de resolución de problemas: En la enseñanza de la matemática a partir del Lesson Study**. Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Isoda, M., Olfos, R., Estrella, S., & Yamamoto-Baldin, Y. (2022). Duas contribuições da lesson study japonesa para a formação de professores de matemática: a terminologia eficaz para planejamento de aulas e como força promotora de grupos de estudo sustentáveis. **Educação Matemática em Revista**, **23**(1), 98-112.
- Kieran, C., Krainer, K., & Shaughnessy, J. M. (2013). Linking research to practice: Teachers as key stakeholders in mathematics education research. **Third International Handbook of Mathematics Education**, 361-392.
- OECD. (2004). **Revisión de Políticas Nacionales de Educación. Chile**. Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos.
- OECD. (2009). **Revisión de Políticas Nacionales de Educación. La Educación Superior en Chile**. MINEDUC.
- Olfos, R., Isoda, M., & Estrella, S. (2021). Multiplication of Whole Numbers in the Curriculum: Singapore, Japan, Portugal, the USA, Mexico, Brazil, and Chile. In Isoda M., Olfos R. (Eds.). **Teaching Multiplication with Lesson Study** (pp. 25–37). Springer, Cham.

- Olfos, R., Isoda, M., & Estrella, S. (2020). Más de una década de Lesson Study en Chile: hallazgos y avances. **Revista Paradigma**, Edición Cuadragésimo Aniversario: 1980-2020, Vol. XLI, 190–221.
- Reyes-Bravo, M., & Estrella, S. (submitido). **Formadoras de profesores de matemáticas: explorando sus experiencias en un Lesson Study sobre sentido numérico.** (En revisión).
- Shimizu, Y., & Kang, H. (2022). Discussing students' thinking and perspectives for improving teaching: An analysis of teachers' reflection in post-lesson discussions in lesson study cycles. **ZDM–Mathematics Education**, **54**(2), 419–431.

Anexo

Efectividad del proceso (16 ítems) (Traducidos desde Akiba et al. 2019)

- 1) A. Como profesor/educador en formación continua pudo escribir su reflexión sobre cómo fue la lección y lo que aprendió del Lesson Study (bitácora u otra instancia).
- 2) A1. Compartimos nuestras experiencias de enseñanza de la asignatura de matemáticas.
- 3) B. Dialogamos profesionalmente sobre la comprensión actual de nuestros estudiantes sobre algún contenido específico.
- 4) B1. El Grupo de Lesson Study especificó el objetivo y el proceso de aprendizaje para desarrollar la lección.
- 5) C. Discutimos cómo progresa el aprendizaje de los estudiantes a lo largo de los distintos niveles escolares de algún contenido específico.
- 6) C1. Los miembros del grupo de Lesson Study presentaron datos como evidencia del aprendizaje de los estudiantes (por ejemplo, trabajo de los estudiantes, preguntas de los estudiantes, registro narrativo de las actividades de los estudiantes, soluciones de los estudiantes compartidas en una hoja de papel o pizarra digital).
- 7) D. Elegimos una tarea de resolución de problemas motivadora y significativa para nuestros estudiantes.
- 8) D1. La discusión se centró en el aprendizaje de los estudiantes y en cómo promover partes específicas del Plan de Clases.
- 9) E. Elegimos una tarea de resolución de problemas que revelara los conceptos erróneos comunes de los estudiantes.
- 10) E1. Se pudo discutir sobre cómo mejorar la lección para una futura enseñanza.
- 11) F. Desarrollamos una tarea de resolución de problemas que les permite a los estudiantes profundizar su comprensión al comparar múltiples soluciones compartidas por sus compañeros de curso.

- 12) F1. Las discusiones permitieron enfocar la efectividad de la lección para lograr el objetivo de aprendizaje del estudiante y mejorar el Plan de Clases.
- 13) G. Desarrollamos una secuencia de preguntas y devoluciones que ayudarían a los estudiantes a lograr el objetivo de aprendizaje.
- 14) H. Resolvimos una tarea de resolución de problemas por nosotros mismos para anticipar las diversas soluciones de los estudiantes.
- 15) I. Diseñamos una lección en la que los estudiantes pudiesen apropiarse de su aprendizaje participando colectivamente en tareas de resolución de problemas.
- 16) J. Discutimos cómo evaluar el logro del objetivo de aprendizaje.

Datos de los autores

Soledad Estrella

Licenciatura en Educación Matemática, Universidad de Santiago de Chile, Chile
Maestría en Didáctica de la Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Doctorado en Didáctica de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Formación de profesores, Grupo de Investigación en Estadística Temprana, GIET
soledad.estrella@pucv.cl
<https://orcid.org/0000-0002-4567-2914>

Raimundo Olfos

Posgrado en King College, London, UK
Magíster en Educación Matemática, Universidad de Santiago, Chile
Ph.D. in Education, University of Wales, UK
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Formación de profesores, Grupo de Estudio de Clases, GEC-PUCV
raimundo.olfos@pucv.cl
<https://orcid.org/0000-0002-9886-4282>

Como citar el artículo:

ESTRELLA, S.; OLFOS, R. Lecciones compartidas: un modelo chileno de Lesson Study aplicado con profesores de primaria y con formadoras de profesores de primaria que enseñaran matemáticas. **Revista Paradigma**, Vol. XLIV, Edición Temática Estudio de Clases: Contribuciones de la educación japonesa en diferentes países, mayo de 2023 / 110 – 130. DOI: <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p110-130.id1414>

Introdução dos Princípios da Lesson Study no Brasil: primeiros passos e grupos de estudo

Yuriko Yamamoto Baldin

yuriko@ufscar.br

<https://orcid.org/0000-0001-7473-5657>

Universidade Federal de São Carlos
São Carlos-SP, Brasil

Aparecida Francisco da Silva

aparecida_francisco57@hotmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-5570-1232>

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP
São José do Rio Preto-SP, Brasil

Thiago Francisco Felix

thiago.felix@docente.fieb.edu.br

<https://orcid.org/0000-0003-3357-7570>

Fundação Instituto de Educação de Barueri
Barueri - SP, Brasil

Recebido: 03/03/2023

Aceito: 27/03/2023

Resumo

Este artigo discute as bases que fundamentaram os estudos e as iniciativas para implementar atividades da metodologia Lesson Study (Pesquisa de Aula em português), considerando seus princípios originais para contribuir com a melhoria das aulas de matemática nas escolas brasileiras. O estudo envolveu um projeto pioneiro de implementação numa escola pública brasileira, por meio das atividades de pesquisa de um professor em exercício, iniciando uma linha de pesquisa em formação continuada de professores que ensinam matemática, baseada em Lesson Study. Após destacar a experiência de pesquisa, este artigo sistematiza o avanço do processo de implementação de Grupo de Estudos nos moldes de Lesson Study, com apoio dos órgãos educacionais do estado de São Paulo, que representou o estabelecimento de parcerias colaborativas que consolidam as atividades de pesquisa aliadas a práticas nas escolas, atualmente. O artigo significa uma síntese da jornada de implementação dos princípios da metodologia Lesson Study no Brasil.

Palavras-chave: Lesson Study-Pesquisa de Aula. Formação Continuada de Professor de Educação Básica. Conhecimento do Professor. Grupo de Estudo Colaborativo. Colaboração Universidade - Escola- Sistemas Educacionais.

Introducción de los Principios del Estudio de Clases en Brasil: primeros pasos y grupos de estudio

Resumen

En este artículo discutimos las bases que fundaron los estudios e iniciativas para implementar actividades del Lesson Study – Pesquisa de Aula (en portugués), considerando los principios originales del Lesson Study para contribuir a la mejora de las clases de matemáticas en las escuelas brasileñas. El estudio involucró un proyecto pionero de implementación en una escuela pública brasileña, a través de las actividades de investigación de un profesor en ejercicio, iniciando una línea de investigación en educación continua de maestros que enseñan matemáticas, basada en Lesson Study. Después de destacar la experiencia de investigación, este artículo sistematiza el progreso del proceso de implementación del Grupo de Estudio en la línea del Lesson Study, con el apoyo de los órganos educativos del estado de São Paulo, que representó el establecimiento de asociaciones de colaboración que consolidan las actividades de investigación aliadas a las prácticas en las escuelas de hoy. El artículo significa una síntesis del camino de implementación de los principios del Estudio de la Lección en Brasil.

Palabras clave: Lesson Study-Pesquisa de Aula. Educación Continua del Maestro de Educación Básica. Conocimiento del profesor. Grupo de Estudio Colaborativo. Colaboración Universidad - Escuela - Sistemas Educativos.

Introduction of the Principles of the Lesson Study in Brazil: first steps and study groups

Abstract

This paper discusses the bases that grounded the studies and initiatives to implement activities of the Lesson Study – Pesquisa de Aula (in Portuguese), considering the original principles of the Lesson Study to contribute to the improvement of mathematics classes in Brazilian schools. The study involved a pioneering project of implementation in a Brazilian public school through the research activities of a practicing teacher, initiating a line of research in the continuing education of teachers who teach mathematics based on Lesson Study. After highlighting this research experience, this paper systematizes the progress of the process of implementation of the Study Group along the lines of the Lesson Study, with the support of the educational bodies of the state of São Paulo, which represented the establishment of collaborative partnerships that consolidate research activities allied to practices in schools today. The article is a synthesis of the journey of implementation of the principles of the Lesson Study in Brazil.

Keywords: Lesson Study-Pesquisa de Aula. Continuing Education of Basic Education Teacher. Knowledge of the Teacher. Collaborative Study Group. Collaboration University - School-Educational Systems.

1. Introdução

O objetivo deste artigo é discutir as bases que fundamentaram o primeiro estudo e a implementação da metodologia Lesson Study (LS) japonesa no Brasil, seguindo uma trajetória do histórico da descoberta desta metodologia pela primeira autora nos anos iniciais do século XXI. O contato e o conhecimento do alcance educacional da LS em contextos que ultrapassam as fronteiras do país de origem motivaram os estudos iniciais no cenário educacional brasileiro que, na época, enfrentava uma crescente necessidade de ampliar os conceitos de formação inicial e continuada de professores, especialmente de Matemática. Os documentos oficiais, como Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997) e a expansão da área de pesquisa em Educação Matemática sobre as metodologias de ensino e aprendizagem promoveram debates e pesquisas em Ensino da Matemática e Formação de Professores.

O artigo apresenta a busca de uma fundamentação inicial que apoiou os autores a pesquisar os princípios da metodologia japonesa de Lesson Study e introduzi-los na formação continuada de professores de matemática, a partir dos anos finais da primeira década do século XXI. Inicialmente, são apontadas as dificuldades essenciais da cultura educacional brasileira que foram trabalhadas nos primeiros passos da adaptação da LS no cenário das escolas brasileiras. A adaptação foi validada em contexto de um laboratório experimental para testar as possibilidades de trabalhar os princípios essenciais da metodologia num ambiente que transponha as barreiras culturais que, usualmente, impedem as mudanças metodológicas não familiares nas aulas tradicionais de matemática, marcadas por exposições pelos professores e aprendizagens passivas dos alunos. Para não desviar a implementação da LS dos princípios aplicados no Japão, os cuidados tomados nesses passos são pontos fundamentais da pesquisa dos autores. Tais cuidados permitiram uma análise construtiva dos resultados que puderam ser balizados comparativamente com os objetivos da metodologia que se mantêm por 150 anos, como apresentado em Baldin (2010) e explicado resumidamente a seguir.

A metodologia japonesa de ensino, especialmente de matemática nas salas de aula, atraiu, no século XXI, maior atenção de pesquisadores e educadores em caráter internacional, que tiveram olhares além das fronteiras e diferenças culturais. Nesse contexto, Stigler e Hiebert (1999) apontaram a importância da metodologia japonesa de ensino da matemática ao comparar as práticas de ensino das salas de aula no Japão com aquelas da Alemanha e dos Estados Unidos. Esta obra, desde o seu prefácio, destacou as condições culturais do ensino e aprendizagem como

um dos fatores que influenciam uma análise comparativa entre a formação dos professores em diferentes países.

Considerando esta perspectiva para conectar a LS às bases da formação de professores de Matemática, Stigler e Hiebert (1999) indicam, nas páginas 1 a 13, a importância da qualidade de ensino nas salas de aula, ao discutir o desvio de foco das reformas educacionais da época, nos Estados Unidos, pela cultura vigente no país. Esses autores enfatizaram que a verdadeira reforma educacional precisa estar centrada na aprendizagem efetiva dos alunos como resultado da melhoria da qualidade de ensino dos professores, como Bruner (1996) já apontava em seu livro “A Cultura da Educação”.

A natureza complexa de “ensino e aprendizagem” como uma atividade cultural influencia a política educacional de um país, desde a legislação com normas curriculares até a formação de professores com suas crenças em relação ao seu papel no ensino e nas práticas na sala de aula. Tal consideração mostra o quanto é difícil introduzir metodologias diferentes em países fora do contexto original. Nesse sentido, Stigler e Hiebert (1999) apresentam um resumo das fases essenciais da Metodologia, ora já difundida como Lesson Study, introduzindo sistematicamente o processo fundamental desta metodologia, acompanhado de reflexões que apontam a possibilidade de implementar as melhorias no processo de formação dos professores e das práticas de ensino no contexto dos Estados Unidos.

As características da LS indicadas por Stigler e Hiebert (1999) encorajam a difusão em outras culturas, e seguem, com anotações entre parêntese de nossa autoria, como: a) LS é baseada num *modelo de melhoria continua e a longo termo* (isto requer tempo para se tornar culturalmente aceito e praticado); b) LS mantém um *foco constante na aprendizagem do aluno* (isto implica foco na aprendizagem efetiva do aluno segundo objetivos estabelecidos pelo currículo, que não se limitam à atenção no uso de metodologias ou materiais diversos); c) LS foca na *melhoria do ensino diretamente no contexto* (isto significa que o plano de aula é um objeto de pesquisa, de análise e de aperfeiçoamento); d) LS é *colaborativa* (isto significa que o conhecimento dos professores sobre o aperfeiçoamento de uma aula e de seu plano é resultado de colaboração, compartilhamento de mesma linguagem para descrição e análise do desenvolvimento da aula e do ensino entre pares sobre a atividade de ensino); e) Professores que participam em LS se veem como contribuidores ao *desenvolvimento do conhecimento sobre*

o ensino e ao seu desenvolvimento profissional (isto coloca o professor como investigador da sua prática, como iremos apontar nas próximas seções).

Os ensinamentos do estudo de Stigler e Hiebert (1999) impulsionaram e continuam impulsionando o interesse pela LS em outros países e culturas, impactando as pesquisas educacionais com LS.

Para esclarecer as bases da nossa linha de pesquisa para implementar a LS no Brasil, apresentamos, inicialmente, o conceito do qual partimos para localizar a LS como uma metodologia central na formação inicial e continuada de professores, antes de enunciar a questão central da pesquisa.

2. O professor que aprende a ensinar: PCK e Lesson Study

O campo de pesquisa com o olhar sobre a formação do “professor que sabe ensinar” vinha sendo aprofundado nos finais do século XX desde o trabalho importante de Shulman (1986) que estabeleceu o conceito fundamental de Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (PCK) (*pedagogical content knowledge*). Este conceito mostrou a diferença entre “o saber da disciplina”, enquanto *conhecimento específico de conteúdo* por um professor, do “saber o conteúdo voltado para a aprendizagem do aluno”, levando em consideração “o conhecimento sobre as formas de aprendizagem, os métodos pedagógicos de ensino com suas metodologias e instrumentos”. Além disso, o PCK traz “o conhecimento de contextos curriculares e suas conexões interiores em diversas dimensões, dos objetivos educacionais, dos perfis sociais das escolas e comunidades” (SHULMAN, 1986, 1987).

Com base nesta perspectiva trazida por Shulman (1986), nossa pesquisa identifica as primeiras descobertas dos princípios da LS como motivadoras para a iniciativa de trazê-los para o contexto brasileiro, para contribuir na linha de pesquisa “Melhorias da Formação Inicial e Continuada de Professores de Matemática, em Educação Básica”. Entendemos, portanto, que a metodologia LS tem uma posição estratégica na formação de professores, por meio do desenvolvimento contínuo de um processo de aprendizagem da arte de ensinar, com estudo preliminar de conteúdo e do material curricular para o planejamento de aulas, em que se prioriza a aprendizagem dos alunos (STIGLER; HIEBERT, 1999; ISODA; STEPHENS; OHARA; MIYAKAWA, 2007; ISODA; ARCAVI; MENA-LORCA, 2012).

A LS tem uma origem histórica de 150 anos, cujos detalhes mais significativos da sua origem e estrutura se encontram na publicação de Isoda *et al.* (2007). Esta obra é uma tradução

para inglês do original *em japonês* de 2005, com a finalidade de apoiar os pesquisadores fora do Japão, interessados em explorar o potencial da metodologia no ensino e na aprendizagem da matemática. A obra em inglês tinha como objetivo divulgar, de forma mais generalizada, a Lesson Study e seus princípios para fora do Japão, quando, desde os finais do século XX, começavam as iniciativas de difundir a metodologia para os Estados Unidos (LEWIS, 2002; FERNANDEZ; YOSHIDA, 2004).

No International Congress on Mathematics Education-ICME 9 (ICMI-IMU) de 2000, realizado no Japão, a primeira autora, em contato com os professores e pesquisadores japoneses, teve conhecimento da metodologia Lesson Study, ocasião em que foram identificados seus elementos que poderiam impulsionar as pesquisas realizadas no Brasil na direção de reformas curriculares dos cursos de matemática, cujas discussões estavam em curso no país, visando à formação de professores capacitados para as demandas do século XXI.

A elaboração de novos currículos, tanto para as escolas de educação básica quanto para os cursos de formação de professores, enfrentava, nos anos 2000, o desafio de incorporar as recomendações curriculares dos PCN (BRASIL, 1997) e as pesquisas da Educação Matemática ganhavam um impulso maior. Nesse cenário, o avanço do conceito de Conhecimento de Matemática para o Ensino (MKT) (*Mathematics Knowledge for Teaching*), que trouxe o conhecimento geral de PCK de Shulman de maneira específica e mais detalhada para o ensino de matemática, fundamentou, em Educação Matemática, o quadro teórico da pesquisa em “Formação de professores que ensinam matemática” (BALL; BASS, 2003; BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

O conceito MKT contribuiu significativamente para desenvolver a pesquisa na Educação Matemática internacional na primeira década do século XXI. Entretanto, ao mesmo tempo em que o modelo de Lesson Study estava sendo estudado em diversos países, as iniciativas para trazer o modelo para a pesquisa em ambiente brasileiro enfrentavam dificuldades de ordem estrutural e cultural, como Baldin e Guimarães (2009) expuseram num texto que foi traduzido e adaptado na edição em espanhol (ISODA *et al.*, 2012), de uma edição ampliada a partir de (ISODA *et al.*, 2007). Esta publicação em espanhol introduziu a LS na comunidade de língua espanhola da América do Sul, com a terminologia Estudio de Clases e ilustra, com muitos relatos, a intensificação do movimento internacional dos primeiros projetos de implementação da LS em vários países e regiões.

Baldin e Guimarães (2009) destacam um problema estrutural do sistema educacional brasileiro que dificulta o processo de harmonizar as reformas curriculares na educação básica com as reformas atualizadoras dos cursos de formação de professores, especialmente da disciplina matemática:

[...] a ruptura da política educacional durante os anos intermediários da escolaridade elementar é percebida como uma das causas da dificuldade de se seguir um currículo pedagogicamente coerente de ensino da matemática nesse nível. Não se trata apenas de um problema político, mas também de um problema de descontinuidade na formação de professores. A formação preparatória destinada aos professores dos primeiros anos é muito deficiente, tanto no plano do conteúdo matemático como no das metodologias pedagógicas a serem aplicadas nessa disciplina. Quanto à formação preparatória dos professores do 6º a 9º ano, em geral ela não enfatiza a fase de aprendizagem real dos alunos que devem avançar para o ano seguinte em um novo sistema, de modo que a transição dos anos elementares para os intermediários da educação básica fundamental apresenta falhas (BALDIN; GUIMARÃES, 2009 apud UNESCO, 2016, p.80).

Baldin e Guimarães (2009) apontam, também, que um dos obstáculos para o desenvolvimento de metodologias de ensino e aprendizagem é a descontinuidade na preparação de professores, que atuam nos anos iniciais e nos níveis secundários da Educação Básica, o que provoca saltos na percepção dos professores sobre os conteúdos específicos de matemática escolar.

Corroborando esta análise, vemos, no cenário nacional, que importantes estudos (GATTI; NUNES, 2009; GATTI, 2010) apontavam, já no final da primeira década do século XXI, a fragilidade dos cursos de formação de professores, especialmente em relação à conexão entre o conhecimento de conteúdo específico, oferecido pelos cursos superiores, e as práticas que capacitem efetivamente os futuros professores a “desenvolver as competências e habilidades para elaborar propostas efetivas de ensino-aprendizagem de Matemática para sua atuação na Educação Básica” (GATTI; NUNES, 2009, p. 110).

A ausência de política educacional que integre a formação na área específica com a formação para a docência também é apontada por Gatti e Nunes (2009) como uma fragilidade dos projetos pedagógicos dos cursos de licenciatura em matemática, que não promovem um diálogo entre o que ocorre nas salas de aula do ensino fundamental e a formação básica no ensino superior. Além disso, Gatti (2010) aponta uma característica estrutural dos cursos de formação de professores para os anos iniciais do ensino fundamental que apresentam falhas nas disciplinas de conteúdos específicos para a formação profissional, especialmente dos conteúdos da matemática. As ementas apresentadas para os conteúdos específicos são superficiais, se

preocupando em “justificar o porquê ensinar; entretanto, só de forma muito incipiente registram o que e como ensinar” (GATTI, 2010, p. 1371). Os desafios apontados nestas considerações indicam a propriedade de trazer pesquisas inovadoras, como Lesson Study, para enfrentá-los.

Nesse cenário, as investigações dos autores deste artigo na linha “*formação de professores que sabem ensinar*”, no sentido de PCK de Shulman (1986), encontraram sua fundamentação nos princípios de LS que, por sua origem histórica, nasceu da *pesquisa do professor* sobre como trabalhar de forma eficiente o *planejamento de uma aula para executá-lo numa sala de aula* em que o *aluno aprenda desenvolvendo seu potencial com autonomia*, e o *professor possa avaliar a aula e a aprendizagem dos alunos* segundo objetivos educacionais pré-estabelecidos (ISODA *et al.*, 2007; ISODA *et al.*, 2012).

Assim, a pergunta crucial da pesquisa tratada neste artigo é formulada como:

“*O que permite quebrar a barreira e organizar a pesquisa brasileira no cenário de descontinuidade estrutural e cultural do sistema educacional?*”

3. Metodologia: Lesson Study e a Resolução de Problemas

O ensino e a aprendizagem da Matemática no ambiente educacional japonês sempre foram pautados na *Resolução de Problemas*, em que culturalmente os conceitos novos eram introduzidos e trabalhados por meio de situações-problema, mesmo em temas dentro da própria matemática, com justificativas e variações de estratégias, aplicações e exercícios de fixação.

Isoda (2010) aponta que o ensino por Resolução de Problemas se estabeleceu, mais fortemente, após a Revolução Meiji (1868) de abertura do país, também conhecida como Restauração Meiji, como um modelo de ensino que acompanhou o advento do sistema educacional. Este estabeleceu o regime de escolas com instalações padronizadas de salas de aula e introduziu a figura do professor para muitos alunos, com esquemas organizados e por anos escolares. A cultura, antes da Restauração Meiji (1868), de ensino individualizado ou para pequenos grupos, de forma personalizada em ambientes de sala de estudos, exigiu uma mudança radical após a instalação do Ministério de Educação em 1873.

A mudança nas *metodologias de ensino*, no novo sistema educacional de salas de aula, foi iniciada como *pesquisa dos próprios professores* (ISODA *et al.*, 2007; ISODA *et al.*, 2012) sobre os modelos de aula expositivas da cultura ocidental. A *atividade de pesquisar as aulas*, iniciada pelos professores japoneses, tinha o objetivo de compreender melhor a aprendizagem dos alunos e a utilização de roteiros e materiais didáticos elaborados, conforme os objetivos de

aprendizagem estabelecidos pelo currículo. Esta atividade caracteriza a LS como um método de *formação de professores para a prática e na prática*, como apontado por Matos *et al.* (2009).

Após a instalação, no Japão, do sistema escolar com salas de aula separadas por anos escolares, a Metodologia de Resolução de Problemas (MRP) permaneceu como eixo das atividades norteadoras dos conteúdos para constituir o currículo escolar de matemática, sendo que a *atualização de currículos* constitui um objeto de pesquisa contínua no Ministério de Educação do Japão, até os dias atuais.

Na visão da MRP como prática na sala de aula japonesa, o foco principal é estimular o aluno a desenvolver a capacidade de enfrentar situações-problema, pensar suas próprias estratégias de resolução e saber argumentar para justificar suas ideias e soluções, saber comparar suas ideias com as de seus colegas, saber aplicar suas soluções em situações mais gerais ou em outras situações-problemas.

A MRP nas salas de aula do Japão, desenvolvida durante as atividades de LS, inclui abordagens por Proposição de Problemas (*Problem Posing*) e Problemas Abertos (*Open ended problems*), tendo impulsionado colaborações internacionais nas pesquisas de Educação Matemática, especialmente após os anos 1960 (BECKER; SHIMADA, 1997; ISODA; KATAGIRI, 2012; ISODA, 2010). As abordagens de ensino e aprendizagem de resolução de problemas por “proposição”, em pesquisas de países como Peru (MALASPINA; MALLART; FONT, 2015) e Estados Unidos (CAI, 2022), para citar alguns, assim como de “problemas abertos” como base para implementar LS na Tailândia (INPRASITHA, 2015) vêm sendo divulgadas recentemente com visibilidade na comunidade acadêmica internacional.

Na perspectiva de MRP dentro da LS, consolidada nos anos 1980 nos currículos escolares oficiais do Japão, como indicam Isoda e Katagiri (2016) no prefácio desta referência, uma aula de matemática tem como objetivo desenvolver processos e habilidades para um pensamento criativo e autônomo dos alunos para resolver problemas e não equivale a uma reformulação das fases da metodologia de Polya (1945). Isoda (2010) mostra como a resolução de problemas estava presente desde os primeiros manuais de formação de professores na nova dinâmica escolar provocada pela Restauração Meiji de 1868.

Entretanto, no contexto da pesquisa, não tratamos de importar um modelo japonês para o nosso sistema educacional, mas, sim, adotamos as fases da resolução de problemas do Polya

(1945) com visões que ampliam o seu papel nas ações do professor na sala de aula, como indicam Allevato e Onuchic (2014), e interpretando as fases da LS dentro das etapas da MRP.

Em outras palavras, consideramos a LS como uma Metodologia de Formação de Professores, Inicial ou Continuada, adaptada ao nosso contexto cultural, e utilizamos a MRP de modo que contribua para a implementação dos princípios de LS e seja uma ferramenta didática que suavize a descontinuidade estrutural no sistema educacional do Brasil.

Na próxima seção, apresentamos os princípios da LS que basearam a primeira implementação no Brasil, em 2009, após as primeiras divulgações desta metodologia no país em anos anteriores, paralelamente a projetos que ocorreram na América Latina e outras iniciativas da comunidade internacional na difusão da metodologia fora do Japão (ISODA *et al.* 2012).

4. Dificuldades estruturais e Princípios da Lesson Study

Na fase inicial da pesquisa, houve uma reflexão crítica sobre as razões da dificuldade, tanto de professores como de alunos, de compreender e utilizar a resolução de problemas como um processo natural do ensino e aprendizagem da matemática. Nessa reflexão, houve a percepção de que há um problema cultural de considerar uma aula de resolução de problemas como uma forma de verificação da aprendizagem de conceitos ensinados previamente e dos procedimentos técnicos treinados de operações ou de instruções do “que fazer... quando se pede...”. Em outras palavras, foi constatado que a resolução de problemas é encarada como uma atividade posterior ao trabalho do professor em “explicar o que e como se faz” e ter mostrado exemplos do raciocínio que “precisa” ser entendido pelos alunos. Esta inferência se baseia na experiência pessoal do terceiro autor, desde seus anos de formação na licenciatura e suas primeiras experiências docentes, sendo percebida, em geral, em seus entornos acadêmicos e sociais.

Esse fato mostrou a concepção de que o ensino é, em geral, centrado no professor como agente ativo numa sala de aula, responsável por “transmitir” o conteúdo programático, enquanto o aluno é agente passivo na “aprendizagem”, com recebimento dos ensinamentos e do treinamento que realiza dos procedimentos que foram apresentados para repeti-los.

Desta forma, para poder pesquisar como os princípios de LS impactam o processo de ensino e aprendizagem numa sala de aula brasileira, foi preciso iniciar as reflexões para uma mudança de paradigma na atuação do terceiro autor, como professor das suas classes, por meio

de planejamentos cuidadosos de aulas e atividades que promovessem a autonomia e a iniciativa dos alunos na construção do conhecimento. O planejamento de aulas, então, considerou como objetivo essencial a aprendizagem por meio da compreensão, experimentação, conjeturas, descobertas e síntese dos objetos de ensino apresentados em cada aula. Para conseguir elaborar um planejamento com estas dimensões, foi necessário considerar o tripé de PCK, isto é, desde os conceitos matemáticos do conteúdo curricular, à escolha dos materiais didáticos adequados, recursos metodológicos e o ambiente da sala de aula. Esse primeiro passo no planejamento de aulas constitui a base dos procedimentos para implementar uma LS.

A ideia do professor que se empenha em trabalhar a aprendizagem do estudante durante a aula, tornando-o um “agente ativo” na própria aprendizagem, pode levar a um entendimento de que a LS significa mudar a dinâmica da gestão da classe, em que o professor é passivo na condução da aula. Uma observação importante (ISODA; OLFOS, 2009, p. 24) adverte sobre o equívoco de que as etapas padronizadas de um ciclo de LS consistem em mudar a *forma de atuação dos alunos* que podem discutir em grupos ou outras formas de dinâmica de classe. Eles destacam que a essência da LS consiste não exatamente na forma de execução de etapas de uma aula, mas, sim, em alcançar a aprendizagem efetiva dos alunos nos tópicos de matemática planejados. Esta aprendizagem efetiva se obtém com o desenvolvimento de pensamento matemático durante as atividades na sala de aula, que podem, sim, envolver distintas formas de interação coletiva, mas também promover o pensamento individual. Portanto, o significado principal de uma aula na LS é o desenvolvimento do pensamento matemático e a aprendizagem dos conteúdos de matemática, por meio de um planejamento cuidadoso de aulas.

Este entendimento do princípio fundamental da LS, que desde suas origens vem se desenvolvendo para acompanhar as atualizações curriculares necessárias, indicou, para nossos primeiros passos, o estudo do currículo, as componentes do conteúdo matemático constantes do currículo para um determinado ano escolar e as pesquisas para planejar e propor sequências didáticas com técnicas e instrumentos adequados para cada situação de aprendizagem.

A experiência que introduziu a LS na formação continuada de professor de Matemática num ambiente de laboratório experimental resultou na dissertação de Mestrado do terceiro autor (FELIX, 2010). Esta experiência está apresentada na Seção 5 e constitui os primeiros passos reais da LS no Brasil. Ela deixou claro que o primeiro passo para a mudança de paradigma do

planejamento de aulas, com investigação prévia segundo os princípios de PCK, implica compreender o significado de observar a execução de uma aula segundo um plano estabelecido.

O planejamento de uma aula, na perspectiva de uma LS, deve contemplar detalhes muito além de tópicos a serem trabalhados durante o tempo designado e seu cronograma, pois deve conter indicações de expectativas das reações dos alunos às tarefas desenhadas para sua resolução, assim como as ações planejadas pelo professor para estimular as discussões e as participações dos alunos.

A observação, por sua vez, de uma aula no ciclo de LS por pesquisadores colaboradores é considerada uma forma de fazer “pesquisa sobre a aula e a aprendizagem dos alunos”, e não constitui uma forma de julgar e avaliar a ação do professor. As observações de uma aula planejada com esse cuidado constituem uma ferramenta valiosa para a fase final de revisão do plano e da coleta de evidências de aprendizagem dos alunos, para, assim, completar o ciclo da LS, sem desviar o foco da aprendizagem dos tópicos curriculares da atividade planejada.

Uma aula observada dentro de um ciclo da LS se chama Aula Pesquisa e não deve ser confundida com as *aulas públicas demonstrativas*, como as realizadas em São Paulo e no Rio de Janeiro, em 2008, com o apoio de escolas e de educadores que se interessaram em conhecer os detalhes de uma aula pública participativa com resolução de problemas (ISODA *et al.*, 2012). As aulas públicas, realizadas por docente experiente e abertas para o público de professores interessados, fazem parte das atividades de divulgação da metodologia em todos os países que trabalham a LS, mesmo dentro do Japão. As aulas demonstrativas, no Brasil, promoveram entusiasmo e interesse dos professores, pesquisadores e dos agentes das secretarias de educação presentes, porém ficou evidente que os princípios da Pesquisa de Aula (LS) precisavam ser vivenciados no contexto de salas de aula reais e não apenas assistidos.

A nossa linha de pesquisa foi iniciada em 2009 (FELIX, 2010) para testar e corroborar a MRP na condução de uma aula como ferramenta didática eficaz para o professor “aprender a ensinar”, baseada no PCK de Shulman (1986) e MKT de Ball *et al.* (2008). Ao mesmo tempo, a condução de uma aula de resolução de problemas deve observar o resultado na aprendizagem do aluno que vivencia a construção dos conceitos e adquire habilidades técnicas durante as aulas.

5. Primeiros Passos: motivação, estudos e esquema inicial de implementação

Esta seção apresenta, inicialmente, de forma resumida, algumas percepções no ensino da matemática que viabilizaram o trabalho pioneiro na introdução da metodologia de LS,

realizado como Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da UFSCar pelo terceiro autor, em 2010 (FELIX, 2010), e seus desdobramentos durante a última década em seu trabalho profissional, com o foco na Pesquisa de Aula, atuando como professor em exercício em escolas brasileiras. Tendo sido pioneiro no estudo sobre LS no Brasil que implicou num projeto de pesquisa, adotou-se o nome de Pesquisa de Aula para o termo Lesson Study, fiel ao seu nome original, Jugyou Kenkyu, com seu significado (Jugyou = Aula; Kenkyu= Pesquisa/Investigação). A palavra Estudo não foi adotada, pois foi entendido que o conceito Lesson Study envolve essencialmente *atividades de pesquisa*: 1- de conteúdo teórico dos tópicos de matemática enquanto disciplina e, também, como matéria escolar; 2- de metodologias pedagógicas com estratégias de ensino e conceitos de avaliação da aprendizagem; 3- de estruturas curriculares e de leis da organização escolar e, também, de contextos sociais e culturais da escola e sala de aula alvos da pesquisa. Esta perspectiva está de acordo com os elementos essenciais de PCK (SHULMAN, 1986).

As primeiras vivências do terceiro autor em sala de aula aconteceram em uma escola pública estadual, na Grande São Paulo, com alguns problemas de infraestrutura. Embora tenha enfrentado dificuldades, como muitos professores relatam no início de carreira, estava disposto a contribuir da melhor forma possível. A vontade inicial era trabalhar com informática no ensino, dando continuidade aos estudos de *softwares* de geometria dinâmica, tema do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) na graduação, mas o contexto encontrado foi uma sala de informática desativada, quando se fez necessária a manutenção dos equipamentos, realizada graças aos conhecimentos específicos prévios do docente. Este trabalho exigiu muito planejamento e replanejamento das aulas, em razão das necessidades dos alunos e as restrições impostas pela pouca quantidade de computadores. O planejamento das atividades foi fruto do estudo do ambiente e das adequações das aulas. Isso mostrou que um planejamento de aulas inovadoras é resultado de conhecimento teórico e prático, da pesquisa das estratégias de ensino e do ambiente onde ocorrem as atividades de aprendizagem.

Esta experiência representou uma inovação para a época, com atividades colaborativas em ambiente informatizado, em que os alunos experienciam o estudo e a aprendizagem com uso de recursos da tecnologia digital. A iniciativa propiciou, também, a confiança em poder quebrar a estrutura tradicional para introduzir novas práticas pedagógicas, na direção de obter evidências para responder à pergunta da pesquisa deste artigo. A realização e o estudo desta experiência

produziram um artigo (BALDIN; FELIX, 2008) que foi apresentado no IV Colóquio de História e Tecnologia no Ensino da Matemática (IV HTEM), em 2008.

Como profissional da carreira de professor de ensino fundamental, o terceiro autor reconheceu, na época do início da pesquisa, que as necessidades educacionais não são resolvidas da noite para o dia, assim como que os resultados educacionais da aprendizagem matemática no Brasil, há décadas, não eram animadores.

Foi assim que, em 2009, iniciamos os estudos sistemáticos da Pesquisa de Aula (LS) no Brasil, dentro do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), sendo o primeiro projeto de pesquisa da metodologia LS no Brasil, a exemplo de outros países que iniciavam a pesquisa e a implementação, por exemplo, no Chile, em 2006 (ISODA *et al.*, 2022, p.102).

Os estudos iniciais foram focados na adaptação da metodologia LS sem perder seus elementos fundamentais, com cuidados para estar de acordo com a recém-lançada Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008). Sob a ótica do terceiro autor, a grande diferença cultural percebida na primeira etapa da LS foi o hábito de trabalho coletivo entre os profissionais da educação japonesa, em contraposição à forma individualizada de trabalho dos profissionais brasileiros, especialmente no planejamento de aulas de um determinado conteúdo.

Na etapa da observação, a diferença maior era a falta da presença de pares que observassem as práticas em sala de aula. Sem a compreensão do significado da observação por pares, que é uma parte fundamental da aprendizagem do professor na metodologia LS, a “pesquisa de aula” de um plano de aula executado, sem oportunidades de discussão crítica com os colaboradores, acaba perdendo o foco.

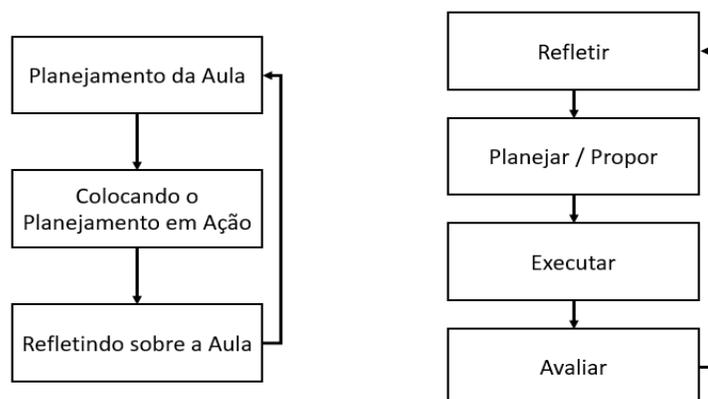
Esse estudo inicial responde parte da questão central da pesquisa, no que diz respeito ao trabalho colaborativo, ao enfrentar a questão: *como introduzir uma metodologia pautada na colaboração de grupos de professores poderia ser adaptada em um país cujos docentes trabalham de forma individualizada?*

Com os estudos dos princípios da LS e de suas etapas básicas, como encontrados em Fernandez e Yoshida (2004) e Isoda *et al.* (2012), percebemos que as etapas cíclicas de *Planejamento de Aula, Colocando o Planejamento em Ação, e Refletindo sobre a Aula* necessitariam de interpretações/adaptações no contexto do nosso local de trabalho.

Dessa forma, introduzimos uma primeira etapa de “Reflexão do contexto escolar, do currículo estadual” para poder propor, em seguida, qualquer planejamento de aulas na escola onde o projeto iria se desenvolver. Em particular, o trabalho coletivo, previsto na LS japonesa, de grupo de professores que decide um tema para estudar um plano de Aula Pesquisa, precisou de interpretações no nosso contexto. Por isso, foi criada a etapa *refletir* para enfrentar, com a participação e auxílio do orientador do mestrado, as dificuldades impostas pelo trabalho individual e estudar estratégias de ensino diferenciadas para garantir a manutenção dos objetivos na aprendizagem dos alunos, na etapa de planejamento das aulas. Seguimos com as demais etapas do modelo original, Planejar/Propor, Executar e Avaliar, de modo a garantir a aplicação da metodologia e, principalmente, a aprendizagem dos alunos. Os resultados desta parte da pesquisa, em que se estruturou o esquema das etapas de LS no contexto brasileiro, foram apresentados em Baldin e Felix (2011).

A Figura 1 ilustra comparativamente a estrutura básica da LS e a estrutura ampliada da Pesquisa de Aula, adequada às necessidades do projeto.

Figura 1: Etapas da metodologia LS (à esquerda) e etapas adaptadas (à direita)



Fonte: Autores, adaptado de (FELIX, 2010, p. 16-21).

Nas reflexões sobre possíveis adaptações, poderia se supor que o planejamento fosse a etapa mais simples desse processo, por ser uma atividade aparentemente familiar ao trabalho docente que, habitualmente, preenche uma lista de tópicos e/ou exercícios/atividades que pretende expor durante a aula. Entretanto, exatamente nessa etapa, é o trabalho colaborativo que enriquece um plano que envolve mais que a escolha dos temas a serem abordados e de eventuais materiais para serem utilizados na aula. Para a discussão sobre o planejamento, a decisão de

realizar reuniões semanais colaborativas, com a orientadora e um colega de mestrado, como relatado em Felix (2010), tornou-se importante. Nelas, decidimos que seria preciso um plano de aula detalhado nos moldes da MRP, além das descrições do tópico específico, do trabalho sobre os objetivos de aprendizagem e do material didático a ser preparado e utilizado.

Isso quer dizer que foi preciso incluir, explicitamente no plano de aula, as considerações sobre: *O que preparar* como proposta de situação-problema; *por que escolher* uma maneira de enunciar os problemas e instigar os alunos a trabalharem nos problemas com seus próprios conhecimentos; *como promover a participação ativa* dos discentes na discussão de suas próprias soluções, orientando-os com questionamentos e estimulando o compartilhamento de ideias entre os alunos e, desta maneira, contribuir efetivamente no processo de aprendizagem, em acordo com os objetivos educacionais da proposta curricular vigente (SÃO PAULO, 2008).

Para a etapa de aplicação da aula planejada, houve duas situações distintas: a primeira com aplicação solitária das atividades, sem que houvesse outros colaboradores observando a aula, e a segunda com a orientadora como única observadora, nos moldes do que é esperado na metodologia LS. Para contornar o problema de não ter observadores externos, pensou-se em realizar gravações em áudio captando o ambiente de sala de aula, além de fotografias que registrassem os momentos cruciais da aula planejada, além de realizar anotações de perguntas dos alunos e as intervenções feitas pelo professor. Todos os registros serviram como subsídios para que a etapa posterior, *Avaliar (Refletindo Sobre a Aula)*, pudesse ser eficaz. Vale lembrar que, à época, a filmagem via *smartphone* ainda era uma tecnologia não difundida, no entanto, para os dias de hoje, seria uma adaptação viável e com ótimos resultados para essa etapa.

Obviamente, a ausência de outros observadores na primeira modalidade diminui o alcance da etapa “Avaliar (Refletindo sobre a aula)”. Entretanto, foram percebidos muitos aspectos a serem melhorados. O simples fato de ouvir o áudio com total atenção à prática revelou desde vícios de linguagem até oportunidades perdidas de intervenções que seriam possíveis de realizar, entre outros aspectos que poderiam ser melhorados.

Todavia, como era de se esperar, foi com a participação de colaboradores/observadores que se tornou evidente o ganho com a metodologia, pois o olhar cuidadoso de observadores externos é muito eficaz, por contribuírem com a análise, de forma global, da condução da aula, as reações dos alunos, a aprendizagem participativa e os aspectos que porventura escaparem à percepção do docente que aplica a aula planejada.

Nas discussões após uma aula observada, ou ainda sobre a narrativa relatada pelo docente para os colaboradores, para a última etapa do ciclo de LS, o professor tem a oportunidade de rever seus passos, destacar quais as intervenções que potencializaram a aprendizagem dos alunos, inclusive as que poderiam ser feitas. Estas revisões das ações realizadas durante uma aula permitem descobrir outras maneiras de questionar os alunos que melhoram o desenvolvimento do pensamento matemático, como apontam Isoda e Katagiri (2012). Esta reflexão sobre a prática aponta um caminho para que o docente crie um hábito que garanta o crescimento profissional e, principalmente, aprofunde o conhecimento sobre a aprendizagem dos alunos.

No contexto da experiência do terceiro autor, percebeu-se a metodologia LS como uma alternativa eficaz para apoiar o professor na busca de aperfeiçoamento profissional. Por meio da abordagem LS, os professores podem trabalhar juntos de forma mais sistemática e colaborativa para planejar, implementar e avaliar uma aula. Durante esse processo, eles podem criar oportunidades de observar as aulas uns dos outros, discutir e compartilhar ideias e sugestões para aprimorar a prática de ensino.

Em mais de 15 anos no magistério paulista, o terceiro autor vivenciou poucas aberturas para assistir aulas de outros colegas, em razão da insegurança que eles poderiam sentir ao se exporem ou por aversão a críticas. Entretanto, nos poucos momentos que pode compartilhar e acompanhar algumas aulas com colegas de profissão, houve ganhos para os dois lados, que são lembrados até o presente como fator de mudança da prática docente.

Hoje como coordenador da área de matemática na instituição onde atua, o terceiro autor pondera que a metodologia LS moldou, e molda, o trabalho realizado. Na instituição, havia a busca pelo trabalho colaborativo na elaboração de avaliações como uma das premissas da instituição. Entretanto, a atividade inovadora de planejar aulas coletivamente e introduzir a observação de aulas por alguns colegas, práticas atuais, foram introduzidas pelo terceiro autor.

Para acompanhar o avanço da linha de pesquisa que possa contribuir para responder a questão central deste artigo, tratamos, na Seção 5, o desafio de implementar LS, com seu princípio de ser uma atividade colaborativa, no sistema educacional da realidade brasileira, estabelecendo Grupos de Estudo com as características e os princípios da LS. A jornada de pesquisa para a constituição do Grupo de Estudos para a formação continuada de professores de matemática consolida os primeiros passos da implementação da LS no sistema educacional com

todas as estruturas políticas das escolas. A formação do Grupo de Estudos procurou manter fiéis os princípios de LS que destacam os elementos pedagógicos da resolução de problemas por questionamentos, exploração de ideias, estratégias diversas e análise de erros para melhor compreensão dos conceitos. A dificuldade de conectar a formação inicial de professores à efetiva capacitação de professores nas escolas e a implantação de currículos que atendam às necessidades educacionais perduram há mais de vinte anos com diversos projetos da política educacional que foram descontinuados, apesar dos seus méritos na época, como é apontada em Gatti (2021).

A seção 6, deste artigo, mostra a implicação dessa perspectiva com o estabelecimento de Grupos de Estudos e de agenciamento de sistemas educacionais, após a pesquisa iniciada em 2008 e estabelecida como pesquisa num Programa de Pós-Graduação em 2009.

6. Ampliando as possibilidades para grupos de escolas ou de professores de escolas distintas

Nos próximos parágrafos, apresentamos um pouco do processo de implementação de Grupo de Lesson Study junto a grupos de escolas jurisdicionadas a uma mesma esfera administrativa da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo. Além disso, propomos um protocolo de ações para implantação de grupos de LS com os quais as duas primeiras autoras têm contribuído.

A partir da experiência colaborativa entre elas, na qual participaram, também, professores universitários com experiência em projetos pedagógicos de cursos de licenciatura e com atuação em projetos de formação continuada de professores, ocorreu o Programa Oficina de Formação da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (PROF/OBMEP), de 2012 a 2015. Nesse projeto, foi possível vislumbrar uma forma que julgamos mais promissora para a implementação da LS. O projeto foi trabalhado como piloto durante os anos 2012 a 2015, em que participaram, como professores da escola básica, membros da equipe de apoio pedagógico da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEE-SP), responsáveis por acompanhar a formação continuada dos professores naquela instância. Essa participação levou à proposição de uma dinâmica com o estabelecimento de um Grupo de Estudos já em 2014, em uma das diretorias regionais de educação. Tal dinâmica, atualmente, está em curso junto a outros segmentos da SEE-SP e estabeleceu colaborações em parceria com Grupo de Estudos do estado

de Espírito Santo. O relato do avanço dos estudos baseados nos princípios de Lesson Study para implementar Grupos de Estudo pode ser acompanhado em artigos como Baldin, Silva, Souza e Wrobel, (2018), Baldin, Silva e Souza (2022) e nas apresentações em eventos internacionais especializados em Lesson Study, como o World Association of Lesson Studies (WALS) (BALDIN *et al.* 2018; BALDIN *et al.*, 2019; BALDIN *et al.*, 2020; BALDIN; SILVA, 2021).

As apresentações dos projetos de implementação de Grupos de Estudo nos estados de SP e ES retratam os desafios enfrentados no contexto cultural do Brasil e os resultados das abordagens regionais distintas. Isso reflete a questão de pesquisa central deste artigo e apresenta iniciativas para romper a barreira estrutural e cultural da educação brasileira por meio da metodologia LS.

A proposta de Grupo de Estudos de LS do estado de SP, elaborada em forma de um protocolo, parte das seguintes premissas: envolvimento dos professores de Instituições de Ensino Superior, especialmente os que atuam na formação inicial de professores, envolvimento de pessoal da esfera administrativa da escola, ou grupo de escolas, participação de professores em exercício e, possivelmente, de estudantes de cursos de licenciatura. O protocolo, iniciado em 2018, já em implementação em outras parcerias das autoras, tem se mostrado adequado e responde parcialmente à pergunta que norteia este trabalho, embora ainda não envolva, de forma completa, a formação dos professores dos anos iniciais da escola básica.

Na sequência, explicitaremos, com detalhes, a dinâmica que temos organizado para as ações propriamente ditas de atividades de LS. São apresentadas em três partes, cada uma delas de grande importância para o êxito na formação continuada de professores em exercício: organização dos trâmites, formação inicial para uso da MRP, com foco no desenvolvimento do pensamento matemático, e a execução de uma atividade completa de LS, incluindo uma Aula Pesquisa e Observação com participação do máximo de professores envolvidos no processo de elaboração da Aula Pesquisa:

I - Organização dos Trâmites: Esse é o momento inicial de estabelecimento de parceria (entre as universidades ou formadores e Secretaria de Educação (Municipal ou Estadual), Unidade Escolar), para a formação e o acompanhamento de trabalho de grupos de professores que participarão da atividade e, possivelmente, liderarão trabalho semelhante em suas escolas. Nas parcerias, as Secretarias de Educação ou Unidade(s) Escolar(s) designam professores e/ou gestores para: a) elaborarem o projeto (em parceria com os formadoras) para documentação

junto aos órgãos competentes da rede oficial de ensino e viabilizarem dotação orçamentária, quando se fizerem necessários deslocamentos entre municípios para a execução do projeto; b) organizarem e definirem, em conformidade com a disponibilidade dos formadores, calendário das ações, ênfases a serem dadas em oficinas mão na massa e local de realização, bem como o número e perfil dos participantes; c) contribuir nas elaborações das oficinas, atuando como facilitadores de acesso a documentos do currículo adotado e indicadores das maiores necessidades dos professores e demais materiais utilizados nas escolas participantes; d) convocarem ou convidarem os professores que participarão do grupo, inclusive organizando os procedimentos legais que permitam tal participação em horário de desenvolvimento de suas atividades profissionais.

II - Formação no uso da MRP: Essa fase compreende a realização das oficinas de formação "mão na massa" da MRP para que os professores possam experimentar, compreender e se "apropriar" de todo o processo de preparação de aulas dentro da LS. Podemos descrever essa fase por meio das ações descritas nos próximos parágrafos.

a) Participação dos professores em atividade de resolução de problemas interessantes propostos pela equipe de gestores e formadores parceiros, por seu potencial de desenvolvimento do pensamento matemático, com orientação dos formadores pautada na MRP. Nessa fase, há indicação para os participantes, além de realizarem as atividades, observarem a condução dada nas oficinas pelos formadores, desde orientações iniciais, moderação da solução dos problemas pelos participantes, discussão coletiva de diferentes soluções, pressupostos teóricos e metodológicos levantados ou indicados e suas implicações na aprendizagem matemática dos estudantes, bem como diferentes modos de apresentação das soluções (uso de lousa comum ou digital, projetor multimídia, cartazes).

b) Atividades específicas para o trabalho com o erro na perspectiva da MRP. De acordo com a BNCC, é necessário:

Construir e aplicar procedimentos de avaliação formativa de processo ou de resultado que levem em conta os contextos e as condições de aprendizagem, tomando tais registros como referência para melhorar o desempenho da escola, dos professores e dos alunos (BRASIL, 2018, p. 17).

Dessa forma, ao identificar como será a avaliação, o que deve ser levado em conta, quais são os procedimentos que foram adotados para acompanhar o desenvolvimento de cada um dos

estudantes, ou seja, ao implementar a avaliação com uma visão global, há uma contribuição mais direta para o desenvolvimento do educando. O foco dessa atividade é identificar o tipo de pensamento matemático que conduz ao erro e não como avaliação escolar tradicional. Partindo da análise de uma tarefa, introduzem a atividade de reflexão por meio de questionamentos sobre o tipo de hipótese que conduz os estudantes ao erro, por exemplo, erro de compreensão de texto, na compreensão e expressão do conceito, na identificação de todos os dados do problema, da representação algébrica ou geométrica do problema, entre outros.

Esse trabalho auxilia os professores a desenvolverem um olhar mais aprimorado sobre a produção final dos estudantes e na escrita. Durante o desenvolvimento de todas as ações, mas especialmente nestas atividades, os professores são confrontados com os tipos de pensamento matemático dos estudantes e analisam como podem planejar atividades que estimulem e permitam que seus estudantes apresentem sua forma de pensar e adquiram a habilidade de usar o pensamento matemático nas suas vidas, como proposto em Isoda e Katagiri (2012).

c) Atividades que impactam o protagonismo dos estudantes. Neste momento, os professores são confrontados com a condução das atividades por meio de questionamentos que levem à reflexão sobre argumentos iniciais, à continuidade de um argumento e não necessariamente à proposição de mudança de argumentação em direção proposta por outra pessoa. Depois de observada a condução das atividades feita pelos formadores, os professores realizam uma tarefa em que identificam possibilidades de um problema para uso em diferentes níveis de ensino, são estimulados a formular diferentes soluções e a discutirem possíveis erros. Também elaboram questionamentos que possam conduzir para a finalização de diferentes argumentos hipoteticamente propostos pelos estudantes ou levem à verificação da necessidade de mudança de rumo, por identificação de equívoco na proposição de estratégias de solução, realizada pelos estudantes.

d) Trabalho com resultados obtidos pelos estudantes em avaliações externas, como Olimpíadas, SARESP, Avaliação de Aprendizagem em Processo, bem como os resultados nas avaliações dos trabalhos escolares, que utilizados regularmente pelos professores participantes, visando à compreensão do que os índices obtidos realmente apontam e seus significados. Nessa fase, o professor em formação tem a oportunidade de refletir sobre os diferentes instrumentos de avaliação usados para acompanhar o desenvolvimento dos estudantes como um todo: aqueles que se destinam à avaliação da própria política pública voltada à educação e aqueles que se

destinam à avaliação da aprendizagem dos estudantes em determinado momento de sua trajetória escolar. Em resumo, o professor que participa da atividade discute diferentes instrumentos, para quê e como podem ser utilizados.

e) Avaliação da Aula como meio para a aprendizagem dos alunos. Nessa etapa, os participantes discutem o que é importante observar em uma Aula Pesquisa, quais aspectos são considerados relevantes em diferentes momentos e como eles devem constar no planejamento. Durante a formação no uso da MRP, os participantes formam grupos e identificam fragilidades do currículo que possam ser exploradas em uma Aula Pesquisa a ser elaborada na próxima etapa. Finalizando, no dizer de Isoda e Katagiri (2012, p. 121):

Quando os professores tentam ensinar o pensamento matemático, eles precisam pensar em como podem ajudar as crianças a pensar matematicamente e apreciar e adquirir a capacidade de usar o raciocínio matemático. Quando as crianças ficam presas, em vez de ajudá-las diretamente com conhecimentos e habilidades úteis, os professores devem preparar uma maneira de ensinar o pensamento matemático necessário para obter o conhecimento e, além disso, ensinar a atitude que leva a tais métodos de pensamento. Além disso, essa assistência deve ser de natureza geral e aplicável a muitas situações diferentes... Ao fornecê-lo repetidas vezes, um aluno pode se acostumar com esse tipo de pensamento matemático... Portanto, essa assistência assume a forma de perguntas (ISODA; KATAGIRI, 2012, p. 121, tradução livre).

III - Execução de uma atividade completa de LS, nos moldes adaptados para a situação e a partir da participação em atividades descritas em II. Todo o trabalho das fases anteriores prepara os participantes para o planejamento de uma Aula Pesquisa e para participarem como aplicadores do planejamento ou como observadores. O tema da Aula Pesquisa pode ser proposto no início da formação por meio da coleta de dados elaborados pela equipe da Secretaria de Educação ou são identificados durante a fase de formação no uso da MRP. No caso de utilizar-se tema identificado durante a formação, inicialmente, são feitos estudos dos referenciais teóricos constantes no currículo oficial do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2019), em grupos, sendo que este é o documento oficial atual. Depois os grupos apresentam um resumo do que mais interessou e é feita uma discussão e escolha do tema e do problema ou ênfase, por todos que participam da Aula Pesquisa.

Em geral, são realizados três ou quatro encontros de quatro a oito horas cada, com pauta pré-definida, na qual cada aspecto da Aula Pesquisa é detalhado: os materiais a serem utilizados e o planejamento. No planejamento, é feita a apresentação do tema; como será a distribuição do tempo; qual será a organização dos espaços e materiais da sala de aula; como se fará a

apresentação do problema para os estudantes; hipóteses de solução levantadas e questionamento para as diferentes resoluções, bem como aspectos a serem destacados em cada solução; formas de avaliação e roteiro de observação.

Enquanto a Aula Pesquisa é planejada, a equipe gestora organiza a participação do maior número de professores como observadores da aula, a ser realizada numa determinada escola. Vale ressaltar a importante atuação da equipe da Secretaria de Educação de Estado na organização das atividades que resultou no protocolo apresentado. Sem a participação dos então Professores Coordenadores do Núcleo Pedagógico (PCNP), especialista da área de Matemática, o trabalho de implementação da pesquisa não teria sido realizado. A parceria entre as autoras e a Secretaria é fundamental para a proposição e o desenvolvimento da logística como um todo e das temáticas apresentadas anteriormente, com a colaboração de agentes das Secretarias de Educação. A interrelação entre os diversos agentes no sistema educacional do entorno da organização de Grupo de Estudos de LS, no estado de SP, foi apresentada em Baldin e Silva (2021) e analisada em Baldin (2022).

7. Considerações finais

Este artigo discutiu o processo de introdução dos princípios de Lesson Study no contexto educacional brasileiro pelos projetos nos quais os autores se envolveram ou estão envolvidos. Considerou as características da LS que, desde a sua expansão para países fora do Japão nos finais do século XX, contribui para o aperfeiçoamento da formação continuada de professores em exercício, especialmente de matemática nas escolas básicas.

O artigo apresenta os principais desafios enfrentados na primeira experiência de introdução de LS pelos autores, outras propostas embasadas na metodologia da LS e finaliza com a apresentação de um protocolo desenvolvido pelos autores ao longo da trajetória de implantação de experiência de grupos de LS, no qual são desenvolvidos periodicamente atividades de formação continuada de professores em exercício.

Retomando a questão central deste artigo “*O que permite quebrar a barreira e organizar a pesquisa brasileira no cenário de descontinuidade estrutural e cultural do sistema educacional?*”, os autores propõem a metodologia de LS como uma possibilidade de formação em Matemática, inicial e continuada em todos os níveis da educação para ser adotada como uma prática.

Aqui, há dois pontos a considerar: 1. a prática da MRP na formação e na atividade do professor de nível básico; 2. tirar o professor de uma atividade individualizada e sem conexão com as necessidades da sociedade em que a escola está inserida e com o currículo oficial que se adequa periodicamente às demandas sociais. Não há que separar os dois itens anteriores, mas aprimorar a prática de trabalho colaborativo para a tarefa de ensinar, planejar aulas, trabalhar material didático, olhar para a aprendizagem do aluno para desenvolver o pensamento matemático, avaliar e outras dimensões que estão no cerne da LS.

Entendemos que possa haver outras formas de quebrar os hiatos existentes no sistema educacional brasileiro, mas os relatos apresentados apontam duas possibilidades para a formação continuada de professores que, na experiência dos autores, têm-se mostrado efetivas e apontam condições necessárias e suficientes para o aperfeiçoamento da prática dos professores na sala de aula. O desenvolvimento de ambientes de estudo colaborativo na forma de Grupos de Estudo de LS, contando com a participação crucial de agentes do sistema educacional, é um dos caminhos que os autores esperam consolidar com as atividades da Pesquisa de Aula no cenário das escolas brasileiras e nos cursos de formação de professores de Matemática.

Agradecimentos:

Agradecemos ao PPGECE-UFSCar, aos gestores e professores das escolas que participaram das atividades descritas, membros das diretorias de ensino que apoiaram a proposta e viabilizaram a participação de seus professores, e aos colegas do ensino superior que colaboraram e colaboram nos projetos. Por fim, agradecemos ao parecerista pela colaboração por meio de considerações críticas ao primeiro manuscrito que ajudaram a melhorar o trabalho.

Referências

ALLEVATO, N. S.; ONUCHIC, L de la R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? *In: ONUCHIC, L de la R. et al. (Org.) Resolução de Problemas, Teoria e Prática*. Jundiaí: Paco Editorial. 2014. p. 35- 52.

BALDIN, Y. Y. O Significado da introdução da Metodologia Japonesa de Lesson Study nos Cursos de Capacitação de Professores de Matemática no Brasil. *In: SIMPÓSIO BRASIL – JAPÃO 2009*. 2010, São Paulo/SP: Associação Brasil-Japão de Pesquisadores - SBPN. **Anais** [...]. São Paulo, 2010. p. 1-5.

BALDIN, Y. Y. The role of different agents in the complex education systems of developing countries for the implementation of Lesson Study groups with international cooperation. *In:*

THE ICDME-TSUKUBA CONFERENCE: International Cooperation Development in Mathematics Education. 2022, Tokyo. **Proceedings** [...]. Tokyo, 2022.

BALDIN, Y. Y.; FELIX, T. F. Utilização de Programa de Geometria Dinâmica para melhorar a aprendizagem de geometria em nível de Ensino Fundamental. *In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA EM ENSINO DE MATEMÁTICA (HTEM)*, 4. 2008, Rio de Janeiro. **Anais** [...]. Rio de Janeiro. 2008. p. 86-93. Disponível em: <https://crephimat.com.br/htem>. Acesso em: abril 2023.

BALDIN, Y. Y.; FELIX, T. F. A pesquisa de aula (Lesson Study) como ferramenta de melhoria da prática na sala de aula. *In: CIAEM-IACME (50 anos)*, 13. 2011, Recife. **Proceedings** [...]. Recife, 2011. Disponível em: <https://xiii.ciaem-redumate.org>. Acesso em: abril 2023.

BALDIN, Y. Y.; GUIMARÃES, L. C. The process of introducing Lesson Study in Brasil (2009). *In: ISODA, M. et al. (Eds) El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas*. 3ª Edición ampliada. Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso, p. 306-315, 2012.

BALDIN, Y. Y.; SILVA, A. F. The role of education secretaries in the collaborative learning groups in mathematics: bridging between University and Schools. **World Association of Lesson Studies- WALs Conference, Online**, 2021.

BALDIN, Y. Y.; SILVA, A.F.; SOUZA, M. A.V.F.; WROBEL, J. S. Understanding the Lesson Study in the Brazilian Cultural Context: current challenges and perspectives for the future. **World Association of Lesson Studies- WALs Conference**, Beijing, 2018.

BALDIN, Y. Y.; SILVA, A. F.; SOUZA, M. A.V. F.; WROBEL, J. S. Comparative Study of two Study Groups on Kyozai Kenkyuu in Lesson Study Project in Brazil. **World Association of Lesson Studies- WALs Conference**, Amsterdam, 2019.

BALDIN, Y. Y.; SILVA, A.F.; SOUZA, M. A.V. F. The practice of Lesson Study and equity in collaborative Learning Groups for mathematics classrooms in Brazil; **World Association of Lesson Studies- WALs Conference**, recorded ONLINE, 2020.

BALDIN, Y. Y.; SILVA, A. F.; SOUZA, M. A.V. F. Challenges and Diversity of Initiatives for the Implementation of Lesson Study focused on the continuing education of mathematics teachers. **Educação Matemática em Revista – RS**, v.1, n.23. p.149-159. 2022. Disponível em: <http://sbemrevista.kinghost.net/revista/index.php/EMR-RS/issue/view/187>. Acesso em abril 2023.

BALL, D. L.; BASS, H. Toward a practice-based theory of mathematics knowledge for teaching. *In: DAVIS, B.; SIMMT, E. (Eds) Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group (CMESG)*. Edmonton, AB: CMESG. 2003.

BALL, D. L.; THAMES, M.; PHELPS, G. Content knowledge for Teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, [s. l.], v.59, n.5, p.389-407, nov./dec., 2008.

BECKER, J.; SHIMADA, S. **Open-Ended Approach**, A New Proposal for Teaching Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics, Reston VA, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF. 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Base Nacional Comum Curricular- BNCC**. Brasília: MEC/SEF. 2018.

BRUNER, J. **The Culture of Education**. Cambridge, MA: Harvard University Press. 1996.

CAI, J. What research says about teaching Mathematics through problem posing. **Presses universitaires de Rennes/Education & didactique**, v. 16, p. 31-50, 2022/3. Disponível em: <https://journals.openedition.org/educationdidactique/10642>. Acesso em: abr. 2023.

FELIX, T. F. **Pesquisando a melhoria de aulas de matemática seguindo a proposta curricular do Estado de São Paulo, com a Metodologia da Pesquisa de Aula (Lesson Study)**. 2010. Dissertação (Mestrado)-Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos – SP, 2010. Disponível em: https://ppgece.ufscar.br/?page_id=144. Acesso em: abr. 2023.

FERNANDEZ, C.; YOSHIDA, M. **Lesson Study: a Japanese approach to improving Mathematics teaching and learning**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2004.

GATTI, B. A. Formação de professores no Brasil: características e problemas. **Educação e Sociedade**, [s. l.], v. 31, n. 113, p. 1355-1379, Campinas. out.-dez. 2010.

GATTI, B. A. Formação de professores no Brasil: políticas e programas. **Revista Paradigma**, v. XLII, n. Extra: Políticas, Programas e Práticas, p.01-17, Maracay: CIEP, doi:10.37618 maio de 2021.

GATTI, B. A.; NUNES, M. (Org) **Formação de professores para o ensino fundamental: estudo de currículos das licenciaturas em pedagogia, língua portuguesa, matemática e ciências biológicas**. Coleção de Textos FCC vol. 29. São Paulo: Fundação Carlos Chagas, 2009.

INPRASITHA, M. Preparing Ground for the Introduction of Lesson Study in Thailand. *In*: INPRASITHA, M.; ISODA, M.; WANG-IVERSON, P.; YEAP, B.H. (Eds) **Lesson Study, Challenges in Mathematics Education**. p.109-120. Singapore: World Scientific, 2015.

ISODA, M. Lesson Study: Japanese Problem Solving Approaches. *In*: APEC CONFERENCE ON EXEMPLARY PRACTICES IN MATHEMATICS EDUCATION. 2010. Koh Samui, Thailand. **Anais** [...]. Koh Samui, Thailand 2010. Disponível em: https://www.apec.org/210_hrd_exemplaryMaths.2010/07 Acesso em: abr. 2023.

ISODA, M.; ARCAVI, A.; MENA-LORCA, A. (Eds) **El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas**. 3ª Edición ampliada. Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso, 2012.

ISODA, M.; KATAGIRI, S. **Mathematical Thinking: How to Develop it in the Classroom.** Monographs on Lesson Study for Teaching Mathematics and Sciences-Vol 1. Singapore: World Scientific. 2012.

ISODA, M.; OLFOS, R. **El Enfoque de Resolución de Problemas**, en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases. Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso. 2009.

ISODA, M.; OLFOS, R.; ESTRELLA, S.; BALDIN, Y. Y. Two contributions of Japanese Lesson Study for the mathematics teacher education: the effective terminology for designing lessons and as a driving force to promote sustainable study groups. **Educação Matemática em Revista-RS**, v.2, n.23, pp. 98-112. 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.37001/EMR-RS.v.2.n.23.2022.p.98-112> Acesso em: abr. 2023.

ISODA, M.; STEPHENS, M.; OHARA, Y; MIYAKAWA, T. (Eds) **Japanese Lesson Study in Mathematics: Its Impact, Diversity and Potential for Educational Improvement.** Singapore: World Scientific, 2007.

LEWIS, C. **Lesson Study: a handbook of teacher-led instructional improvement.** Philadelphia: Research for Better Schools. 2002.

MALASPINA, U.; MALLART, A.; FONT, V. Development of teachers' mathematical and didactic competency of problem posing. In: **Proceedings of 9th CERME**. p. 2861-2866. Prague, Czech Republic: CERME. 2015.

MATOS, J. F.; POWELL, A.; SZTAJN, P. Mathematics Teachers' Professional Development: Processes of Learning in and from Practice. In: BALL, D.; EVEN, R. (Eds.) **The 15th ICMI Study The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics**, Springer. 2009.

POLYA, G. **How to Solve it.** Princeton University Press, 1945.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

SHULMAN, L. S. Those Who Understand Knowledge Growth in Teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14. 1986.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1-22. 1987.

SÃO PAULO (ESTADO). **Proposta Curricular do Estado de São Paulo para o ensino de matemática para o ensino fundamental Ciclo II e ensino médio.** São Paulo: SE, 2008.

SÃO PAULO (ESTADO). **Curriculo Paulista para o ensino de matemática para o ensino fundamental Ciclo II.** São Paulo: SE, 2019.

STIGLER, J. W.; HIEBERT, J. **The Teaching Gap: best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.** Nova Iorque: The Free Press, 1999.

UNESCO. **Os desafios do ensino de matemática na educação básica**. Brasília: UNESCO; São Carlos EdUFSCar, 20 16.

Data of the authors

Authors

Yuriko Yamamoto Baldin

Bacharelado e Licenciatura em Matemática pelo IMECC-UNICAMP

Mestre em Matemática pelo IMECC-UNICAMP

Doutor em Matemática pelo IMECC-UNICAMP

Local de trabalho: Departamento de Matemática/CCET/UFSCar
GIPEM- Formação de Professores, Lesson Study, Materiais didáticos/Tecnologia/Ensino
yuriko@ufscar.br

<https://orcid.org/0000-0001-7473-5657>

Aparecida Francisco da Silva

Licenciatura em Matemática pela UNESP - campus de São José do Rio Preto

Mestre em Matemática pelo IMECC - UNICAMP

Doutor em Matemática pelo IMECC - UNICAMP

Local de Trabalho: Departamento de Matemática do IBILCE/UNESP
Lesson Study, Jogos no Ensino de Matemática
aparecida_francisco57@hotmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-5570-1232>

Thiago Francisco Felix

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos

Mestre em Ensino de Ciências Exatas pela Universidade Federal de São Carlos

Local de Trabalho: Fundação Instituto de Educação de Barueri - FIEB
Educação e Lesson Study

thiago.felix@docente.fieb.edu.br

<https://orcid.org/0000-0003-3357-7570>

How to cite the article:

BALDIN, Y. Y.; SILVA, A. F.; FELIX, T. F. Introdução dos Princípios da Lesson Study no Brasil: primeiros passos e grupos de estudo. **Revista Paradigma**, Vol. XLIV, Edição Temática Estudio de Clases: Contribuciones de la educación japonesa en diferentes países, mayo de 2023 / 131 - 158. DOI: <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p131-158.id1415>

Lesson Study e o Movimento de Transformação da Identidade Profissional de Professores do Colabora à luz da Complexidade, Dinamicidade, Temporalidade e Experiencialidade

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza

alicevfs@gmail.com

<http://orcid.org/0000-0003-2038-813X>

Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes)

Vila Velha, Brasil.

Recebido: 05/03/2023 **Aceito:** 08/04/2023

Resumo

A identidade profissional vem sendo defendida por autores de todo mundo como um campo de investigação voltado para problematização de trajetórias formativas. Esse artigo apresenta e discute o movimento de transformação da identidade profissional de oito membros do Grupo Colabora à luz da *complexidade, dinamicidade, temporalidade e experiencialidade*, em meio a 11 encontros para planejamento colaborativo baseado no Lesson Study. A investigação qualitativa contou com apoio documental (*e.g.*, planos de aula) e bibliográfico (*e.g.*, artigos científicos) a respeito do planejamento colaborativo realizado pelos oito membros e analisados segundo unidades de contexto de Bardin. Os resultados apontaram alteração em suas identidades profissionais pelo *modus vivendi* com o Lesson Study, notadamente pela apropriação de conceitos matemáticos ampliados, diversidade de fontes de consultas para planejamento de aulas e maturidade e perícia diante de possíveis imprevisibilidades reveladas por alunos em sala de aula.

Palavras-chave: Identidade Profissional. Lesson Study. Conhecimento do Professor. Grupo Colabora.

Estudio de Clases y el Movimiento para la Transformación de la Identidad Profesional de los Docentes del Colabora a la luz de la Complejidad, Dinámica, Temporalidad y Experiencialidad

Resumen

La identidad profesional ha sido defendida por autores de todo el mundo como un campo de investigación destinado a problematizar trayectorias educativas. Este artículo presenta y discute el movimiento hacia la transformación de la identidad profesional de ocho integrantes del Grupo Colaborativo a la luz de la *complejidad, el dinamismo, la temporalidad y la experiencialidad*, en medio de 11 encuentros de planificación colaborativa a partir del Lesson Study. La investigación cualitativa contó con soporte documental (*e.g.*, planes de lecciones) y soporte bibliográfico (*e.g.*, artículos científicos) sobre la planificación colaborativa realizada por los ocho integrantes y analizada según las unidades de contexto de Bardin. Los resultados mostraron cambios en sus identidades profesionales debido al *modus vivendi* con el Lesson Study, en particular debido a la apropiación de conceptos matemáticos ampliados, diversidad de fuentes de consulta para la planificación de la lección y madurez y pericia frente a la posible imprevisibilidad revelada por los estudiantes en el aula.

Palabras-clave: Identidad Profesional. Lesson Study. Conocimiento del maestro. Grupo Colabora.

Lesson Study and the Movement for the Transformation of the Professional Identity of Colabora Teachers in the light of Complexity, Dynamicity, Temporality and Experientiality

Abstract

Professional identity has been defended by authors from all over the world as a field of investigation aimed at problematizing educational trajectories. This article presents and discusses the movement towards the transformation of the professional identity of eight members of the Colabora Group in the light of *complexity*, *dynamism*, *temporality* and *experientiality*, in the midst of 11 meetings for collaborative planning based on the Lesson Study. The qualitative investigation had documentary (*e.g.*, lesson plans) and bibliographic (*e.g.*, scientific articles) support regarding the collaborative planning carried out by the eight members, analyzed according to Bardin's context units. The results showed changes in their professional identities due to the *modus vivendi* with the Lesson Study, notably due to the appropriation of expanded mathematical concepts, diversity of consultation sources for lesson planning and maturity and expertise in the face of possible unpredictability revealed by students in the classroom.

Keywords: Professional Identity. Lesson Study. Teacher Knowledge. Colabora Group.

Introdução

O Grupo de Pesquisa em Formação Colaborativa de Professores – Colabora – do qual somos parte ao lado de professores brasileiros que ensinam matemática no ensino básico e superior, com graduações em Matemática, Física, Pedagogia, Engenharia ou Administração –, tem como objetivo primeiro a aprendizagem de e com professores que ensinam matemática como meio de apreensões amplas e profundas de conteúdos matemáticos escolares e de suas práticas de ensino. Em meio aos estudos e desenvolvimento de investigações, o Colabora foi gradativamente ganhando forma pela atuação de seus membros ao serem identificados (ou mesmo se reconhecerem) no movimento (1) *complexo* de variáveis inerentes ao contexto (sociais, culturais, psicológicas, políticas, etc.) de estudos oriundos, principalmente, da Educação Matemática e da Psicologia Cognitiva; (2) *dinâmico* em integrações e inter-relações (BEIJAARD; MEIJER; VERLOOP, 2004; KELCHTERMANS; VANDENBERGHE, 1994; KELCHTERMANS, 2019); (3) *temporal* pelas contínuas e graduais mudanças inerentes à história de cada um e; (4) *experiential* decorrente das trajetórias vividas (PAULA; CYRINO, 2020).

A história do Colabora, portanto, se confunde e se retroalimenta com as identidades de seus membros de modo indissociável, e essa constituição – em constante transformação (COLDRON; SMITH, 1999) – envolve um complexo caminho na formação de professores que interessa conhecer. Esse interesse está baseado no fato de que "a formação da identidade

profissional dos professores também contribui para nossa compreensão e reconhecimento de como é ser professor nas escolas de hoje, onde muitas coisas estão mudando rapidamente, e como os professores lidam com essas mudanças" (BEIJAARD; MEIJER; VERLOOP, 2004, p. 109).

Por essa razão, a identidade profissional de professor vem sendo defendida por autores de todo o mundo como um campo de investigação voltado para problematização dessas trajetórias formativas (*e.g.*, BEIJAARD; MEIJER; VERLOOP, 2004; PAULA; CYRINO, 2020; CYRINO, 2016, 2017; COLDRON; SMITH, 1999; CONNELLY; CLANDININ, 1999; KNOWLES, 1992). Essa defesa está ancorada em alegações de que a valorização da construção da práxis de professores pode trazer ao primeiro plano ingredientes potenciais dos processos de formação que justificam e inspiram o desenho das identidades profissionais.

Nesse sentido, é nosso objetivo apresentar e discutir o movimento de transformação da identidade profissional de membros no âmbito do Colabora, à luz da *complexidade*, *dinamicidade*, *temporalidade* e *experiencialidade* tratadas por autores da comunidade científica da Educação. Especificamente, considerando a amplitude e diversidade que permeiam a constituição de qualquer identidade, optamos pelo olhar sobre esse movimento no processo de construção de planejamentos de aulas de Matemática. Essa opção não é aleatória, mas eleita pela riqueza de informações, formações e transformações de ideias que podem ter interferido nas identidades e no *modus operandi* e *vivendi* dos membros do Colabora.

Para essa apresentação e discussão, contaremos com apoio documental e bibliográfico, que merecem breves esclarecimentos. O conceito de documento neste artigo ganha conotação maior do que meros textos escritos. Eles também são aqui concebidos como podendo ser não escritos – com suporte em registros audiovisuais, sonoros e de imagens como filmes, vídeos, slides, fotografias, etc. (*e.g.*, FIGUEIREDO, 2009). O uso de documentos, portanto, não é casual, mas necessário, no nosso caso, para investigação do passado como testemunho ou como fonte de dados que se assentaram de modo não escrito. Concordamos com Appolinário (2007, p. 67, grifos nossos) de que um documento é "qualquer suporte [impressos, manuscritos, áudios, imagens, etc.] que contenha informação registrada, formando uma unidade, que possa servir para consulta, estudo ou prova". De modo mais técnico, a Associação de Arquivistas Brasileiros define documento como "unidade de registro de informações, qualquer que seja o suporte ou formato (AAB, 2005, p. 73). Pelo lado bibliográfico, a estratégia terá estudo de fontes científicas primárias,

nomeadamente em livros, periódicos, ensaios críticos, dicionários e artigos científicos oriundos da comunidade científica da Educação, prioritariamente.

Nessa perspectiva, os documentos de investigação serão: planos de aula dos membros do Colabora, registros escritos e não escritos de reuniões de estudo e planejamento colaborativo de aulas e, diálogos com investigadores japoneses. O respaldo bibliográfico virá com artigos científicos, livros e capítulos de autores da Educação Matemática e da Psicologia Cognitiva e anais de congressos científicos. Os sujeitos em voga são membros do Colabora, que de modo direto ou indireto, necessitaram em suas trajetórias profissionais, acadêmicas e científicas da apropriação especializada de conteúdos curriculares matemáticos e de sua prática de ensino. As evidências emersas dos documentos de investigação foram analisadas pelos excertos de conteúdos à luz da teoria de Bardin (1998) em quatro etapas. A primeira foi caracterizada pela extração e organização preliminar dos conteúdos que tinham a ver com a *complexidade, dinamicidade, temporalidade e experiencialidade* – agrupamentos necessários para a investigação. A segunda foi marcada pelo refinamento e filtro dos agrupamentos de conteúdos relevantes que atendessem aos propósitos da pesquisa. Nas terceira e quarta etapas foram tratados os resultados a partir de inferência e interpretação dos conteúdos alinhados às especificidades deste trabalho. A inferência e interpretação geraram não apenas descrição dos conteúdos, mas compreensão à luz da identidade profissional. Vale mencionar nossa opção neste trabalho em evitarmos transpor *ipsis litteris* os protocolos dos participantes, a fim de preservar-lhes o anonimato, mesmo entre eles.

Assim, organizamos o texto a iniciar pelo enquadramento do que seja a identidade profissional do professor, seguida do que autores da área educacional entendem por planejamento de aulas e como ele vem sendo apresentado por membros ingressantes do Colabora. Adiante, o relato da motivação e busca de apoio metodológico para formação de professores no Colabora. Essa busca remete ao registro da essência da formação de professores no seio do Colabora – o Lesson Study nas vozes de seus criadores: educadores japoneses. Em seguida, discorreremos sobre a (trans)formação da identidade profissional de membros do Colabora a partir da prática do Lesson Study, à luz da *complexidade, dinamicidade, temporalidade e experiencialidade*. Por fim, à guisa de conclusão, destacaremos pontos sensíveis de elementos formativos da identidade profissional dos membros do Colabora, e a marca preponderante dessa identidade sob nossa ótica.

Identidade profissional do professor

A identidade profissional vem sendo tratada como um campo investigativo fértil para ampliar compreensões que auxiliem no desenho (ou reformulação) de novos e melhores caminhos formativos (e.g., BEIJAARD; MEIJER; VERLOOP, 2004; PAULA; CYRINO, 2020; COLDRON; SMITH, 1999; CONNELLY; CLANDININ, 1999; KNOWLES, 1992; BOND, 1996; CYRINO, 2016, 2017). Embora haja consenso de sua importância investigativa, há diferenças na compreensão do que seja identidade profissional de professores entre os autores e essa divergência tem reflexos na condução de pesquisas que podem ser entendidas em três grandes categorias elencadas por Beijaard, Meijer e Verloop (2004) em uma revisão de literatura: (1) autores que focam na formação da identidade profissional pelas crenças e biografias de professores; (2) os que sublinham características da identidade profissional dos professores e; (3) pesquisadores que optaram por compor a ideia de identidade profissional pelas histórias dos professores.

Nesse ínterim, o conceito de identidade profissional de professores ganhou diferentes significados na literatura, restando em comum "a ideia de que a identidade não é um atributo fixo de uma pessoa, mas um fenômeno relacional [...], um processo contínuo" (BEIJAARD; MEIJER; VERLOOP, 2004, p. 108). Mais alinhados ao segundo conjunto de investigações, mas não exclusivamente, – os que sublinham características da identidade –, Paula e Cyrino (2020) indicam a *complexidade*, *dinamicidade*, *temporalidade* e *experencialidade* para estudos sobre a identidade profissional de professores que ensinam matemática – nossa opção para a presente pesquisa. Ademais, concebemos que estudos desse tipo podem esclarecer, mesmo que parcialmente, respostas como: "Quem sou eu nesse momento?" e "Quem eu quero me tornar?".

A identidade profissional não é estável, mas em constante alteração pela *complexidade* de fatores históricos, familiares, sociais, psicológicos, culturais e políticos, entre outros, inerentes a qualquer ser humano, que podem interferir no sentido de identidade como professor (BEIJAARD; MEIJER; VERLOOP, 2004; PAULA; CYRINO, 2020; COLDRON; SMITH, 1999). A *dinamicidade*, por sua vez, decorre da própria condição do movimento contínuo e mutável da identidade. O aluno ingressante na graduação concebe, vê, faz, pensa e pratica matemática diferente de quando egressa. O mesmo ocorre depois de alguns anos de magistério e esse dinamismo remete naturalmente aos aspectos de *temporalidade* e *experencialidade*. Logo, o egresso da graduação e ingressante no seio profissional terá sua identidade modificada pelas próprias experiências, inter-relações e

integrações com outras pessoas durante sua trajetória profissional. As experiências ao longo do tempo serão alimento intrapessoal para rearranjos cognitivos e, portanto, novas maneiras de conceber, ver e fazer matemática. O mesmo deve (pode) ocorrer quando esse professor retorna à condição de aluno-professor na continuidade de seus estudos em Grupos como o Colabora.

Em suma, na visão de Paula e Cyrino (2004), a *complexidade*, *dinamicidade*, *temporalidade* e *experientialidade* qualificam o movimento da identidade profissional: é complexa por envolver diversos aspectos que se auto influenciam; é dinâmica pelas mudanças causadas pelas inter-relações e integrações; é temporal pela ocorrência de mutações ao largo da existência; é experiencial pela captação, percepção, interpretação e reinterpretação de diferentes conjunturas e circunstâncias a que está exposto ao longo da vida.

Planejamento de aulas

Planejar é se antecipar ao porvir, projetar, organizar e refletir sobre desenho de meios para alcance de fins (SANT'ANNA, *et al.*, 1988; LIBÂNEO, 1994; NEIRA, 2004; HAYDT, 2006; KILPATRICK; SWAFFORD; FILDELL, 2001; ISODA, 2010a; FUJII, 2014; SOUZA; WROBEL; GAIGHER, 2017). O ato de planejar aulas é inerente à profissão de professor, cujo resultado, geralmente, culmina em um plano para sistematização de ações a serem concretizadas com (ou para) alunos.

No caso escolar, autores como Sant'Anna *et al.* (1988) e Haydt (2006) recomendam constar em planos de aula: Nome da escola e do professor, tema central, objetivos de aula, conteúdos programáticos, procedimentos metodológicos, recursos didáticos e avaliação. Libâneo (1994) acrescenta previsão do tempo nas ações planejadas. Kilpatrick, Swafford e Findell (2001) destacam a importância do plano para redução de imprevisibilidades durante a aula e solução de dificuldades epistemológicas. Fernandez e Yoshida (2004) incluem razões para organização da aula, metas da unidade, conexão entre conteúdos, atividades de aprendizagem, reações dos estudantes, respostas do professor, processamento de conceitos, habilidades e conhecimento, preparação e progressos da aula.

Embora seja inquestionável a relevância do ato de projetar aulas e de que a maioria dos elementos listados por esses autores deva ser objeto de atenção de professores, o conteúdo e a construção desses planejamentos podem variar profundamente, a exemplo da própria diversidade oferecida pelos autores atrás mencionados, além da imposição de

formatos e teores específicos das instituições em que trabalham. Além dessa diversidade, membros do Colabora (doravante denominados alunos-professores) relatam produzir planos de aula com pouca reflexão para atenderem exigências da direção da escola. Esses planos possuem pouca sintonia entre o que se planeja e o que é praticado em sala de aula. Como ilustração, em uma seção de estudos no Colabora, alguns membros ingressantes foram solicitados a elaborar um plano de aula para algum conteúdo da matemática de sua preferência para estudantes do ensino básico. Àquela altura, aqueles membros não haviam sido apresentados a quaisquer formas alternativas para construção de planos de aula diferentes do que já realizavam nas escolas que trabalhavam. A professora (autora deste texto; doravante denominada professora-formadora) estudou todos os planos e estimulou os participantes a refletirem sobre suas produções com questionamentos. À guisa de exemplo, a Figura 1 apresenta um desses planos com palavras escritas na forma digitalizada pelo aluno-professor e, em partes manuscritas pela professora-formadora.

O plano da Figura 1 contém elementos indicados pelos autores da comunidade de educadores: público-alvo, tema, conteúdo, objetivos, material, procedimentos e avaliação. Observe o leitor que esses elementos não parecem ser bastantes para orientar plenamente o ato de ensinar. O aluno-professor, por exemplo, não soube explicar o que ele queria com "noção de volume". Seria a construção do conceito? Na mesma aula planejou apresentar as unidades de medida de volume, levando a professora-formadora a discutir o ensino informativo *versus* formativo. A preferência inicial do aluno-professor parece ter sido pelo informativo ao mencionar "encontre o volume multiplicando as três dimensões". Além disso, não houve preparação do aluno-professor para condução da conversa com os alunos sobre "dimensões" e também ele não soube explicar o que seria uma "observação sistêmica do envolvimento discente no desenvolvimento da aula".

Embora não seja o caso de relacionarmos os resultados da aula com a aprendizagem dos alunos, o plano da Figura 1 dá indícios de fragilidades que não parecem munir o professor diante de imprevisibilidades, dúvidas e reações dos alunos. Além disso, a conversa posterior e conjunta com os alunos-professores demonstrou carência de conhecimentos sobre a matemática e de como ensiná-la (SHULMAN, 1986; HILL *et al.*, 2005; HILL *et al.*, 2011; BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Os alunos-professores relataram, ainda, que os planos parecem existir como uma formalidade exigida pelas escolas e que seguem padrões rigidamente determinados.

Figura 1 - Plano de aula de um dos alunos-professores

Fonte: Acervo da autora.

PLANO DE AULA-1

Disciplina: Matemática

Tema: Volume Público Alvo: 6º Ano

CONTEÚDO:
 Noção de Volume;
 Unidades de medida de Volume.

OBJETIVOS:
 Relacionar o volume do objeto com a quantidade de espaço que ele ocupa;
 Identificar e nomear a unidade de volume;
 Relacionar a unidade de volume aos múltiplos e submúltiplos correspondentes.

MATERIAL UTILIZADO:
 Caixas retangulares de diversos tamanhos;
 Régua;

PROCEDIMENTO:
 Distribuir uma caixa e uma régua a cada aluno;
 Pedir que os alunos identifiquem quantas dimensões tem a caixa (conversar sobre isso);
 Após identificar as dimensões, meça cada uma delas e anote o resultado (observem se estão todas na mesma unidade de medida);
 Encontre o volume multiplicando as três dimensões (não se esqueça de multiplicar também a unidade), faça uma anotação visível do resultado na caixa e compare com o do colega;
 Os alunos irão organizar as caixas por ordem de volume do maior para o menor volume encontrado;
 Discutir o resultado.

OUTRAS INFORMAÇÕES:
 Sugerir que os alunos pensem a respeito do volume de objetos com outras formas geométricas.

AVALIAÇÃO:
 Observação sistêmica do envolvimento discente no desenvolvimento da aula.

Handwritten notes:
 - "nessa mesma aula? Em 1 aula? 5 aulas?"
 - "qual (ais) objetos? O aluno conhece o conceito de volume?"
 - "o nome n° poderia vir depois da apreensão do conceito?"
 - "vc diria q seu aluno reconhece m³, cm³, etc?"
 - "Ah, então vc pensou em paralelepípedo?"
 - "min, mas ele tem todos os pré-requisitos? quais são os pré-requisitos p/ essa aula?"
 - "o q são dimensões? Vc direi isso a eles? Isso é um pré-requisito?"
 - "o q o aluno fará c/ o resultado?"
 - "vc informou como se faz, mas ele sabe q está fazendo?"
 - "Show! Promove interação, mas como será isso? Que questionamentos vc fará?"
 - "Profundar, pensar, e agora?"
 - "certo! Bom! Mas o q vc fará c/ isso?"
 - "Ensino informativo X Ensino formativo."

A promoção de formações que levassem professores à superação de dificuldades pedagógicas e epistemológicas como as exemplificadas na Figura 1, levou a professora-formadora em busca de meios para esse fim. A luz e inspiração para alcance de nossos objetivos em formação de professores veio com a leitura de uma investigação conduzida por Stigler e Hiebert (2009) no livro *The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom* que inaugura a próxima seção.

Motivação e busca por apoio metodológico para formação de professores: o começo de tudo

Stigler e Hiebert (2009) defendem que aprendemos como ensinar pela participação na vida em sala de aula. Muitas vezes repetimos como nossos professores nos ensinavam, do mesmo modo como absorvemos silenciosamente de nosso meio protocolos de comportamento às refeições em família, participação em salas de cinema, como nos cumprimentamos, etc., sem muitas reflexões sobre essas ações. O modo de ensinar, portanto, faz diferença para a aprendizagem e estão convencidos de que ele - o ensino - é uma atividade cultural. Para explicar o viés cultural, entre outros objetivos, Stigler e Hiebert desejaram conhecer como ele é realizado em diferentes contextos escolares. Existem, de fato, diferenças? Se sim, quais são elas? Para Stigler e Hiebert as experiências escolares dos alunos são principalmente determinadas pelos modos como professores atuam dentro de uma cultura. Diferenças culturais nesses modos de agir é o que os autores chamam de lacuna de ensino (*the teaching gap*).

A problemática do ensino e da aprendizagem, levantada por Stigler e Hiebert, traz um estudo comparativo do ensino em três países, Estados Unidos, Alemanha e Japão. A seleção dos países não parece ter sido aleatória, mas pautada nos resultados do TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study). Coincidência ou não, os países estão localizados em diferentes continentes e ocupam posições diversas no TIMSS. O estudo dos pesquisadores deveria culminar em dois produtos: (1) retratar o ensino em cada país e, (2) quantificar a frequência com que algumas características de ensino ocorreram em cada um. A ideia dos autores parecia ser a de compreender o ensino nos diferentes países que explicasse suas diferentes posições nos testes do TIMSS.

No início das observações, as aulas nos três países pareceram iguais para os pesquisadores, mas o olhar cuidadoso e repetido dos registros das aulas em áudio e imagem revelou detalhes que consolidaram diferenças essenciais nos modos de ensinar. No Japão havia o ensino de conteúdos de matemática de um lado e alunos do outro. Os alunos se engajavam no trabalho com a matemática e o professor os mediava. O ensino era orientado por compreensão conceitual e a maior parte do tempo era consumida com problemas desafiadores e discussão de conceitos matemáticos do que com a prática de habilidades. Os professores pareceram ter um papel menos ativo, permitindo que os alunos criassem seus próprios procedimentos para resolver problemas. Esses problemas demandavam aspectos procedimentais e conceituais. Os professores orquestravam a aula.

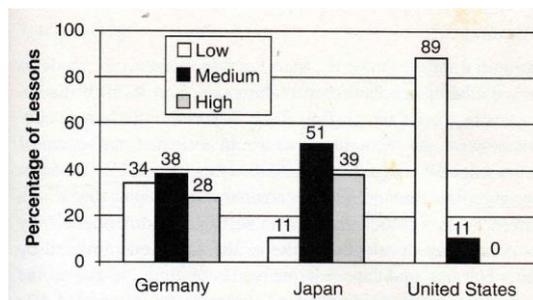
Nas aulas da Alemanha havia matemática, mas o professor era o controlador de boa parte dela ofertando fatos e explicações aos alunos. Os professores estavam no comando do ensino da matemática à qual avançava prioritariamente de modo procedimental para resolver problemas. Nos Estados Unidos havia alunos e professor. Não havia discussão de conceitos da matemática, havia apenas interação entre alunos e professor. A preocupação era a do desenvolvimento de habilidades, que ocorria de modo isolado por meio da prática de repetições. O conteúdo de matemática não estava totalmente ausente, mas ocorria em nível bem menos avançado e requeria menos raciocínio matemático que nos outros dois países. O professor apresentava definições de termos e demonstrava procedimentos para resolver problemas. Os alunos eram levados à memorização de definições.

Stigler e Hiebert (2009) declararam a certa altura da investigação que a aprendizagem baseada em definições deixaria os alunos na superfície da matemática; ao contrário do trabalho com a exploração de propriedades e relacionamentos mais profundos. Essa compreensão envolve apreensão de conceitos em detrimento de meras definições. Na pesquisa, conceitos foram rotulados de modo amplo como podendo ser a aplicação em todas as instâncias na qual a informação foi apresentada pela explicação da ideia, pela demonstração da ideia ou simplesmente pela declaração da informação. O interesse era o de identificar se o ensino dos conceitos era declarado ou desenvolvido. A caracterização do desenvolvimento foi a de que o conceito poderia ter sido explicado mesmo com poucas sentenças ou com breve exemplo. Nos Estados Unidos, 1/5 dos conceitos foram desenvolvidos e 4/5 declarados. Essa situação se inverteu significativamente nos outros dois países.

A pesquisa revelou que os Estados Unidos continham substancialmente mais tópicos e mais mudanças de tópicos do que os outros dois países. Além dessas rupturas na continuidade, os pesquisadores observaram interrupções nas aulas causadas por pessoas que entravam nas salas para requisitarem algo, fornecerem informações sem ligação com o teor da aula, etc. Os Estados Unidos tiveram 31% de interrupções desse tipo, a Alemanha 13% e nenhuma interrupção em salas de aula do Japão.

Além disso, os pesquisadores quantificaram a qualidade geral da matemática em cada aula com relação ao seu potencial para ajudar os alunos a entenderem importantes aspectos do conteúdo. Levaram em conta o nível de desafio e como o conteúdo foi desenvolvido. Eles qualificaram esse quesito em baixo, médio e alto. Os Estados Unidos ficaram em evidente desvantagem nas oportunidades para a aprendizagem de seus alunos, em oposição ao Japão (vide Figura 2)

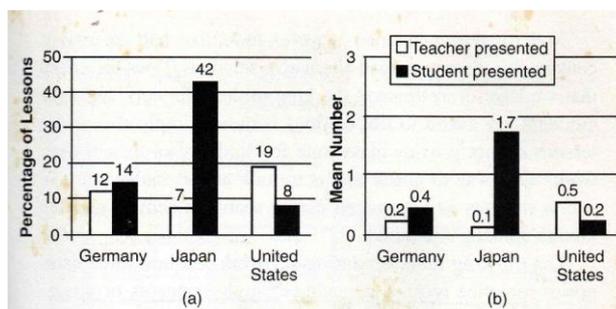
Figura 2 - Qualidade Geral da Matemática



Fonte: Stigler e Hiebert (2009, p. 65)

Mas isso não é tudo. Stigler e Hiebert estudaram a organização das aulas, quanto os alunos foram submetidos ao trabalho com a matemática e a diversificação de estratégias para a solução. Em todos os casos, os Estados Unidos estiveram em ampla desvantagem. A Alemanha apresentou ora resultados que se aproximavam do Japão, ora dos Estados Unidos. O Japão apresentou resultados inquestionáveis quanto à potencialidade do ensino para a aprendizagem de seus alunos (vide Figura 3).

Figura 3 - (a) porcentagem de aulas que incluíam métodos alternativos apresentados pelos alunos; **(b)** média de métodos alternativos de solução apresentados por alunos apresentados por aula



Fonte: Stigler e Hiebert (2009, p. 69)

O Japão pratica um processo de formação de professores – denominado Lesson Study – há mais de um século. No início a educação japonesa não atendia às expectativas da sociedade em termos de qualidade de aprendizagem dos alunos, sobretudo da língua-mãe e da matemática. A Pestalozzi, um método de ensino desenvolvido por um pedagogo suíço, foi uma das inspirações para a mudança, associada ao árduo trabalho com os professores japoneses e às questões culturais do Japão (e.g., SOUZA; WROBEL; BALDIN, 2018).

Sustentamos que o Lesson Study nos apresentou como uma possibilidade para a melhoria do ensino e da aprendizagem a ser experimentada no âmbito do Colabora. Entretanto, não acreditamos na mera importação para qualquer contexto fora do Japão,

justamente porque existem fortes questões culturais envolvidas. O *modus vivendi* japonês é singular. Mas a inspiração no Lesson Study poder-se-ia trazer uma construção própria para o Colabora, sem perda das características que lhes conferem identificação e com respeito às idiossincrasias de cada cultura.

Assim sendo, os resultados da pesquisa de Stigler e Hiebert nos levaram à aprendizagem sobre esse método (que para nós, hoje é mais do que isso), cujos conhecimentos emergiram paulatinamente de artigos científicos, congressos específicos (Psychology Mathematics Education, World Association of Lesson Study e Seminário Internacional de Lesson Study em Matemática) e diálogos com educadores e investigadores japoneses. A motivação, portanto, emergiu da necessidade de reforço nas formações de professores que trouxesse mais essência à compreensão do conteúdo e de sua prática de ensino. Os primeiros passos para uso e incorporação do Lesson Study foram dados com intensos estudos associados à sua experimentação com investigações conjuntas e colaborativas entre os membros do Colabora. Que argumentações o Lesson Study apresenta a ponto de justificar inspiração e incorporação para o Colabora? A próxima seção responde a esse questionamento.

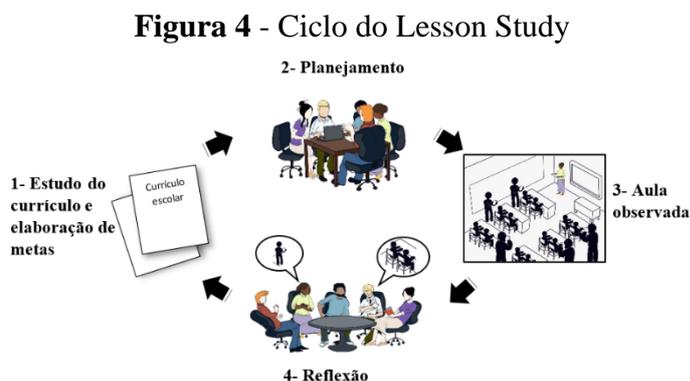
Lesson Study: as vozes de educadores japoneses

Esta seção traz breve revisão de literatura sobre como a comunidade científica de educadores japoneses concebem Lesson Study e, em especial, o planejamento de aulas. A revisão ficou circunscrita em artigos científicos – com palavras-chave escritas nas línguas inglesa e japonesa (*e.g.*, *kyozaiikenkyu*, *neriage*, *bansho*, *matome*, etc.) – complementada por diálogos da autora deste texto com esses educadores e investigadores que possuem credenciais científicas e acadêmicas que os colocam em destaque nesse cenário (*e.g.*, Baldin, Isoda, Fujii, Shimizu, Takahashi, Yoshida, Wang-Iverson, Watanabe). A revisão se estabeleceu de modo atemporal porque Lesson Study é praticado no Japão há mais de 150 anos (MAKINAE, 2010; FERNANDEZ; YOSHIDA, 2004) e qualquer recorte poder-se-ia trazer limitações indesejadas para nossos propósitos.

O que há no Lesson Study² que difere dos planejamentos comumente construídos por professores e que argumentos podem apoiar seu uso como um modo formativo para membros do Colabora? Lesson Study (na língua japonesa *jugyokenkyo*: *jugyo* – aula, lição;

² Alguns autores que publicam em língua portuguesa traduzem Lesson Study como “estudo de aula” ou “pesquisa de aula”. Como estudo de aula, a tradução se estabelece com o artigo definido “o”: “O Lesson Study”; como pesquisa de aula, o artigo definido “a”: “A Lesson Study”.

kenkyo – estudo, pesquisa) é, resumidamente, entendido como um processo japonês de formação de professores (*konaikenshu*: *konai* – na escola; *kenshu* – treinamento) voltado para amplo e profundo conhecimento de determinado conteúdo curricular e de sua prática de ensino por meio de estudo do currículo e elaboração de metas, planejamento, aula observada e criticamente refletida sobre a aprendizagem dos alunos, como em um ciclo (Figura 4).



Fonte: Souza (2019, adaptada)

Embora todo o processo de um Lesson Study seja relevante para alcance dos objetivos da aula, o planejamento colaborativo (*shidoan*) é a essência para a formação dos professores, cujo núcleo – *kyozaikenkyu* (*kyo* – ensino; *zai* – material; *kenkyu* – estudo, pesquisa) ou estudo do material de ensino – oportuniza aos professores apropriação ou enriquecimento de conhecimentos sobre algum conteúdo curricular e(ou) de seu ensino. A tradução de *kyozaikenkyu* para a língua portuguesa, ou outra qualquer, não retrata seu real significado em um Lesson Study por envolver investigação e, por conseguinte, requerer dos professores atuação como pesquisadores.

Nessa perspectiva, Lesson Study é mais do que desenvolvimento profissional, é uma atividade científica (ISODA, 2010a, 2010b, 2011; WATANABE; TAKAHASHI; YOSHIDA, 2008), com as seguintes consequências: (1) há uma ou mais questões de pesquisa a serem respondidas; (2) a aula é uma *research lesson* (aula-pesquisa); (3) a observação pelos professores é orientada pelos objetivos e metas elaborados previamente; (4) a reflexão pós-aula é crítica e pautada na análise das aprendizagens dos alunos. Por ser uma atividade científica, professores devem se revestir como professores-pesquisadores, mas em uma acepção específica, como ensina Watanabe (2018, p.10): “professores são pesquisadores de aulas”.

No *kyozaikenkyu*, os professores devem investigar o conteúdo tendo em conta a potencial compreensão pelos alunos. Nesse espaço, o material ou meio pedagógico deve ser

parte da pesquisa e estar em sintonia com o raciocínio a ser desenvolvido pelos alunos (TAKAHASHI *et al.*, 2005). Frequentemente, os livros didáticos são os materiais mais usados pelos professores para orientar o ensino (*e.g.*, BEATON *et al.*, 1997; ESCOLANO; GAIRÍN, 2005; REYS *et al.*, 2007; ALAJMI, 2009, 2012; WATANABE; LO; SON, 2017). Entretanto, não são (e não devem ser) a única fonte. É recomendado por autores japoneses que a investigação ocorra também por artigos científicos, livros não didáticos, paradidáticos, videoaulas, consulta a profissionais com experiência pedagógica e teórica do conteúdo matemático (*knowledgeable other* - TAKAHASHI, 2014; ou como *shidosha* - SHIMIZU, 1999), outros planos de aulas, mapas, etc. Essas fontes devem funcionar como apoio para construção da *research lesson* (TAKAHASHI, 2006; TAKAHASHI; YOSHIDA, 2004; WATANABE; TAKAHASHI; YOSHIDA, 2008) e nunca como um *script* para ensinar.

O *kyozaikenkyu* deve estar orientado por questão(ões) de pesquisa, meta(s) e objetivo(s) bem definidos, como toda investigação (WATANABE; TAKAHASHI; YOSHIDA, 2008). É preciso responder, por exemplo: O que queremos que os alunos saibam? Que problemática orientará a aula? Que conhecimentos os alunos devem dominar para acompanhar a aula? Que estratégias podem ser potenciais para a aprendizagem? Como os conteúdos estão conectados dentro da unidade curricular, no ano escolar e ao longo da escolaridade básica? Como ocorrerá a integração alunos-alunos e alunos-professor? Muitas vezes, os livros didáticos, ou mesmo os manuais dos professores, são silentes a essas questões. Por isso, devemos ter em mente que o

Kyozaikenkyu refere-se à análise cuidadosa do tópico de acordo com o(s) objetivo(s) da aula. Inclui análises das conexões matemáticas entre os tópicos atuais e anteriores (e os futuros, em alguns casos) e dentro do tópico. Também estão incluídas a antecipação das abordagens dos alunos ao problema e o planejamento das atividades de ensino com base nas respostas previstas. (SHIMIZU, 1999, p. 113, tradução livre)

O investimento dos professores no *kyozaikenkyu* objetiva, principalmente, aumentar (ou mesmo, inaugurar) o repertório sobre o tema e sua prática em sala de aula. O vasto e profundo estudo pode (e deve) apresentar variadas estratégias para a condução do ensino e promover o olhar para o mesmo objeto sob diferentes lentes. Os professores devem se inspirar no que está sendo recomendado pelas fontes fidedignas, especialmente as científicas.

A dimensão da investigação preconizada pelo *kyozaikenkyu*, no entanto, pode ser marcada por demasiada diversidade de materiais e orientações cujo excesso pode comprometer a qualidade no ensino, tanto quanto a falta ou deficiência, caso os estudos percam o foco. O refinamento e a dosagem nesse caso são essenciais e devem estar alinhados

com o contexto e o perfil dos alunos, os objetivos e as metas da aula. Todo o arcabouço de conhecimentos emersos do *kyozaiikenkyu* e a medida de seus usos para o ensino, levou educadores japoneses a evocar um ditado bem conhecido no Japão: “Aprender Dez para Ensinar Um” (WATANABE; TAKAHASHI; YOSHIDA, 2008, p. 135, "Learn Ten to Teach One").

“Aprender Dez” requer muito esforço, disposição, tempo e *know how* para orquestrar a aprendizagem de alunos. Nesse ponto, autores japoneses afirmam (e.g., FUJII, 2014, 2016) que não se faz Lesson Study de todo e qualquer conteúdo curricular, mas daqueles que apresentem dificuldades de ensino ou que se queira potencializar a aprendizagem dos alunos. O “Aprender Dez” é mais do que enriquecer o conhecimento dos professores em um assunto, é mais do que desenhar uma ou mais aulas de um tema – é alterar uma estrutura cognitiva que influenciará a atuação profissional em outras esferas da profissão pela capilaridade que os próprios conteúdos curriculares guardam uns com os outros. Essa parece ser, de fato, a essência do que se deva ter em qualquer formação de professores, e é nesse ponto que o *kyozaiikenkyu* se mostra peculiar e poderoso, embora “invisível” aos olhos de quem apenas enxergue o ciclo da Figura 4, desconsiderando o conteúdo no interior de cada etapa.

Ainda no planejamento, é *sine qua non* considerar a resolução de problemas de matemática como orientação geral da aula (ISODA, 2010a, 2010b; TAKAHASHI, 2006; ISODA; OLFOS, 2009). Isso porque, problemas podem ser força para desenvolvimento da habilidade de pensar e aprender. Nesse senso, o processo de resolução tem muito mais valor pedagógico do que a própria solução. Essa importância levou Isoda e Olfos (2009) a listarem quatro etapas para uso de problema como abordagem em aula: problematização; solução independente; comparação e discussão e; síntese. Cada etapa possui orientações para os professores refletirem sobre a realização ou não pelos alunos em uma escala de 1 a 4. As respostas dos alunos devem levar o professor à reflexão sobre seu próprio repertório para resolver o problema sob diferentes vias.

A seleção do problema também deve ser atenção de professores. Por isso, Watanabe, Takahashi e Yoshida (2008, p. 136, tradução livre) defendem que os professores devem tentar responder a alguns questionamentos, antes de proporem o problema para os alunos:

O que essa ideia realmente significa?; Como essa ideia se relaciona com outras ideias?; Quais são as razões para ensinar esta ideia neste ponto particular do currículo?; Quais ideias o aluno já entende que podem ser usadas como ponto de partida para essa nova ideia?; Por que esse problema específico é útil para ajudar os alunos a desenvolver essa nova ideia?; Como os alunos podem resolver esse problema usando o que já sabem e como suas estratégias de solução podem ser usadas para desenvolver essa nova ideia?; Quais são os erros comuns? Por que os alunos cometem tais erros?; Como os professores devem responder a esses erros?;

Que novas ideias os alunos devem construir usando essa ideia no futuro?; Que manipulativos e outros materiais devem ser fornecidos aos alunos? Como eles influenciam a aprendizagem dos alunos?” Esses questionamentos não são conclusivos. Os professores devem considerar outros questionamentos a depender das especificidades do estudo.

Esses questionamentos – não exaustivos – são fruto da ideia de que os conteúdos devem ser considerados em um escopo curricular amplo, ou seja, os conteúdos da aula não devem ser tomados de forma isolada, mas como uma continuidade: (1) ao longo da escolaridade básica; (2) entre as diferentes unidades do ano escolar e; (3) de problemas da unidade em estudo (ISODA; OLFOS, 2021; OLFOS; ISODA; ESTRELLA, 2020). Essa preocupação tem respaldo quando educadores japoneses entendem que a escolaridade e qualquer aula devem ser como uma história: com início, meio e fim.

Paralelamente a esses quesitos, o planejamento em Lesson Study deve explicitar as reações, dúvidas e questionamentos dos alunos, bem como registrar a atuação docente em face a essas situações. A atuação nunca deve ser pela oferta de respostas, mas pelos estímulos ao raciocínio por meio de questionamentos (*hatsumon*). Shimizu (1999) conta que os questionamentos são meios de promoção de compreensão do problema e de conectá-los às várias estratégias de solução emergentes da(na) aula.

As estratégias são produção de conhecimento dos alunos e devem estar disponíveis ao longo de toda a aula para que os alunos conheçam outras maneiras de pensar, raciocinar e resolver o mesmo problema. Por isso, a lousa deve registrá-las e nunca ser apagada (*bansho*) ao longo da aula. Yoshida ressalta (2005) que o acesso à lousa facilita relembrar o conteúdo, relacionar as partes da aula e comparar diferentes ideias dos próprios alunos. Em meio a essa produção de conhecimento, o professor deve estar atento ao processo de construção das noções matemáticas – corretas ou não (TAKAHASHI, 2006) – visitando os alunos em suas carteiras e tomando notas (*kikan-shido*). Essas anotações alimentarão o final da aula com o *neriage* e o *matome*. O *neriage* consiste na síntese pelos alunos dos aprendizados da aula, orquestrados pelo professor. Nesse momento, o professor deve lançar mão de suas anotações (*kikan-shido*) sobre as produções dos alunos para enriquecer as discussões finais. Essas discussões oportunizam ao professor avaliar o potencial do plano construído (SHIMIZU, 1999). Depois disso, o professor encerra a aula com uma síntese da produção dos alunos que deve ganhar relevo (*matome*).

O planejamento de aulas e o movimento de (trans)formação da identidade profissional de professores do Colabora

Em meados de 2013, os resultados da pesquisa desenvolvida por Stigler e Hiebert (2009) apresentados no livro *The Teaching Gap*, despertaram nosso interesse sobre o Lesson Study. Esse primeiro contato foi seguido de nossos diálogos com professores e pesquisadores japoneses (Isoda, Takahashi, Baldin, Koyama, principalmente) e estudos de artigos (*e.g.*, TAKAHASHI, 2004, 2006; FUJII, 2014, 2016; YOSHIDA, 2005; WATANABE, 2006, 2018; WATANABE; LO; SON, 2017; WATANABE; TAKAHASHI; YOSHIDA, 2008; TAKAHASHI; MCDUGAL, 2016; TAKAHASHI *et al.*, 2005; SHIMIZU, 1999; MIMURA; WATANABE, 2018; ISODA, 2010a, 2010b, 2011) e livros (ISODA; OLFOS, 2009, 2021; FERNANDEZ; YOSHIDA, 2004) sobre formação de professores à luz do Lesson Study. Paulatinamente os ingredientes necessários foram sendo conhecidos e incorporados na prática com os alunos-professores do Colabora.

Os estudos teóricos sobre Lesson Study encantavam os professores pela riqueza de detalhamento, mas o convencimento da qualidade do aprendizado docente e sua incorporação como prática de ensino veio com os resultados dos desempenhos dos alunos quando da aplicação dos planejamentos (vide WANDERLEY, 2020). Pelo limite de espaço, tomamos as seções de planejamento da aula construída para desenvolvimento do conceito de volume para apresentação e discussão do movimento de transformação da identidade profissional dos alunos-professores do Colabora, como continuidade das ações tomadas a partir do que foi discutido na ilustração da Figura 1, à luz da *complexidade, dinamicidade, temporalidade e experiencialidade*.

A iniciar, em uma reunião de estudos no Colabora, todos os novos alunos-professores foram convidados a elaborar um plano de aula para algum conteúdo matemático curricular do ensino básico. A Figura 1 deste artigo apresenta um desses planos elaborado por um dos alunos-professores, até então sem conhecimentos sobre construção de planejamentos baseados em Lesson Study. Após entrega dos planos pelos alunos-professores e estímulos dados pela professora-formadora a cada plano apresentado, os professores mostraram-se confusos e pouco conseguiam responder aos estímulos. Aqueles planos eram semelhantes aos que eles apresentavam em suas escolas e levados a efeito com seus alunos.

Especificamente, alguns estímulos ao plano de aula sobre volume eram: Você quer construir o conceito de volume? As unidades de medida serão apresentadas na mesma aula? Em quantas aulas? Os nomes das unidades não viriam após a apreensão do conceito? Etc.

Esses estímulos eram seguidos de argumentos que denunciavam pouca experiência do tema e da prática de ensino pelos alunos-professores. Muitas delas eram defendidas por constarem na sequência apresentada em livros didáticos adotados pela escola (*complexidade; experiencialidade*).

Após a constatação de que o que se dominava sobre o conteúdo estava baseado na oferta de fórmulas matemáticas para figuras geométricas específicas, a professora-formadora sugeriu estudo de artigos e livros sobre Lesson Study listados no tópico anterior. Os encontros seguintes foram pautados na aprendizagem e debates sobre os elementos do Lesson Study. Gradativamente, os professores foram compreendendo a insuficiência de seus antigos planos de aula. A mera leitura dos materiais teóricos ainda não os capacitaria para alteração em seus planos, por isso, a professora-formadora sugeriu que um novo planejamento para aula de construção do conceito de volume fosse iniciado, justamente porque o aluno-professor havia mencionado dificuldades "dos alunos" com esse tema.

O antigo plano do aluno-professor resultou em um planejamento colaborativo com oito alunos-professores mais a professora-formadora, para 30 alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental brasileiro, descrito em 20 páginas, construído no decorrer de 11 encontros semanais de duas ou três horas. Esse planejamento continha, nesta ordem: (1) Tema e objetivos da aula; (2) estudo do currículo; localização do conteúdo de volume na sequência do currículo de Matemática daquela e de outras escolas; (3) preparativos para a aula e estudo do material; descrição da interação e posição das carteiras; (4) desenho das atividades; critérios de escolha do material; *hatsumon*; (5) *bansho*, *neriage* e tratamento do erro; (6) alargamento do pensamento matemático (diversificação de estratégias); (7) avaliação da aprendizagem; (8) critérios para observação pelos outros alunos-professores sobre a aprendizagem dos alunos; (9) a participação do *knowledgeable other* ou *shidosha*. Àquela altura, o Grupo ainda não conhecia o *matome*.

A *complexidade* da identidade dos alunos-professores foi marcada por uma inicial limitação no conhecimento do conteúdo e em como conduzi-lo com alunos. Historicamente, eles sabiam calcular volume de figuras, mas desconheciam o conceito, cuja aprendizagem veio com a interação silenciosa com autores de artigos científicos que indicavam desenvolvimento gradual e consecutivo da ideia de volume por comparação, medição e produção (WANDERLEY; SOUZA, 2020), e com o compartilhamento das ideias entre os alunos-professores (*dinamismo*).

Preocupados com o desenho de tarefas que cumprissem a sequência comparação-medição-produção, após algumas tentativas frustradas, o Grupo projetou um material

pedagógico, construído em uma marcenaria, de acordo com a metragem propositalmente idealizada e simulada pelo Grupo (*experiencialidade*) para as diferentes atividades que deviam auxiliar a construção do conceito matemático (Figura 5). Essa experiência reforçou aos alunos-professores a necessidade da *dinamicidade* – inter-relações, colaboração e congregação de ideias – quando do planejamento de aulas que os "alunos" apresentavam dificuldades. A propósito, no início os alunos-professores relatavam dificuldades epistemológicas dos "alunos" em determinado conteúdo. Ao cabo de alguns encontros no Colabora, essa concepção foi questionada por eles mesmos (*temporalidade*), levando-os ao reconhecimento de suas próprias limitações e desconhecimentos (e identidade): Quem eu era naquele momento? Quem sou eu agora?

Figura 5 - Material para atividades de comparação, medição e produção



Fonte: Wanderley (2020)

Uma dessas limitações aflorou em meio à discussão dos conceitos de volume e capacidade. Concluíram que figuras geométricas podem ter o mesmo volume, mas não necessariamente a mesma capacidade. Essa conclusão remeteu-os ao cuidado com as palavras durante a aula (*complexidade*). Para evitar confusões, destinaram parte do planejamento para esse estímulo com os alunos (*experiencialidade*). Outra limitação veio com a aprendizagem de que o conceito ampliado de volume requer relacionar massa, área e densidade. Mais uma vez, as históricas e antigas concepções (*complexidade*) deram lugar a novas maneiras de ver, fazer e entender a matemática (*dinamicidade* pelas descobertas conjuntas; *temporalidade* por tudo ter ocorrido em 11 encontros; *experiencialidade* pelas muitas discussões e simulações necessárias para construção do material concreto).

O estudo do currículo na escolaridade e a bagagem de conhecimentos acumulada de diferentes fontes ensinou-os que o conteúdo de volume pode ser abordado antes do estudo de área (*complexidade*). Não há qualquer óbice nessa inversão, a depender de sua condução. Mais do que isso, o estudo de área pode vir a reboque do de volume (*experiencialidade*). Essa constatação não foi realizada neste planejamento, mas figurou como uma possibilidade futura, diante das simulações realizadas pelos alunos-professores.

O confronto com situações imprevisíveis, quando dos estímulos dados pela professora-formadora ao plano inicial, levou-os a se lembrarem das principais dificuldades e questionamentos formulados pelos alunos (*temporalidade*), culminando no planejamento do tratamento do erro, das dúvidas e reações dos alunos por meio de *hatsumon* (*complexidade*).

À guisa de conclusão

Esse artigo apresentou e discutiu o movimento de transformações na identidade profissional de oito alunos-professores no Colabora, à luz da *complexidade*, *dinamicidade*, *temporalidade* e *experientialidade* preconizadas por pesquisadores da Educação, em meio a formações baseadas no Lesson Study.

De maneira geral e resumida, os alunos-professores do Colabora reconheceram "quem eles eram" quando do ingresso no Grupo e "quem eles se tornaram" depois do *modus vivendi* com o Lesson Study. Essa transformação nos permite concluir por um movimento em suas identidades profissionais, ao terem "aprendido dez para ensinar um" – na intertextualidade com educadores japoneses. O antigo plano para aula sobre volume denunciou, notadamente, uma antiga *complexidade* identitária pautada em fórmulas matemáticas memorizadas e uso do livro didático com poucas reflexões. O planejamento colaborativo com Lesson Study promoveu alterações na *complexidade* ao se apropriarem de um conceito ampliado que demanda conhecimento relacional de massa, área e densidade, além do discernimento sobre capacidade e volume. Outrossim, o ensino sequencial por comparação-medição-produção trouxe uma proposta potencial de progressão do raciocínio matemático quando do ensino desse tema. Outrossim, o estudo de volume não era mais concebido como necessariamente antecedido pelo de área.

A *dinamicidade* foi marcada pelas inter-relações com os membros do Grupo e com as interlocuções silenciosas com autores de artigos, dissertações, teses, livros didáticos e não-didáticos, vídeos, etc. Esse dinamismo ampliou a fonte de consulta para as construções de planos de aula, antes singularmente restrito ao livro didático adotado pelas escolas que trabalhavam. A atividade de busca por novas fontes e as inter-relações foram *sine qua non* para desenho do material pedagógico que atendesse aos objetivos da aula que planejavam.

As contínuas e graduais mudanças nas concepções pedagógicas e do conteúdo dos membros do Grupo revelam o poder da *temporalidade* associada às mudanças na *complexidade* e *dinamicidade*, configurando uma história profissional modificada para cada

um: o movimento de "quem eu *era* antes de praticar o Lesson Study" para "quem sou eu *agora*". Os 11 encontros parecem ter sido decisivos para alterações nas percepções sobre o tema e nas suas próprias convicções, gerando, provavelmente, um movimento intrapessoal pelas reconstruções de ideias.

A energia da *experiencialidade* proporcionou aos alunos-professores maior maturidade e perícia quando estiverem expostos às imprevisibilidades, dúvidas, reações e questionamentos manifestadas por seus alunos. Isso porque esses fatos ocorreram em meio às simulações realizadas no seio do próprio Grupo ao ensaiarem, examinarem e avaliarem as atividades e o material pedagógico planejado, como uma espécie de teste piloto. O confronto com alguma imprevisibilidade, dúvida, reação ou questionamento por um membro, alimentava o planejamento com soluções para cada caso, em um contínuo ir-vir, fazer-refazer, refletir-experimentar-refletir e, consultar profissionais mais experientes pedagogicamente e matematicamente falando: os *knowledgeable others*.

Enfim, a vivência do planejamento colaborativo do Lesson Study trouxe aos alunos-professores uma releitura de suas autoimagens e autoconcepções profissionais pela constatação de restritos conhecimentos pedagógicos e de conteúdo. A *dinamicidade* no âmago do planejamento fez com que se autodeclarassem diferentes após a experiência com esse tipo de formação. A linha do tempo, ao lado da *complexidade*, *dinamicidade* e *experiencialidade* no Lesson Study faz parte, agora, de uma nova e complexa maneira de entender e lidar com o "novo eu profissional". Os insumos do Lesson Study foram capazes de questionar antigas concepções e de estremecer o que antes era tido como "pronto e acabado", proporcionando-lhes (e a nós também) um renovado senso de identidade profissional de professor.

As idiossincrasias emergiam em meio às discussões e aprendizagens, e se mesclavam ao de outros tornando-os, eles próprios, diferentes no modo de ver, fazer, pensar e praticar a matemática, ou seja, na transformação de sua identidade profissional. Uma identidade que pode ser remodelada por outras iniciativas formativas para além do Lesson Study, mas que ocorram de modo a causar melhorias nas aprendizagens de professores e alunos, como denunciado na pesquisa de Stigler e Hiebert (2009).

Lesson Study se mostrou capaz de atuar na remodelagem dessas identidades profissionais, por meio de ações colaborativas de planejamento que possivelmente possam convergir para resultados eficazes na aprendizagem dos alunos. Nas palavras de Stigler e Hiebert (2009, Prefácio), "professores são a chave para fechar a lacuna" (...*teachers are the key to closing the gap*). Mas essa trajetória, apropriação e refinamento dos conhecimentos,

bem como a prática pedagógica à luz do Lesson Study nos diversos temas desenvolvidos no Colabora, não são lineares e nem imunes a acertos e equívocos. Mas essa é uma outra história que compõe o próximo artigo.

Referências

- ALAJMI, A. H. Addressing computational estimation in the Kuwaiti curriculum: Teachers' views. **Mathematics Teacher Education**, v. 12, n.4, p. 263-283, 2009.
- ALAJMI, A. H. How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. **Educational Studies in Mathematics**, v. 79, n. 2, p. 239-261, 2012. <http://www.jstor.org.proxy.libraries.rutgers.edu/stable/41413109>.
- APPOLINÁRIO, F. **Dicionário de metodologia científica: um guia para a produção do conhecimento científico**. São Paulo: Atlas, 2007. Disponível em: <https://pesquisa.bvsalud.org/portal/resource/pt/lil-591596>. Acesso em: 8 jan. 2023.
- AAB - ASSOCIAÇÃO DOS ARQUIVISTAS BRASILEIROS. **Dicionário brasileiro de terminologia arquivística**. Rio de Janeiro: Arquivo Nacional, 2005. <https://simagestao.com.br/wp-content/uploads/2016/01/Dicionario-de-terminologia-arquivistica.pdf>
- BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008. Disponível em: <https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/17679>. Acesso em 8 jan. 2023.
- BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 1998.
- BEATON, A.; MULLIS, I.; MARTIN, M., GONZALEZ, E.; KELLY, D.; SMITH, T. Mathematics achievement in the middle school years: IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS). Center for the Study of Testing, Evaluation, and Educational Policy, 1997.
- BEIJAARD, D.; MEIJER, P. C.; VERLOOP, N. Reconsidering research on teachers' professional identity. **Teaching and Teacher Education**, v. 20, n. 2, p. 107-128, 2004. Disponível em: <https://psycnet.apa.org/record/2004-12888-001>. Acesso em 8 jan. 2023.
- BOND, W. R. Teachers' Professionalism: overview. In: KOMPFF, M.; BOND, W. R.; DWORET, D.; BOAK, R. T. (Eds.) **Changing research and practice: Teachers' professionalism, identities and knowledge**. Bristol: The Falmer Press, 1996.
- COLDRON, J.; SMITH, R. Active location in teachers' construction of their professional identities. **Journal of Curriculum Studies**, v. 31, n. 6, p. 711-726, 1999. Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/002202799182954>. Acesso em: 8 jan. 2023.
- CONNELLY, F. M.; CLANDININ, D. J. **Shaping a professional identity: Stories of education practice**. London: Althouse Press, 1999.

CYRINO, M. C. de C. T. Mathematics teachers' professional identity development in communities of practice: Reifications of proportional reasoning teaching. **Bolema**, Rio Claro-SP, v. 30, n. 54, p. 165-187, 2016. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/sTfV4kwdKx3s3TWYKMjM8MQ/?lang=en> . Acesso em 8 jan. 2023.

CYRINO, M. C. de C. T. Identidade profissional de (futuros) professores que ensinam matemática. **Perspectivas em Educação Matemática**, v. 10, n. 24, p. 699-712, 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/5518> . Acesso em: 8 jan. 2023.

ESCOLANO, R. E.; GAIRÍN, J. M. Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 1, p. 17-35, 2005.

FERNANDEZ C.; YOSHIDA M. **Lesson Study**: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 2004.

FIGUEIREDO, N. M. A. **Método e metodologia na pesquisa científica**. São Caetano: Yendis, 2009.

FUJII, T. Designing and adapting tasks in lesson planning: a critical process of lesson study. **ZDM Mathematics Education**, v. 48, p. 411-423, 2016. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-016-0770-3>. Acesso em: 8 jan. 2023.

FUJII, T. Implementing Japanese Lesson Study in foreign countries: misconceptions revealed. **Mathematics Teacher Education and Development**, v. 16, n. 1, p. 65-83, 2014. Disponível em: <https://search.informit.org/doi/abs/10.3316/aeipt.205654>. Acesso em: 8 jan. 2023.

HAYDT, R. C. **Curso de didática geral**. São Paulo: Ática. 2006.

HILL, H. C. *et al.* Measuring the mathematical quality of instruction: Learning mathematics for teaching project. **Journal for Mathematics Teacher Education**, v. 14, n. 1, p. 25-47, 2011. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-010-9140-1>. Acesso em: 8 jan.2023.

HILL, H. C.; ROWAN, B.; BALL, D. L. Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. **American Educational Research Journal**, v. 42, n. 2, p. 371-406, 2005. Disponível em: <https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.3102/00028312042002371>. Acesso em: 8 jan. 2023.

ISODA, M. Lesson Study: Japanese problem solving approaches. *In*: SAMUI, K. (Org.). **Conference on replicating exemplary practices in Mathematics Education**. 2010a. <https://www.apec.org/docs/default-source/Publications/2010/7/Replicating-Exemplary-Practices-in-Mathematics-Education-among-APEC-Economies-July-2010/TOC/Masami-Isoda--Lesson-Study-Japanese-Problem-Solving-Approaches.pdf>

ISODA, M. Lesson Study: problem solving approaches in Mathematics Education as a Japanese experience. **Procedia Social and Behavioral Sciences**, v. 8, p. 17-27, 2010b. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042810021087>. Acesso em: 8 jan. 2023.

ISODA, M. Problem solving approaches in Mathematics Education as a product of Japanese Lesson Study. **Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia**, v. 34, n. 1, p. 2-25, 2011. Disponível em: <https://eric.ed.gov/?id=EJ961895>. Acesso em: 8 jan. 2023.

ISODA, M.; OLFOS, R. **El Enfoque de Resolución de Problemas: en la enseñanza de la matemática a partir del Estudio de Clases. Ediciones Universitarias de Valparaíso**. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso, 2009. Disponível em: <https://math-info.ciced.tsukuba.ac.jp/upload/ProblemSolvingIsodaOlfos.pdf>. Acesso em: 8 jan. 2023.

ISODA, M.; OLFOS, R. **Teaching multiplication with Lesson Study: Japanese and Ibero-American theories for international Mathematics Education**. Springer International Publishing, 2021. Disponível em: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-28561-6>. Acesso em: 8 jan. 2023.

KELCHTERMANS, G. Who I am in how I teach is the message: self understanding, vulnerability and reflection. **Teachers and Teaching**, v. 15, p. 257-272, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/13540600902875332>. Acesso em: 8 jan. 2023.

KELCHTERMANS, G; VANDENBERGHE, R. Teachers' professional development: a biographical perspective. **Journal of Curriculum Studies**, v. 26, n. 1, p. 45-62, 1994. Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0022027940260103?journalCode=tcus20>. Acesso em: 8 jan. 2023.

KILPATRICK, J.; SWAFFORD, J., FINDELL, B. (Ed.). **Adding it up: Helping children learn mathematics**. Washington: National Academy Press, 2001.

KNOWLES, G. J. Models for understanding pre-service and beginning teachers' biographies: Illustrations from case studies. *In*: GOODSON, I. F. (Org.). **Studying teachers' lives**. London: Routledge, 1992. p. 99-152.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. 33.ed. São Paulo: Cortez, 1994.

MAKINAE, N. The Origin of Lesson Study in Japan. *In*: 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education. **Proceedings of 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education**, 2010. Disponível em: <https://www.lessonstudygroup.net/lg/readings/TheOriginofLessonStudyinJapanMakinaeN/TheOriginofLessonStudyinJapanMakinaeN.pdf>. Acesso em: 8 jan. 2023.

MIMURA, K.; WATANABE, Y. Developing an evaluation framework in lesson study on active learning methods. 2021. Disponível em: https://members.aect.org/pdf/Proceedings/proceedings20/2020/20_21.pdf. Acesso em: 8 jan. 2023.

NEIRA, M. G. **Por dentro da sala de aula: conversando sobre a prática**. São Paulo: Phorte Editora, 2004.

OLFOS, R.; ISODA, M.; ESTRELLA, S. Más de una década de estudio de clases en Chile: hallazgos y avances. **Paradigma**, v. XLI, p. 190-221, 2020.
<https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p190-221.id871>.

PAULA, E. F. de; CYRINO, M. C. de C. T. Aspectos a serem considerados em investigações a respeito do movimento de constituição da Identidade Profissional de professores que ensinam matemática. **Educação**, v. 45, n. 1, p. 1-29, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.5902/1984644434406>. Acesso em: 8 jan. 2023.

REYS, B. J.; CHVAL, K.; DINGMAN, S.; MCNAUGHT, M.; REGIS, T. P.; TOGASHI, J. Grade-Level Learning Expectations: A New Challenge for Elementary Mathematics Teachers. **Teaching Children Mathematics TCM**, v. 14, n. 1, p. 6-11, 2007. Disponível em: <https://pubs.nctm.org/view/journals/tcm/14/1/article-p6.xml>. Acesso em: 8 jan. 2023.

SANT'ANNA, F. M. *et al.* **Planejamento de ensino e avaliação**. 11. ed. Porto Alegre: Sagra, 1998.

SHIMIZU, Y. Aspects of mathematics teacher education in Japan: focusing on teachers' roles. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 2, p. 107-116, 1999. Disponível em: <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.467.952&rep=rep1&type=pdf>. Acesso em: 8 jan. 2023.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986. Disponível em: <https://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.3102/0013189x015002004>. Acesso em: 8 jan. 2023.

SOUZA, M. A. V. F. **Lesson Study** - parte 1 - origem e principais características - Maria Alice. 2019. Vídeo. Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=z-S3g7Yup4c&t=1s>. Acesso em: 8 jan. 2023.

SOUZA, M. A. V. F.; WROBEL, J. S.; BALDIN, Y. Y. Lesson Study como Meio para a Formação Inicial e Continuada de Professores de Matemática - Entrevista com Yuriko Yamamoto Baldin. **Boletim GEPEN**, [S. l.], n. 73, p. 115-130, 2018. DOI: 10.4322/gepem.2018.020. Disponível em: <https://periodicos.ufrj.br/index.php/gepem/article/view/163>. Acesso em: 6 jan. 2023.

SOUZA, M. A. V. F.; WROBEL, J. S.; GAIGHER, V. R. Planejamentos colaborativos e reflexivos de aulas baseadas em resolução de problemas verbais de matemática. **Vidya**, Santa Maria, v. 37, n. 1, p. 51-73, jan./jun., 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/1929>. Acesso em: 6 jan. 2023

STIGLER, J. W.; HIEBERT, J. **The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom**. New York: Free Press, 2009.

TAKAHASHI, A. C. Characteristics of Japanese mathematics lessons. Tsukuba **Journal of Educational Study in Mathematics**, v. 25, p. 37-44, 2006. Disponível em: <http://www.collectedny.org/wp-content/uploads/2017/10/Takahashi-Characteristics-of-Japanese-Mathematics-Lessons-2006-1.pdf>. Acesso em: 8 jan. 2023.

TAKAHASHI, A. C. The Role of the Knowledgeable Other in Lesson Study: Examining the Final Comments of Experienced Lesson Study Practitioners. **Mathematics Teacher Education and Development**, v. 16, n. 1, p. 4-21, 2014. Disponível em: <https://eric.ed.gov/?id=EJ1046714> . Acesso em: 8 jan. 2023.

TAKAHASHI, A.; MCDUGAL, T. Collaborative lesson research: maximizing the impact of lesson study. **ZDM Mathematics Education**, v. 48, p. 513-526, 2016. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-015-0752-x>. Acesso em: 8 jan. 2023.

TAKAHASHI, A.; WATANABE, T.; YOSHIDA, M.; WANG-IVERSON, P. Improving content and pedagogical knowledge through Kyozaikenkyu. In: WANG-IVERSON, P; YOSHIDA, M. (Orgs.). **Building our understanding of lesson study: Research for Better Schools**. 2005. p. 101-110.

TAKAHASHI, A.; YOSHIDA, M. Ideas for establishing Lesson-Study communities. **Teaching Children Mathematics**, v. 115, n. 3, p. 241-242, 2004. Disponível em: <https://pubs.nctm.org/view/journals/mtlt/115/3/article-p241.xml>. Acesso em 8 jan. 2023.

WANDERLEY, R. A. J. **Algumas influências do Lesson Study para a formação do professor de matemática em aulas que promovam a construção do conceito de volume**. Dissertação (Mestrado) – Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2020. Disponível em: <https://ocs.ifes.edu.br/index.php/secimeducimat/viisecim/paper/view/4200>. Acesso em: 8 jan. 2023.

WANDERLEY, R. A. J.; SOUZA, M. A. V. F. Lesson Study como processo de desenvolvimento profissional de professores de Matemática sobre o conceito de volume. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 13 n. 33, p. 1-20. 2020. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/10302>. Acesso em: 8 jan. 2023.

WATANABE, T. Japanese Lesson Study in the United States: looking back and looking ahead. **Journal of the International Society for Design and Development in Education**, v. 3, n. 11, 2018. Disponível em: <https://www.educationdesigner.org/ed/volume3/issue11/article43/>. Acesso em: 8 jan. 2023.

WATANABE, T. The teaching and learning of fractions: a Japanese perspective. **Teaching Children Mathematics**, v. 12, n. 7, p. 368-374, 2006. Disponível em: <https://pubs.nctm.org/view/journals/tcm/12/7/article-p368.xml>. Acesso em 8 jan. 2023.

WATANABE, T., TAKAHASHI, A., YOSHIDA, M. Kyozaikenkyu: a critical step for conducting effective lesson study and beyond. In: ARBAUGH, F.; TAYLOR, P. M. (Orgs.). **Inquiry into Mathematics Teacher Education**. Cidade: Association of Mathematics Teacher Educators (AMTE), 2008. p. 131-142. https://www.researchgate.net/publication/288521412_Kyozaikenkyu_A_Critical_Step_for_Conducting_Effective_Lesson_Study_and_Beyond. Acesso em: 8 jan. 2023.

WATANABE, T.; LO, J.-J.; SON, J.-W. Intended treatment of fractions and fractions operations in mathematics curricula from Japan, Korea and Taiwan. *In*: SON, J.-W. (Org.). **What Matters?** Research Trends in International Comparative Studies in Mathematics Education. Springer International Publishing, 2017. p. 33-62. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-51187-0_2. Acesso em: 8 jan. 2023.

YOSHIDA, M. Using lesson study to develop effective blackboard practice. *In*: WANG-IVERSON, P.; YOSHIDA, M. (Orgs.). **Building our understanding of lesson study: Research for Better Schools**. 2005. p. 93-100.

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Graduação em Matemática – Universidade Federal do Espírito Santo
Educação Matemática – Universidade Federal do Espírito Santo
Psicologia da Educação Matemática – Universidade Estadual de Campinas
Instituto Federal do Espírito Santo
Grupo Colabora e Gepeme – Linha: Formação de Professores
alicevfs@gmail.com
<http://orcid.org/0000-0003-2038-813X>

Como citar o artigo:

SOUZA, M. A. V. F. Lesson Study e o Movimento de Transformação da Identidade Profissional de Professores do Colabora à luz da Complexidade, Dinamicidade, Temporalidade e Experiencialidade. **Revista Paradigma**, Vol. XLIV, Edición Temática Estudio de Clases: Contribuciones de la educación japonesa en diferentes países, mayo de 2023 / 159 – 186. DOI: <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p159-186.id1416>

Conteúdos matemáticos e pedagógicos: contribuições, limitações e desafios em edições do Lesson Study no Grupo Colabora

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza

alicevfs@gmail.com

<http://orcid.org/0000-0003-2038-813X>

Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes)

Vila Velha, Brasil.

Poliana Figueiredo Cardoso Rodrigues

polianacar@gmail.com

<http://orcid.org/0000-0002-2385-1727>

Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes)

Vila Velha, Brasil.

Camila Augusta do Nascimento Amaral

cam.amaral@yahoo.com.br

<http://orcid.org/0000-0002-5721-7783>

Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes)

Vila Velha, Brasil.

Recebido: 05/03/2023

Aceito: 17/04/2023

Conteúdos matemáticos e pedagógicos: contribuições, limitações e desafios em edições do Lesson Study no Grupo Colabora

Resumo

Esse trabalho discute principais contribuições, limitações e desafios demonstrados por professores em formação, nos diferentes conteúdos matemáticos e pedagógicos à luz do Lesson Study (LS) no Grupo Colabora. Especificamente, nos propusemos a conhecer conteúdos matemáticos e pedagógicos que foram apropriados, refinados ou refutados pelos membros do Colabora em edições do LS, e identificar insumos que foram destaque para contribuições, limitações e desafios para as formações de professores ao longo dos 10 anos de estudos e práticas. O aporte teórico foi baseado em autores japoneses sobre LS; Shulman, Ball, Thames, Phelps, Hill, Carrillo-Yañez e colegas para a Formação de Professores de Matemática. A pesquisa configurou-se como qualitativa, com apoio documental e bibliográfico. As contribuições residiram na ampliação de estratégias de ensino e possibilidades pedagógicas diversificadas. Houve aprofundamento, construção e reconstrução de diferentes conceitos matemáticos, a exemplo de frações e volume que se configuraram como limitações superadas por meio dos planejamentos em LS.

Palavras-chave: Colabora. Conhecimento do Professor. Lesson Study. Formação de professores.

Contenidos matemáticos y pedagógicos: contribuciones, limitaciones y desafíos en las ediciones de Lesson Study en el Grupo Colabora

Resumen

Este trabajo discute los principales aportes, limitaciones y desafíos demostrados por los docentes en formación, en los diferentes contenidos matemáticos y pedagógicos a la luz del Lesson Study (LS) en el Grupo Colaborativo. Específicamente, nos propusimos conocer contenidos matemáticos y pedagógicos que fueron apropiados, refinados o refutados por los integrantes de la Colabora en ediciones de la LS e identificar insumos que se destacaron por aportes, limitaciones y desafíos para la formación de docentes a lo largo de los 10 años. de

estudios y prácticas. El soporte teórico se basó en autores japoneses en LS; Shulman, Ball, Thames, Phelps, Hill, Carrillo-Yañez y colegas de Formación de profesores de matemáticas. La investigación se configuró como cualitativa, con sustento documental y bibliográfico. Los aportes residieron en la ampliación de estrategias didácticas y posibilidades pedagógicas diversificadas. Se profundizó, construyó y reconstruyó diferentes conceptos matemáticos, como fracciones y volumen, que se configuraron como limitaciones superadas a través de la planificación en LS.

Palabras-clave: Grupo Colabora. Conocimiento del profesor. Lesson Study. Formación de Profesores.

Mathematical and pedagogical contents: contributions, limitations and challenges in Lesson Study editions in the Collaborative Group

Abstract

This work discusses the main contributions, limitations, and challenges demonstrated by teachers in training in the different mathematical and pedagogical contents in the light of Lesson Study (LS) in the Collaborative Group. Specifically, we proposed to know mathematical and pedagogical contents that were appropriated, refined, or refuted by the members of the Collabora in editions of the LS and to identify inputs that were highlighted for contributions, limitations, and challenges for the formation of teachers throughout the ten years of studies and practices. Theoretical support was based on Japanese authors in LS; Shulman, Ball, Thames, Phelps, Hill, Carrillo-Yañez, and colleagues for Mathematics Teacher Training. The research was configured as qualitative, with documentary and bibliographic support. The contributions resided in the expansion of teaching strategies and diversified pedagogical possibilities. There was a deepening, construction, and reconstruction of different mathematical concepts, such as fractions and volume, configured as limitations overcome through planning in LS.

Keywords: Colabora Group. Knowledge of teacher. Lesson Study. Instruction of teachers.

Introdução

A gente se faz educador, a gente se forma, como educador, permanentemente, na prática e na reflexão sobre a prática.
(Paulo Freire)

A construção de aulas de matemática à luz do Lesson Study (LS) foi inaugurada no Brasil em 2010 (<https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/4412>) Mais tarde, surgiram trabalhos envolvendo a formação de professores que ensinam matemática baseados nesse *modus vivendi* japonês, com maior ênfase a partir de 2014 (RODRIGUES; AMARAL; SOUZA, 2023, no prelo).

Especificamente, no âmbito do Grupo de Pesquisa em Formação Colaborativa de Professores – Colabora, do qual somos parte ao lado de professores e pesquisadores da Educação Matemática, o desenvolvimento de aulas apoiadas no LS teve início em meados de 2013, visando, principalmente, à formação e à aprendizagem ampla e profunda de conteúdos matemáticos e pedagógicos.

Embora o Colabora trabalhe com LS há mais de dez anos, a apreensão dos insumos desse modo japonês de formar professores foi sendo incorporado e praticado em

investigações na medida das captações de informações, assimilações e compreensões emersas de estudos e diálogos com educadores japoneses. Como consequência, podemos dizer que as primeiras investigações no Colabora foram revestidas de características do LS, e não propriamente e integralmente fiel a tudo o que é indicado ser parte de um LS genuíno japonês (e.g., FERNANDEZ; YOSHIDA, 2004; FUJII, 2014; TAKAHASHI; MCDUGAL, 2014; TAKAHASHI; YOSHIDA, 2004; TAKAHASHI, 2006; SOUZA; POWELL, 2023).

Essa trajetória de apropriação e refinamento de conhecimentos do LS sobre os diversos temas matemáticos e pedagógicos desenvolvidos no Colabora foi marcada por acertos e equívocos sobre a aprendizagem de professores e alunos que, após dez anos de estudos e práticas, nos habilitam reconhecê-los. Nem todos esses acertos e equívocos estão divulgados em canais escolares, acadêmicos e científicos, pelas limitações de tempo e espaço que a vida profissional nos impõe. Pela importância do tema para a comunidade da Educação Matemática e, especialmente, para a formação de professores, importa responder quais conteúdos matemáticos e pedagógicos foram apropriados, refinados ou refutados por membros do Colabora, em edições do LS, e identificar insumos que foram destaque para contribuições, limitações e desafios ao longo de dez anos de estudos e práticas no Colabora. Os insumos a que nos referimos têm a ver com idiossincrasias que educadores japoneses informam como característicos do LS e, portanto, são importantes serem mencionados. Optamos por não apenas sinalizar esses pontos característicos, mas informá-los como são nomeados na língua japonesa entre parênteses (e.g., *kyozaiikenkyu*, *bansho*, *shidosha*, etc.), visando a familiarizar e comunicar o leitor sobre termos tão comuns em textos escritos por autores japoneses.

As respostas emergiram de um empenho metodológico baseado em apoio documental e bibliográfico, a partir de 14 trabalhos investigativos realizados no seio do Colabora e apresentados no Quadro 1 nos itens: tema motivador; quantidade de professores-formadores (PF) e professores em formação (alunos-professores-AP); ano de início e; duração do LS em semanas. A pesquisa bibliográfica apoiou-se em fontes científicas com propósitos específicos (GIL, 2021). No nosso caso, o esteio veio, nomeadamente, de livros e artigos científicos. O lado documental se valeu de toda sorte de registros sonoros, pictóricos, escritos e não escritos que trouxeram ao primeiro plano dados para a investigação. As categorias de análise foram elencadas com base nos conteúdos matemáticos e pedagógicos codificados e emersos de registros verbais e escritos em áudios, vídeos e

planejamentos nas edições de LS. Três pesquisadoras – autoras deste artigo – codificaram os dados e os discutiram, cuja concordância culminou nos resultados apresentados adiante.

De modo geral, as primeiras motivações para as edições de LS foram marcadas pela constatação de pouca experiência de alunos (do básico e superior) com resolução de problemas de matemática. Essa principal motivação foi gatilho para oito dos 14 LS no Colabora. Os problemas não eram triviais por serem considerados mal estruturados (STERNBERG, 2000; SOUZA, 2012), ou seja, quando não se sabe imediatamente a sequência de ações para solucioná-los, devendo o resolvidor lançar mão de todo o arcabouço de sua estrutura cognitiva para resolvê-lo. Todas as outras edições de LS foram motivadas por alguma dificuldade com conteúdo matemático e(ou) pedagógica quando de sua condução com alunos. Os encontros presenciais para planejamentos oscilavam entre duas e três horas, complementados com muitas interações por e-mails, WhatsApp, ligações telefônicas, etc.

Ademais, frequentemente, algumas edições de LS contaram com apoio e experiência de colegas professores de outras universidades quanto ao conteúdo e prática de ensino (*e.g.*, Ufes, Ufscar, Uesb, Unesp, Rutgers University) em edições construídas presencialmente e apenas uma a distância – a matemática na Astronomia. Além disso, nem todas as edições foram divulgadas em revistas, congressos ou outros meios rotineiros de divulgação para comunidade científica específica pelas limitações temporais. Deveriam ter sido, como o fazem educadores japoneses, vez que a popularização das aulas são uma maneira de contribuir com aprimoramento das aulas. Os teores dos LS poderiam alimentar ou subsidiar outros fóruns de formação de professores quanto aos conteúdos matemáticos e(ou) pedagógicos, cujas especificidades teóricas importam destacar no próximo tópico.

Formação de Professores: conhecimentos pedagógicos e de conteúdos matemáticos

Educação, não há nada maior no mundo. A educação moral de uma pessoa se estende a 10 mil pessoas. A educação de uma geração se expande por uma centena de gerações.
(Jigoro Kano)

É notório o interesse em âmbito nacional e internacional de pesquisadores e grupos de formadores de professores em entender e discutir questões relacionadas ao conhecimento profissional do professor de Matemática. Essas questões versam, principalmente, sobre o desenvolvimento de estudos associados ao reconhecimento e identificação do conhecimento do professor de Matemática de forma a impactar na melhoria da qualidade do ensino (SCHEINER *et al.*, 2017).

A atividade de ensinar matemática exige do professor conhecimento do conteúdo a ser ensinado e conhecimento pedagógico – temas da teoria do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo de Shulman (1986, 1987). Contudo, mesmo ciente de que o domínio do conteúdo é indispensável à formação do professor, a atividade de ensinar exige atenção especial para aspectos do saber pedagógico do conteúdo (RANGEL; GIRALDO; MACULAN, 2015; BISOGNIN, 2021; SOUSA; COUTO, 2021).

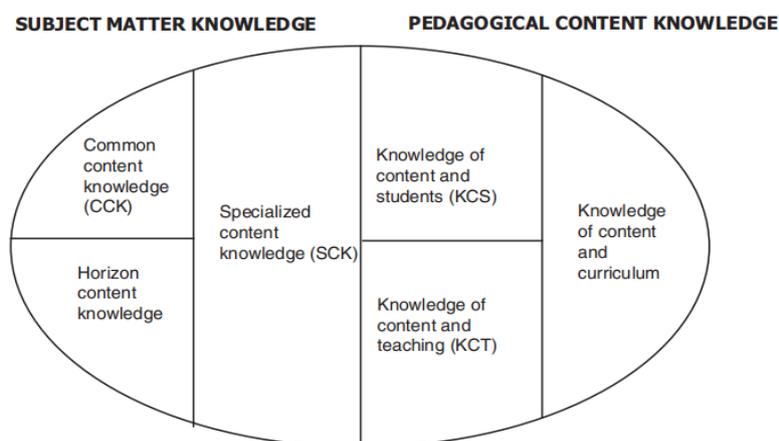
Nos estudos de Shulman (1986, 1987) são apresentados três domínios que caracterizam os conhecimentos dos professores, com especial ênfase no conteúdo específico, cujas siglas e termos são mantidas originais na língua inglesa: (1) *subject matter content knowledge* (SMCK) – esses conhecimentos referem-se à compreensão de aspectos relacionados a conceitos e procedimentos, em que o professor deve ser capaz de relacionar verdades (proposições) em sala de aula e explicá-las teórica e experimentalmente. O professor precisa compreender o porquê das proposições para que possam ser justificadas; (2) *pedagogical content knowledge* (PCK) – esse conhecimento está ancorado em aspectos do conteúdo associados à forma de ensinar, e (3) *curricular knowledge* (CK) – pertence ao campo dos conhecimentos ligados a programas e materiais instrucionais disponíveis para cada nível de ensino, de forma que os professores sejam capazes de analisar sua indicação e contraíndicação de uso em cada situação proposta em sala de aula.

Shulman (1986), ao discutir os conhecimentos docentes, apresenta elementos para essa reflexão, entre eles: o conjunto de habilidades didáticas, a compreensão do conteúdo, os valores e as ações de docentes em sala de aula. A reunião desses elementos compõe a formação do professor na perspectiva desse autor. Quanto à formação do professor, Shulman (2014) declara que acontece por meio: (1) de formação acadêmica formal; (2) de materiais e entorno educacional; (3) de formação acadêmica na área de conhecimento; e, (4) na sabedoria da prática.

A formação acadêmica do professor para Shulman (2014) importa: (1) no estabelecimento de processos de ensino e de aprendizagem ao desenvolver sua ideia de como seria uma educação de qualidade; (2) no material e no entorno educativo que dizem respeito ao currículo e às determinações dos processos educacionais, de modo a estabelecerem elementos para que ocorra o processo de ensino e aprendizagem; e (3) na formação acadêmica na área de conhecimento que envolve o conteúdo a ser ensinado como fonte primária. Por fim, a sabedoria da prática são conhecimentos adquiridos nas ações do dia a dia, com observações e ideias compartilhadas.

A discussão de Shulman (1986) é compreendida por Ball, Thames e Phelps (2008), Hill *et al.* (2008) e Hill *et al.* (2011) como conhecimentos e habilidades essenciais para favorecer e complementar a atuação do professor. De forma geral, Ball, Thames e Phelps (2008) desenvolveram, a partir de estudos de Shulman (1986, 1987), o modelo de conhecimento de professores conhecido como *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT). Para Ball, Thames e Phelps (2008), os conhecimentos necessários ao professor são divididos em dois domínios e cada um deles subdividido em três subdomínios: (1) *subject matter knowledge* – (1.1) *common content knowledge* (CCK); (1.2) *horizon content knowledge*; (1.3) *specialized content knowledge* (SCK) e; (2) *pedagogical content knowledge* – (2.1) *knowledge of content and students* (KCS); (2.2) *knowledge of content and teaching* (KCT) e (2.3) *knowledge of content and curriculum* (vide Figura 1).

Figura 1 – Domínios do MKT



Fonte: Ball, Thames e Phelps (2008, p. 403).

Ball, Thames e Phelps (2008) definem o *common content knowledge* (CCK) como aqueles utilizados em contextos que não são exclusivos do ensino, assumem um caráter mais utilitário (*e.g.*, como foi o caso do LS de área e perímetro, cujos estudos ampliaram a compreensão sobre esses conceitos para polígonos não retangulares). O *horizon content knowledge* está relacionado ao currículo, com uma visão referente à evolução dos conceitos matemáticos ao longo dos anos escolares (*e.g.*, no LS de divisão, mesmo no ensino médio, a professora apresentou demanda referente ao conteúdo de forma evolutiva relacionada ao nível de conhecimento da turma).

O *specialized content knowledge* (SCK) requer apropriação mais ampla e profunda de conceitos matemáticos, os quais instrumentalizam o professor em aspectos mais internos da matemática (*e.g.*, identificar perspectivas alternativas da partição para o ensino de frações). Pelo lado do *pedagogical content knowledge*, Ball, Thames e Phelps (2008)

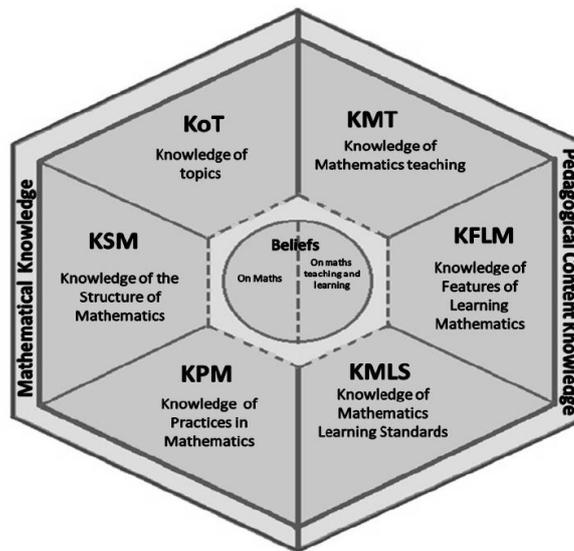
definiram como a maneira de os conteúdos serem construídos e articulados – explicações, exemplos, demonstrações – considerando as experiências e bagagens cognitivas dos alunos. O conhecimento denominado por esses autores como *knowledge of content and students* (KCS) combina conhecimentos da matemática com a maneira como os alunos aprendem. O professor deve então, se preparar para esclarecer possíveis dúvidas, equívocos e reações dos alunos (*e.g.*, no LS de frações foi necessário que os professores revissem seus conhecimentos matemáticos e redesenhassem suas práticas para serem capazes de preparar para o LS).

Além disso, o *knowledge of content and teaching* (KCT) deve considerar o conteúdo associado ao ensino e vincular a matemática às estratégias de abordagem (*e.g.*, membros do Colabora tiveram oportunidade de desenvolver e aplicar o LS de fração utilizando as barras de Cuisenaire que será descrito nos resultados). Por fim, o *knowledge of content and curriculum* completam o conhecimento pedagógico ao equivalerem à construção das ideias matemáticas em consonância com as que foram construídas durante a escolaridade.

Ao corroborarem com os seis conhecimentos essenciais à profissão de professor, Hill *et al.* (2008) definem o Conhecimento Matemático para Ensinar não somente como a associação entre o conhecimento da matemática e o que apoia o ensino, mas acrescentam que a qualidade da matemática no ensino inclui analisar o processo pedagógico na construção de conceitos, visto que para o êxito da aprendizagem importa pouco ter uma preocupação singular com estratégias pedagógicas se a essência das explicações for confusa, distorcida ou com mínima substância matemática. Os estudos de Hill *et al.* (2008) e Hill *et al.* (2011) também destacam a relevância de um olhar cuidadoso sobre o processo de ensino.

Estudos dos autores antes citados inspiraram novas pesquisas em Educação Matemática preocupadas com o desenvolvimento e melhoria da Educação e do Ensino. Nessa seara, destacamos o estudo de Carrillo-Yañez *et al.* (2018) que apresenta um modelo intitulado *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK), que considera os conhecimentos do professor de forma holística, ou seja, considera relevantes o estudo dos saberes e como o professor os coloca em prática. Para isso, Carrillo-Yañez *et al.* (2018) subdividem os conhecimentos em dois domínios: *Mathematical Knowledge* – MK e *Pedagogical Content Knowledge* – PCK. Cada domínio é subdividido em três dentro de uma perspectiva de crenças dos professores sobre a matemática (Figura 2). Segundo Carrillo-Yañez *et al.* (2018), as crenças são representadas no centro da figura hexagonal para destacar a relação entre elas e os conhecimentos apresentados.

Figura 2 – Domínios e subdomínios do MTSK



Fonte: Carrillo-Yañez *et al.* (2018, p. 6).

O hexágono da Figura 2 subdivide o MTSK em dois domínios de conhecimento e cada um subdividido em três. O domínio (1) *Mathematical Knowledge* (MK), tem subdomínios: (1.1) *Knowledge of Topics* (KoT) – esse conhecimento se refere aos componentes específicos da matemática, de acordo com o currículo de cada país; está associado aos conhecimentos dos conteúdos, como teoremas e conceitos (*e.g.*, fração, volume, perímetro, área – temas abordados em LS no Colabora apresentado em mais detalhes na próxima seção). A preocupação do KoT é com o conhecimento teórico do professor. Ele deve ser capaz de saber fazer (resolver) e contempla também o conhecimento relacionado a diferentes formas de representar a matemática nos diferentes tipos de registros, como gráfico e pictográfico (*e.g.*, o LS sobre o problema do Café com Leite).

O subdomínio (1.2) *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) diz respeito ao conhecimento das conexões que devem ser estabelecidas entre os itens da matemática. Esse subdomínio considera somente as relações sequenciais matemáticas, não priorizando relações curriculares. Carrillo-Yañez *et al.* (2018) estabelecem uma conexão interconceitual no KSM, considerando uma sequência de conteúdos matemáticos a partir de relações de aumento de complexidade ou simplificação.

Ao descreverem o subdomínio (1.3) *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM), Carrillo-Yañez *et al.* (2018) definem ‘prática’ mediante diferentes usos do termo pelos pesquisadores da área de Educação Matemática. Nesse subdomínio, o objeto da ‘prática’ é a própria matemática, e, por conseguinte, o cerne do estudo está no processamento da matemática e não na maneira como ela será ensinada. Aqui interpretamos a inteligência de

Carrillo-Yañez *et al.* (2018) como o conhecimento do professor em saber demonstrar, justificar, dar exemplos (*e.g.*, no LS de frações houve um momento de discussão e aprendizagem referente ao processo de ensino de frações por medição).

Carrillo-Yañez *et al.* (2018), concordam com Shulman (1986, 1987) sobre o domínio *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), e avançam com ideias sobre questões mais relacionadas à prática em sala de aula. Carrillo-Yañez *et al.* (2018) enfatizam que os conhecimentos para o ensino precisam de estar a todo momento articulados com o MK. Assim sendo, eles (2018, p.18, tradução nossa) não discutem nesse domínio “conhecimentos pedagógicos gerais aplicados a contextos matemáticos, mas apenas àqueles conhecimentos cujo conteúdo matemático determina o ensino-aprendizagem que se realiza.”

O domínio (2) PCK é subdividido por Carrillo-Yañez *et al.* (2018) em (2.1) *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM) – nesse subdomínio os autores consideram os conhecimentos com foco no conteúdo escolar matemático. Aqui é considerada como fonte de conhecimento a experiência dos professores adquirida ao longo dos anos. O professor deve estar atento como os alunos pensam e constroem o conhecimento, e, com isso, “levam em consideração o conhecimento do professor sobre a maneira de raciocinar e proceder em matemática de seus alunos (em particular, seus erros, áreas de dificuldades e equívocos)” (CARRILLO-YAÑEZ *et al.*, 2018, p. 19, tradução nossa). O KFLM abrange o entendimento dos alunos relacionados a dificuldades e facilidades que, por ventura, possam ter relação aos conteúdos. No KFLM é possível discutir aspectos emocionais da aprendizagem – o que motiva um aluno, quais são seus interesses –, e também discussões sobre procedimentos e diferentes estratégias utilizadas pelos alunos para resolver problemas matemáticos.

O subdomínio (2.2) *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT) se conecta a saberes teóricos relacionados ao ensino de matemática adquiridos por meio de investigação (*e.g.*, Lesson Study, Engenharia Didática), ou mesmo saberes pessoais incorporados pela experiência pessoal. Esse subdomínio também contempla conhecimentos de recursos e materiais didáticos. Carrillo-Yañez *et al.* (2018) destacam que, além da discussão sobre a importância da utilização dos recursos e materiais didáticos, esse subdomínio sublinha como eles podem ser potenciais para o ensino, minimizando possíveis dificuldades.

No subdomínio (2.3) *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS), o professor adquire conhecimento curricular (conhecimento necessário para a primeira etapa do ciclo do LS) dos conteúdos matemáticos a serem ensinados. De acordo com Carrillo-

Yañez *et al.* (2018, p. 22, tradução nossa), o conhecimento do professor inclui “tudo o que o aluno deve ou é capaz de alcançar em determinado nível, em combinação com o que o estudante tem previamente estudado e as especificações para níveis subsequentes.”

A Figura 2 ainda introduz crenças e concepções relacionadas aos conhecimentos do professor. Carrillo-Yañez *et al.* (2014), convencidos pelos resultados de diversas investigações, ressaltam a importância das concepções. Essas investigações apontam deficiências em saberes específicos, a partir do que o pesquisador considera como conhecimento necessário, fundamental ou desejável para o professor de matemática. Dessa forma, as “concepções de matemática do pesquisador, seu ensino e aprendizagem influenciam constantemente o processo de tomada de decisão e a análise e interpretação das produções que compõem suas pesquisas” (CARRILLO-YAÑEZ *et al.*, 2014, p. 88, tradução nossa). Acreditamos, ao lado de Carrillo-Yañez *et al.* (2014), que as concepções do professor sobre a matemática e sua prática de ensino se conectam diretamente com o conhecimento que ele estabelece em cada um dos domínios e subdomínios do conhecimento do professor.

Esse arcabouço teórico subsidiou o processo de coleta de dados e posterior análise das edições de LS no Colabora (Quadro 1), que inaugura a próxima seção.

Resultados

*Se você quer melhorar a educação, reúna professores para estudar os processos de ensino e aprendizagem na sala de aula.
(James W. Stigler)*

Quadro 1 – Trabalhos investigativos do Colabora

Item	Tema motivador	PF	AP	Início (ano)	Tempo (sem.)
1	Problema: Idade do avô	5	9	2014	15
2	Problema: Escada rolante	5	9	2014	15
3	Problema: Pilhas	5	9	2014	15
4	Problema: Formiga	5	9	2014	15
5	Problema: Café com leite	5	12	2016	8
6	Conceito de área e perímetro	4	2	2017	6
7	Algoritmo da operação de divisão	4	3	2017	6
8	Problema: Geometria do táxi	5	17	2017	9
9	Problema: Peixes para contar e estimar	5	17	2018	5
10	Problema: Canil	2	7	2018	5
11	Conceito de volume	1	8	2018	12
12	Conceito de fração pela perspectiva de medição	5	4	2019	15
13	Conceito de fração pela perspectiva de medição	2	10	2020	12
14	Matemática na Astronomia	1	8	2020	41

Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

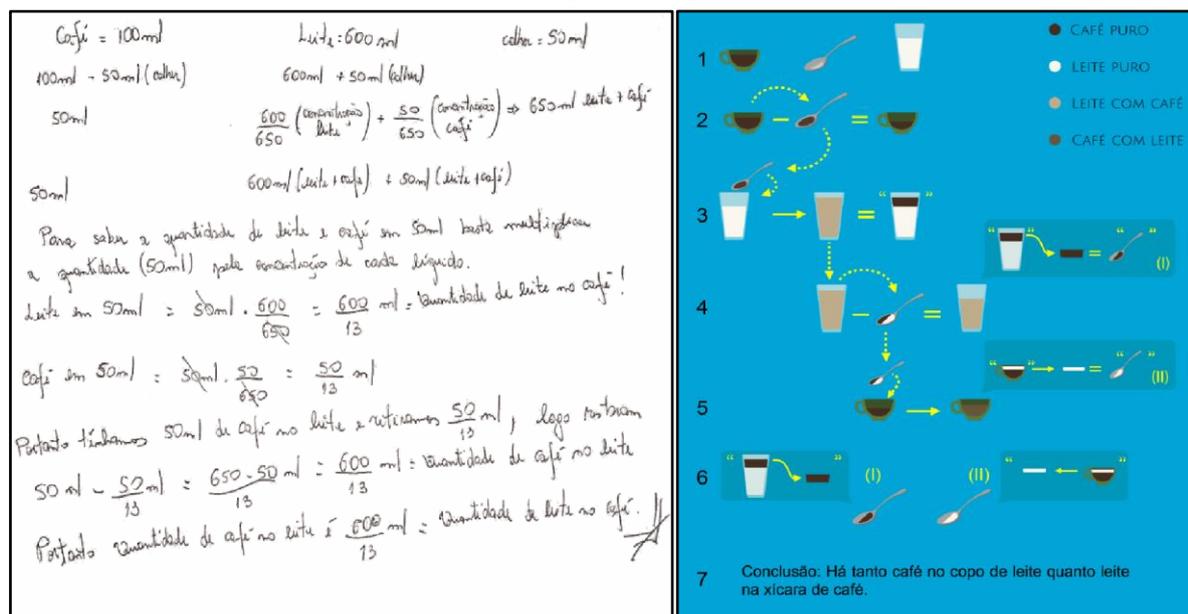
A motivação para planejamentos de aulas baseadas em problemas mal estruturados repousava em argumentos de que os alunos deveriam desenvolver mais experiência com o processo de solução e desafio de situações às quais não estavam habituados. A resolução de problemas parecia tomar lugar como uma atividade complementar na disciplina de Matemática. Embora as alegações para esse desenvolvimento estivessem voltadas para os alunos, os professores mostraram necessidades de ampliação e refinamento de estratégias e do modo de condução dessas aulas. Esse fato ocorreu em todas as edições de LS baseadas em problemas mal estruturados (Quadro 1: itens 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10) (KFLM). Nenhum dos oito problemas tinham objetivo imediato de aprendizagem de algum conteúdo matemático. Ao contrário, por serem problemas mal estruturados, requeriam dos resolvidores consultas mentais a tudo o que aprenderam durante sua escolaridade e que poderiam auxiliá-los para pavimentação de um ou mais caminhos para solução.

Em todos os problemas, houve intenso investimento colaborativo no Grupo para compreensão do problema, sobretudo o que não estava totalmente explícito no texto. Vejamos o problema do Café com Leite (SOUZA; WROBEL, 2017, p. 23)

Suponha que você tenha uma xícara cheia de café do respectivo e saborosíssimo líquido negro e um copo alto cheio de leite, cerca de 6 vezes o tamanho da xícara. Mergulhe uma colher de chá na xícara de café e despeje o seu conteúdo no copo de leite. Depois, volte a mergulhar a mesma colher no copo que agora tem a mistura e devolve-a à xícara de café. Completada essa operação, qual destas afirmações está certa? 1) Há mais café no copo de leite do que leite na xícara de café. 2) Há tanto café no copo de leite quanto leite na xícara de café. 3) Há mais leite na xícara de café do que café no copo de leite.

Nesse problema, as maiores dúvidas foram: “A altura ou volume do copo e da xícara fazem diferença?”; “Ao mergulharmos a colher de chá na xícara, o líquido vai transbordar?”; “Importa que o copo tenha cerca de 6 vezes o tamanho da xícara?”. Essas e outras dúvidas foram preocupação do Grupo e alimentaram o planejamento visando a conduzir o raciocínio dos alunos em suas reações por meio de questionamentos. A diversidade de estratégias (KMT) também foi objeto de atenção. Cada membro apresentou seu modo de raciocinar. Independentemente de estarem equivocados ou não, o fato é que o Grupo apresentou diversidade de visões: uso de porcentagens, atribuição de valores numéricos, álgebra considerando o copo seis vezes o tamanho da xícara, álgebra considerando o copo “A” vezes o tamanho da xícara, uso de analogia discreta e por meios pictóricos. Após, muito esforço e dedicação, o Grupo reuniu diversos modos de resolvê-lo. Duas estratégias estão expostas na Figura 3.

Figura 3 – Duas estratégias para resolução do problema do Café com Leite: Atribuição de valores numéricos (à esquerda) e pictórico (à direita)



Fonte: Souza e Wrobel (2017, p. 44 e 76, respectivamente).

Essa experiência fez com que os alunos-professores vivessem a formação e não apenas recebessem passivamente informação. Em termos de conteúdo, as edições de LS baseadas em problemas mal estruturados trouxeram diversidade de modos de raciocinar matematicamente (SCK). Não exatamente em conteúdo específico, mas vislumbrando e ampliando possibilidades outras trazidas por diferentes membros. Foi válido, no caso do Café com Leite, iniciar por atribuição de valores numéricos ou percentuais, como apoio inicial, mas todos sabiam que não poderíamos nos contentar com pouco, era preciso avançar para soluções genéricas, o que ocorreu a partir da intensa colaboração entre os membros.

Em termos pedagógicos, o Grupo planejou o uso da lousa (em japonês, a organização e disposição da produção de conhecimentos da aula na lousa é nomeada por *bansho*) e viveu as dificuldades de formulação de questionamentos (em japonês, a condução de aulas por questionamentos é nomeada de *hatsumon*) como principal condução do raciocínio e de respostas às reações e investidas dos alunos. Perguntar “O que você entendeu?” para alunos, dificilmente os leva a raciocinar. Ao contrário, perguntar “Quais são os dados do problema?” e “O que se quer como resposta?” ajuda muito mais. Além disso, os protocolos dos professores demonstraram exercício de auto policiamento para não responderem às próprias perguntas em sala de aula.

Sabíamos que deveríamos reservar momentos finais da aula para a síntese pelos alunos (em japonês, *neriage* significa a síntese da aprendizagem dos alunos ao final de uma

aula), mas esse item foi precariamente levado a efeito, pois o tempo de aula foi insuficiente. Em outras palavras, o controle do tempo de aula para as ações não foi bem conduzido pelo Grupo. Faltou experiência!

A resolução de problemas não foi abandonada em edições sobre algum conteúdo específico, mas imersa em atividades que priorizassem alguma matemática específica. O uso de problemas ou de situações problemas não foram explicitamente e formalmente dispostos como nas oito edições com problemas mal estruturados, mas sempre estiveram presentes, como defendem autores e educadores japoneses (SHIMIZU, 1996; ISODA; OLFOS, 2009). Os LS sobre área e perímetro (MELLO; SOUZA; WROBEL, 2022), operação de divisão (CAMPOS *et al.*, 2021), volume (WANDERLEY; SOUZA, 2020), frações (AMARAL, 2021; AMARAL; SOUZA; POWELL, 2021) e matemática na Astronomia (MENEGHEL *et al.*, no prelo) são exemplos.

Especificamente os LS sobre área, perímetro e volume contaram com aprendizagens originadas de artigos científicos e dissertações (em japonês, *kyozaiikenkyu* tem a ver com estudo do material para a aula, de modo amplo) que ensinaram que esses temas deveriam seguir uma sequência de ensino por comparação, medição e produção (MELLO, 2018; WANDERLEY, 2019) (KMT). Curiosamente, o aprofundamento no estudo do conteúdo veio a reboque da pedagogia do tema. Em outras palavras, a compreensão dos conteúdos ocorreu com a aprendizagem de suas pedagogias (KCT). Essa experiência deixa a mensagem de que um LS não é engessado ou necessariamente sequencial em seus insumos, mas podendo acontecer de diferentes modos, desde que haja aprendizagem de conteúdos curriculares e de sua prática de ensino. Mais ainda, LS não dissocia a experiência formativa (que lhe é nuclear), da investigativa (o professor se torna um “pesquisador de aulas” e isso é diferente de como geralmente é concebido um professor-pesquisador pela comunidade científica da Educação).

No caso do LS sobre área e perímetro (MELLO; SOUZA; WROBEL, 2022), o Grupo aprendeu a compará-los por unidades de medida não padronizadas (*e.g.*, o quadradinho do geoplano como unidade de área e o lado desse quadradinho como unidade de comprimento; uso de barbantes coloridos, etc.). Houve entendimento da inexistência de relações de dependência entre áreas e perímetros e ampliaram compreensões sobre esses conceitos para polígonos não retangulares. Nessa esteira, também houve nesse LS o desenvolvimento do *common content knowledge* (CCK) no processo formativo dos professores. Para o LS de volume, as principais apreensões matemáticas foram sobre discernimento dos conceitos de

capacidade e volume, e o conceito de volume associado ao de massa, área e densidade (WANDERLEY; SOUZA, 2020). Ambos LS proporcionaram alargamento do conhecimento especializado, principalmente. Destacamos, também, que o LS de área e perímetro e o de volume são exemplos de formações de professores desenvolvidas pelo grupo Colabora que proporcionaram o desenvolvimento do conhecimento que Carrilho-Yañez *et al.* (2018) definem como *Knowledge of Topics* (KoT).

O LS sobre divisão (CAMPOS *et al.*, 2021) nasceu da constatação de uma professora do ensino médio brasileiro sobre a incompreensão da operação de divisão de seus alunos. Ademais, o repertório da professora estava restrito a um único modo “telegráfico” de ensinar. Os membros do Colabora, inicialmente, também não apresentaram alternativas para aquela aprendizagem. Esses fatos motivaram a realização de uma formação em LS, que não só proporcionou momentos de discussão e aprendizado sobre divisão, mas uma formação de professores em que foi possível discutir o *horizon content knowledge* (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). No começo, todos se debruçaram sobre materiais científicos que versavam sobre o tema para alimentar debates no Grupo. Paralelamente, uma professora solicitou que cada membro, individualmente, dividisse 540 por 12. Os diferentes modos de operar muniram o Grupo de estratégias diversificadas a serem oferecidas aos alunos (KFLM). Esses modos, reunidos às indicações de artigos científicos, foram nominados e adotados pelo Grupo como: algoritmo padronizado, aproximação regressiva, aproximação progressiva, decomposição e método americano. Depois disso, o Grupo elaborou quatro problemas que explorassem: (1) Dividendo e divisor com números naturais e sem zero no quociente; (2) um zero no quociente; (3) dois zeros no quociente; (4) um número não inteiro no quociente e vírgula seguida de um zero. Esses quatro modos de divisão não foram aleatórios, mas emersos de um diagnóstico realizado pela professora regular daqueles alunos.

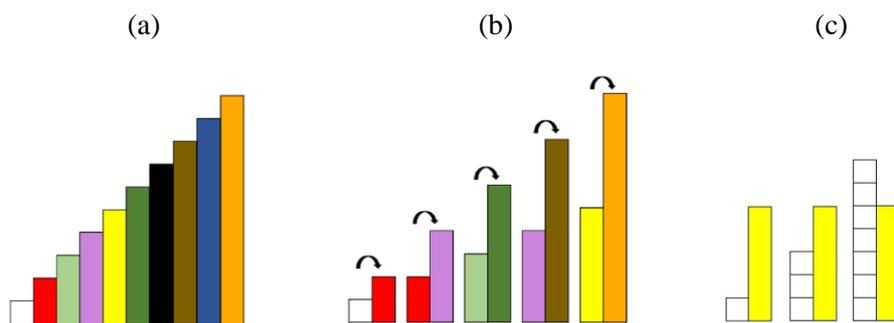
Particularmente, o estudo com frações (AMARAL, 2021; AMARAL; SOUZA; POWELL, 2021) foi recorrentemente trazido às discussões no Grupo (e fora dele), pela importância e capilaridade que o tema possui na Matemática e em outras Ciências. Tradicionalmente aprendemos a pensar nas frações singularmente como divisão em partes iguais, ou seja, em uma perspectiva parte-todo (KPM). O Grupo aprendeu que essa singularidade é frágil para apreensão do conceito de modo amplo, gerando equívocos (*e.g.*, alunos são flagrados declarando $5/7 = 3/4 + 2/3$) que impactam, por exemplo, na compreensão de frações impróprias (*e.g.*, alunos entendem que a quantidade de partes deve ser sempre menor que a quantidade total de partes), na comparação de frações (*e.g.*, alunos declaram $3/5 < 3/8$ porque $5 < 8$) e em operações aritméticas sem compreensão de seus

algoritmos (e.g., alunos memorizam o algoritmo da divisão de frações sem compreendê-lo). Todas essas questões reafirmam quanto em um processo formativo de professores é necessária apropriação do *specialized content knowledge* (SCK). Nesse tema, Ball, Thames e Phelps (2008) destacam como conhecimentos necessários aos professores e que foram objeto de discussão e busca por respostas: “Por que conservamos a primeira fração e multiplicamos pelo inverso da segunda para dividirmos frações?”, “Como comparar frações com denominadores e numeradores diferentes?”. No LS de frações houve muito investimento dos professores em estudos para construção e (re)construção de conceitos, reforçando o que Carrillo-Yañez *et al.* (2018) definem como conhecimento necessário ao professor – *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM).

Estudos (*kyozaikenkyu*) no Colabora mostraram que alunos aproveitam o conceito de magnitude dos números naturais e o aplicam no campo dos números racionais indiscriminadamente, ou seja, empregam conceitos e propriedades dos naturais nos racionais (KMT). Durante o LS sobre frações, os professores ampliaram o *knowledge of content and students* (KCS), a partir de reflexões conjuntas e com apoio do professor e pesquisador Arthur Powell, que atuou como um *shidosha* (*shidosha*, em japonês, que dizer pessoa experiente no conteúdo e na prática de ensino de algum conteúdo curricular, no nosso caso, de frações). O Grupo aprendeu a trabalhar o conceito de fração pela perspectiva de medição, cuja noção remete à ontologia das frações como um problema de medir quantidades, que é a comparação multiplicativa de pares de magnitudes. A perspectiva de medição possui ontologia diferente da construção histórica de parte-todo, não oferecendo as dúvidas e equívocos que apresentamos nesse tema.

Em termos pedagógicos, o Grupo trabalhou com as barras de Cuisenaire no LS de frações – um meio que se mostrou relevante no processo formativo de professores como aprimoramento do *knowledge of content and teaching* (KCT). As mesmas ações poderiam ter sido realizadas com outros recursos (e.g., barbantes, tiras de papel, etc.). Como ilustração, a Figura 4a apresenta as barras; a Figura 4b esboça relações da fração $1/2$ pela perspectiva de medição e, a Figura 4c retrata a passagem natural das frações próprias para impróprias – $1/5$, $3/5$ e $7/5$.

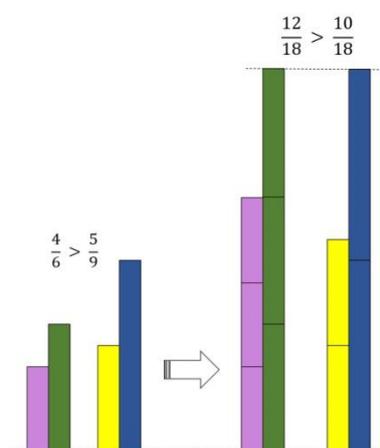
Figura 4 - (a) Barras de Cuisenaire; (b) Relações de $1/2$ medidas com as barras de Cuisenaire; (c) Passagem de frações próprias para impróprias



Fonte: Amaral (2021, p. 31, 36 e 58, respectivamente).

A comparação de frações com numeradores e denominadores diferentes também é facilitada pela perspectiva de medição, oferecendo entendimento de propriedades particulares para os números racionais em relação aos números naturais. A Figura 5 esboça a comparação das magnitudes das frações $4/6$ e $5/9$ pelo entendimento de $12/18$ e $10/18$. Observe o leitor que esse modo de conceber frações favorece entendimento de que $4/6$ é maior do que $5/9$, embora 6 seja menor do que 9.

Figura 5 – Comparação das magnitudes das frações $4/6$ e $5/9$



Fonte: Amaral (2021, p. 48).

Toda a pedagogia para construção de conceitos que envolvem frações pela perspectiva de medição pode ser trabalhada pela abordagem 4A-Instructional Model de autoria do Prof. Powell que inspiraram o planejamento de aulas nesse conteúdo pelos professores durante o *kyozaiikenkyu*. O 4A-Instructional Model reúne quatro ações: Atuais, Virtuais, Escritas, Formalizadas. Embora haja um sequenciamento das quatro fases, é possível, e provável, que elas não ocorram de modo linear, a depender do domínio dos alunos em cada fase.

Em suma, o LS sobre frações levou membros do Colabora a reverem seus conhecimentos matemáticos no tema e a redesenharem suas práticas de ensino. O Grupo demonstrou convencimento sobre a refutação da singularidade e introdução do estudo de frações pela perspectiva parte-todo. Houve, igualmente, constatação de limitações nesse tema, levando-os ao alargamento de suas concepções (KFLM). Esses fatos foram facilitados, principalmente, pelo estudo do material (*kyozaiikenkyu*), que congrega aprendizagem profunda sobre um tema e, pela atuação e acompanhamento indiscutíveis do *shidosha*. A essa altura, o Grupo se encontrava mais confiante e alerta em atender aos pilares do LS genuinamente japonês, para além do ciclo planejamento-execução-reflexão.

Por fim, o LS de matemática na Astronomia, na verdade, não foi motivado inicialmente por qualquer dificuldade relatada de ensino ou aprendizagem de conteúdo curricular matemático ou pedagógico. O impulso inicial veio com a constatação de uma professora de Biologia que ministrava aulas de Ciências no sexto ano do ensino fundamental brasileiro. A professora argumentava que o ensino de Astronomia vinha sendo denunciado por pesquisadores como precário por carência epistemológica e(ou) pela prática equivocada em aulas, justificados principalmente pela inexistência ou falhas na formação de professores, ou por erros conceituais em livros didáticos – recurso frequentemente utilizado como orientador de planejamentos de aulas por professores (WATANABE; LO; SON, 2017; SCHEFFER; POWELL, 2019). Essa argumentação foi constatada na literatura científica específica (*e.g.*, LANGHI; NARDI, 2005; LANGHI, 2009; PINTO; SILVA; SILVA, 2018, CANALLE; TREVISAN; LATTARI, 1997), ao lado de dificuldades de ensino apresentadas por aquela professora. Dessas dificuldades nasceram justificativas para desenvolvimento de um LS com objetivo inaugural de planejar aulas para ensino do Movimento de Rotação da Terra.

A carência de conhecimentos veiculados em licenciaturas remete, por vezes, professores ao uso de ideias sobre algum fenômeno natural concebidas do senso comum (LANGHI; NARDI, 2005; LANGHI, 2009; TEODORO, 2000) emersas de crenças sustentadas pelo meio não-científico e incorporadas em aulas do ensino básico. As ideias mais comuns consideram a Terra como centro do Universo; associam a existência da Lua apenas durante a noite; justificam as estações do ano unicamente pela distância da Terra em relação ao Sol; alegam que as fases da Lua são resultados de eclipses lunares semanais e; compreendem equivocadamente o movimento das estrelas. Essa conjuntura deixa espaço para professores se basearem em argumentos não-científicos para o ensino de Astronomia

que depende, muitas vezes, de conceitos matemáticos que apoiem conhecimentos científicos.

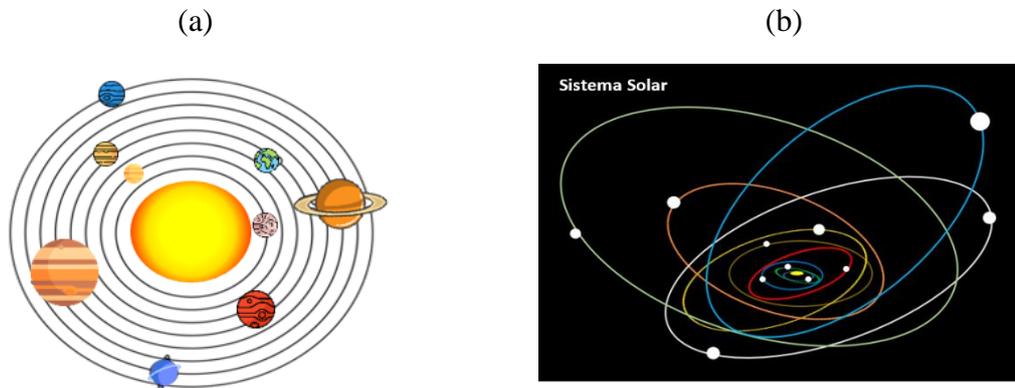
Os primeiros encontros para planejamento com nove professores – cinco de Matemática e quatro de Ciências – logo demandaram conhecimentos matemáticos – noções de ângulo, rotação, translação, diâmetro, direção, sentido, referencial, movimento aparente, escala de grandezas, circunferência, elipse, etc. Foi assim que dentro de um LS sobre Ciências, houve uma indispensável partição para planejamento de ensino de objetos matemáticos no contexto da Astronomia.

Embora esses temas parecessem triviais para os cinco professores de Matemática, ensiná-los à luz de objetos da Astronomia causou impactos que demandaram muito estudo e esforço do Grupo. Não era o caso de meramente explicar a matemática, mas de inseri-la como importante parte das explicações em meio aos estudos de Ciências, e, por essa razão, a compreensão de conteúdos da Astronomia eram essenciais. Além disso, o Grupo deveria considerar que as aulas estavam voltadas para alunos que não possuíam bagagem anterior de objetos matemáticos e astronômicos (KFLM), a despeito do que indicavam documentos normativos educacionais brasileiros utilizados pela escola da professora de Ciências. Não bastassem essas prerrogativas, todo o ensino deveria ser desenhado para aulas a distância, por imposição da pandemia de Covid-19. Em suma, durante o estudo do material no LS (*kyozaikenkyu*), os professores deveriam estudar como ensinar conteúdos matemáticos a distância para explicar ideias da Astronomia para alunos que não dispunham de pré-requisitos e que apresentavam concepções do senso comum acerca do Universo (KMT).

O Grupo desde cedo constatou em livros didáticos uso inadequado de imagens para explicar ideias da matemática aplicadas na Astronomia (KMT). O estudo de Astronomia pode (e deve) empregar representações visuais como aliadas para ensino e compreensão do Universo. Essa estratégia, no entanto, requer atenção quanto às representações para que os benefícios não se transformem em prejuízos no conhecimento. Os professores observaram que o sistema solar é usualmente visualizado em materiais pedagógicos (KMT) de modo equivocado – o Sol no centro de um sistema cujos planetas giram ao seu redor em trajetórias circulares e concêntricas (Figura 6a) -, entretanto, afirmam que as trajetórias dos planetas são elípticas. Essa observação levou-os a explicar minimamente as diferenças entre órbitas circulares e elípticas, passando por explicações de excentricidade e de localização do Sol dentro do sistema planetário (KMLS). Além disso, os professores aprenderam que as trajetórias elípticas têm excentricidades diversas e não estão no mesmo plano. Após as

devidas explicações a respeito das ideias de circunferência, elipse, excentricidade e plano, os professores desenharam a Figura 6b como exemplo do que estavam a dizer.

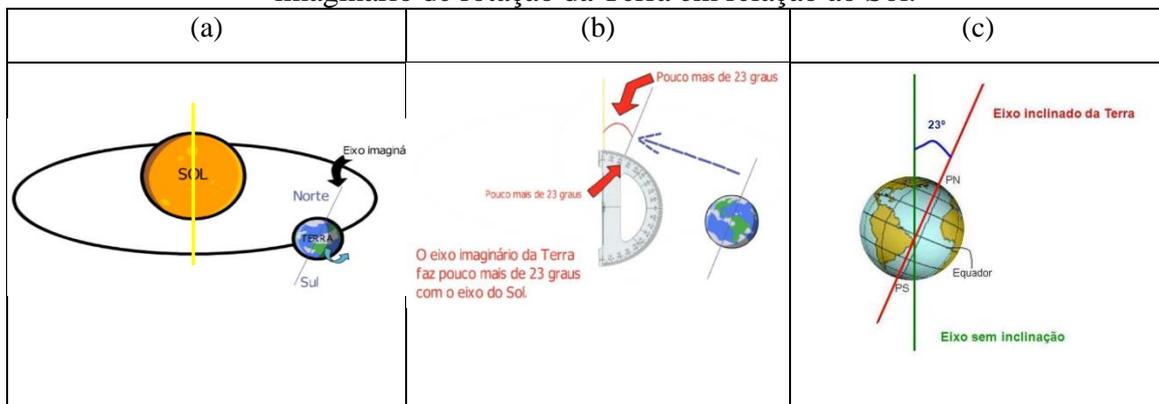
Figura 6 – Trajetória circular e elípticas dos planetas ao redor do Sol



Fonte: Acervo das autoras, 2023.

Outros desafios foram compulsórios para planejamento de aulas para construção das ideias de direção, sentido, referencial e movimento aparente, que tangenciavam noções de álgebra linear – vetores (KMLS). Esses conceitos integrariam algo bem mais desafiador – o ensino de ângulo no espaço tridimensional. Como ensinar ângulo de inclinação do eixo imaginário da Terra em relação ao Sol? Após extensos debates e visando a desenvolver a ideia em vez de declarar a informação, o Grupo decidiu pela elaboração de uma videoaula que ensinaria o uso de um transferidor. A partir de alguns debates, os professores imaginaram que os alunos estariam aptos a compreender explicações sobre o ângulo de inclinação do eixo imaginário de rotação da Terra (Figura 7a) com auxílio de um transferidor (Figura 7b). As ideias apresentadas nas Figuras “7a” e “7b”, permitiram a construção da noção espacial do ângulo que está apresentada na Figura “7c”.

Figura 7 – Imagens extraídas de partes da videoaula sobre o ângulo de inclinação do eixo imaginário de rotação da Terra em relação ao Sol.

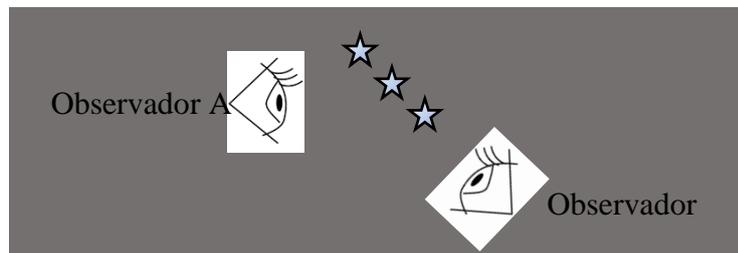


Fonte: Acervo das autoras, 2023.

O planejamento também deveria conter estudo sobre as constelações por meio de mapas celestes. O *kyozaikenkyu* oportunizou aos professores conhecer que as constelações são “vistas” de modo particular por povos diferentes, principalmente porque: (1) estão em hemisférios diferentes e(ou), (2) ainda que estejam no mesmo hemisfério, “organizam” ou agrupam as estrelas de modo diverso (KMT). Por exemplo, a disposição de três estrelas assume perspectivas diferentes para observadores em localizações diversas na Terra. Na Figura 8, o observador “A” vê três estrelas e o observador “B” vê apenas uma.

Assim, as estrelas que formam a constelação do Cruzeiro do Sul no Brasil, não necessariamente são do mesmo modo vistas por pessoas em outras localizações, a exemplo dos chineses. Esse tema foi aprofundado no *kyozaikenkyu*, mas os professores decidiram que o mais indicado para o momento era explorar as principais constelações adotadas pelo meio científico brasileiro – Cruzeiro do Sul, Hydra, Escorpião e Coroa Austral – uma vez que o objetivo era o de ensinar os alunos a identificar estrelas e constelações no céu, em determinado dia e localização na Terra, a partir da “leitura” em um mapa celeste, e não o de conhecer as diferentes constelações adotadas por pessoas em outras localidades (KMT).

Figura 8 – Perspectivas diversas para observação de três estrelas



Fonte: Acervo das autoras, 2023.

Enfim, muito mais do que planejar aulas para desenvolvimento de noções da Astronomia, os professores deveriam ter atenção à construção de noções matemáticas que iriam impactar em estudos futuros na disciplina de Matemática ou outras. Esses foram exemplos de desafios enfrentados pelo Grupo, que apontaram limitações de conhecimentos (matemáticos e astronômicos) vencidos colaborativamente em um *kyozaikenkyu* e que esperamos ser gatilho para outras mais robustas e criativas.

À guisa de conclusão

Em uma época em que tantas políticas educacionais falham em reconhecer e estimular a capacidade de os professores melhorarem o ensino, nos sentimos enormemente gratas pelo aprendizado que as lições da comunidade de Lesson Study nos trouxeram.

(Catherine Lewis e Jacqueline Hurd)

A presente investigação foi apoiada em teorias que versam sobre a formação de professores, nomeadamente em autores como Shulman (1986), Ball, Thames e Phelps (2008), Hill *et al.* (2008), Hill *et al.* (2011) e Carrillo-Yañez *et al.* (2018). A partir dessas teorias foi possível identificar **apropriação de conceitos matemáticos** pelos membros do Colabora, a exemplo de frações pela perspectiva de medição, de volume associado aos conceitos de massa, área e densidade e, inexistência de relações de dependência entre áreas e perímetros. De modo geral, foram **refinados** entendimentos sobre problemas matemáticos considerados mal estruturados, conceitos matemáticos aplicados à Astronomia e aprimoramento das diferenças entre as propriedades matemáticas de números naturais em relação aos racionais. O Grupo **refutou** estudos de frações baseados singularmente na perspectiva parte-todo.

Em termos **pedagógicos**, foram constatadas contribuições dos LS para ensino de todos os conteúdos matemáticos, sobretudo a diversificação de estratégias para a divisão, o modo de calcular ângulos entre figuras espaciais e planejamentos apoiados no 4A-Instructional Model para as frações. Além disso, a resolução de problemas passou a ser mais do que uma atividade complementar, sendo concebida como promotora para construção de noções matemáticas.

Em relação aos **insumos** do LS, embora todos tenham de algum modo contribuído para inaugurar nova maneira de ver e conceber conteúdos matemáticos e pedagógicos, alguns necessitam maior tempo de maturação: (1) O *hatsumon* não é trivial. Professores estão habituados a questionar alunos e responderem aos próprios questionamentos. Há uma ansiedade que exige atenção ao tempo e ritmo de quem está a aprender, seja aluno ou professor, se constituindo como um desafio; (2) A limitada experiência com planejamentos em LS prejudicam o controle do tempo de aula e, com isso, o *neriage* pode ficar sem ser desenvolvido; (3) A diversificação de estratégias promoveu alargamento da aprendizagem de conteúdos curriculares e pedagógicos, sobretudo no LS sobre o problema do Café com Leite e no LS sobre a operação de divisão; (4) O *bansho* é um desafio, pois toda a produção de conhecimento da aula deve estar registrada na lousa para que os alunos tenham

oportunidade de expandir seus modos de conceberem o mesmo problema ou objeto. Ademais, vale incluir no rol de benefícios do LS para a formação de professores a colaboração entre os participantes, a postura de professor como pesquisador de aulas e a busca por pessoas que atuem como *shidosha*. De modo especial, o *kyozaiikenkyu* reúne muitos desses insumos, marcando a singularidade de um LS genuinamente japonês frente a quaisquer iniciativas que o concebiam como o simples planejar-aplicar-refletir aulas.

É notória a importância de discussões sobre temas matemáticos na perspectiva de formações de professores de matemática, bem como a relevância de conhecimentos de docentes em processos formativos, inclusive com possíveis impactos para a comunidade de educadores matemáticos.

Referências

AMARAL, C. A. do N. **Conceito de fração pela perspectiva de medição**. Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2021. Disponível em: <https://repositorio.ifes.edu.br/handle/123456789/1439>. Acesso em 03 jan. 2023.

AMARAL, C. A. do N.; SOUZA, M. A. V. F.; POWELL, A. B. **Fração à moda antiga**. Vitória: Editora Ifes, 2021.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. C. Content Knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, nov. 2008. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/255647628_Content_Knowledge_for_Teaching_What_Makes_It_Special. Acesso em: 10 jan. 2023.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Modelagem Matemática: uma análise do conhecimento matemático para o ensino. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 2, p. 1-19, 2021. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2927>. Acesso em: 09 fev. 2023.

CAMPOS, N. Q.; WROBEL, J. S.; SOUZA M. A. V. F. de; PRANE, B. Z. D. **Dividir e Compartilhar**. Vila Velha: Editora Edifes, 2021.

CANALLE, J. B. G.; TREVISAN, R. H.; LATTARI, C. J. B. Análise do conteúdo de Astronomia de livros de Geografia de 1º grau. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v.14, n.3, p. 254-263, 1997.

CARRILLO-YANEZ, J.; CLIMENT, N.; MONTES, M.; CONTRERAS, L. C.; FLORES-MEDRANO, E.; ESCUDERO-ÁVILA, D.; VASCO, D.; ROJAS, N.; FLORES, P.; AGUILAR-GONZÁLEZ, A.; RIBEIRO, M.; MUNOZ-CATALÁN, M. C. The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) Model. **Research in Mathematics Education**, Londres, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>. Acesso em: 22 jan. 2023.

CARRILLO, J., CLIMENT, N., CONTRERAS, L. C., MONTES, M. Á., ESCUDERO, D., & MEDRANO, E. F. **Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas**. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones. 2014.

- FERNANDEZ, C.; YOSHIDA, M. **Lesson Study: A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning**. New Jersey, EUA: Autores Associados; 2004, 250p
- FUJII, T. Implementing Japanese lesson study in foreign countries: misconceptions reviewed. **Mathematics Teacher Education and Development**, v. 16, n. 1, p. 2-18, 2014.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2021.
- HILL, H.; BLUNK, M.; CHARALAMBOUS, C.; LEWIS, J.; PHELPS, G.; SLEEP, L.; BALL, D. L. Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. **Cognition and Instruction**, v. 26, p. 430-511, out. 2008. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/247502158_Mathematical_Knowledge_for_Teaching_and_the_Mathematical_Quality_of_Instruction_An_Exploratory_Study. Acesso em: 14 jan. 2023.
- HILL, H.; BALL, D. L.; BASS, H.; BLUNK, M.; BRACH, K.; CHARALAMBOUS, C.; COLE, Y.; DEAN, C.; DELANEY, S.; ESKELSON, S.; GOFFNEY, I. M.; LEWIS, J.; PHELPS, G.; SLEEP, L.; THAMES, M.; ZOPF, D. Measuring the Mathematical quality of instruction: Learning Mathematics for Teaching Project. **Journal for Mathematics Teacher Education**, v. 14, n. 1, p. 25-47, 2011.
- ISODA, M.; OLFOS, R. **El enfoque de resolución de problemas**. Ediciones Universitarias de Valparaíso, 2009.
- LANGHI, R. **Astronomia nos anos iniciais do ensino fundamental: repensando a formação de professores**. 370p. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) - Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru. 2009.
- LANGHI, R.; NARDI, R.. Dificuldades interpretadas nos discursos de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental em relação ao ensino da Astronomia. **Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia**, v. 2, p. 75-91, 2005.
- MELLO, L. F. de. **Formação do conceito de área e perímetro a partir de aulas baseadas no modelo Lesson Study**. Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018.
- MELLO, L. F. de; SOUZA M. A. V. F. de; WROBEL, J. S. **Espaços e contornos da praça dos sonhos**. Vila Velha: Editora Edifes, 2022.
- MELVILLE, M. D. **Kyozaikenkyu: An In-Depth Look into Japanese Educators' Daily Planning Practices**. Tese (Doutorado) – Brigham Young University, Provo, 2017. Disponível em: <https://scholarsarchive.byu.edu/etd/6515>. Acesso em: 01 fev. 2023.
- MENEGHEL, C. A.; PINHAL, D. V. de R.; SILVA, R. S. de O. S.; SOUZA, M. A. V. F. de; NASCIMENTO, L. M. do; COSTA, K. M. da; LEFFLER, R.; MARTINS, F. S.; MACHADO, R. M. **Matemática do Dia e da Noite**. Livro 5. Série: Lesson Study em Matemática. Editora: Edifes. no prelo.
- OLFOS, R.; ISODA, M.; ESTRELLA, S. Más de una década de estudio de clases en Chile: hallazgos y avances. **Paradigma**, v. XLI, p. 190-221, 2020. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p190-221.id871>.
- PINTO, C. M. S. F.; SILVA, J. P. G.; SILVA, M. F. A. A. Dificuldades no ensino de Astronomia em sala de aula: um relato de caso. **Revista Vivências em Ensino de Ciências**, v. 2, p. 65-75. 2018.

RANGEL, L.; GIRALDO, V. A.; MACULAN, N. Matemática elementar e conhecimento de matemática para o ensino: um estudo colaborativo sobre números racionais. *In: XIV CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Anais do XIV CIAEM*. 2015.

RODRIGUES, P. F. C.; AMARAL, C. A. do N.; SOUZA, M. A. V. F. de. Lesson Study na Formação de Professores: um mapeamento de trabalhos científicos realizados no Brasil. *In: II SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE LESSON STUDY NO ENSINO DE MATEMÁTICA. Anais do II SILSEM*. 2023, no prelo.

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). *Revemop*, v. 1, n. 3, p. 476-503, 1 set. 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.33532/revemop.v1n3a08>. Acesso em: 02 fev. 2023.

SCHEINER, T.; MONTES, M. A.; GODINO, J. D.; CARRILLO, J.; PINOFAN, L. R. What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, v. 17, n. 1, p. 153-172, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6>. Acesso em: 05 fev. 2023.

SHIMIZU, Y. Some pluses and minuses of “typical pattern” in mathematics lessons: A Japanese perspective. *Bulletin of the Center for Research and Guidance for Teaching Practice*, v. 20, p. 35–42, 1996.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986. Disponível em: https://depts.washington.edu/comgrnd/ccli/papers/shulman_ThoseWhoUnderstandKnowledgeGrowthTeaching_1986-jy.pdf. Acesso em: 15 jan. 2023.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987. Disponível em: <https://people.ucsc.edu/~ktellez/shulman.pdf>. Acesso em: 26 jan. 2023.

SHULMAN, L. Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma. Tradução de Leda Beck. *Cadernos Cenpec*, v. 4, n. 2, p. 196-229, dez. 2014. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/5233/42637061d788ffdefc31f108c6e3369b8e7a.pdf>. Acesso em: 03 fev. 2023.

SOUZA, H. de J. de; COUTO, M. E. S. Desenvolvimento profissional de professores: um olhar para o ensino de Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, v. 12, n. 3, p. 1-25, 2021. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2882>. Acesso em: 09 fev. 2023.

SOUZA, M. A. V. F. de. A produção de significados e a representação mental na solução de problemas mal-estruturados de matemática. *Boletim Gepem*, n. 60, 2012. p. 129-144. <http://dx.doi.org/10.4322/gepem.2014.007>. Acesso em: 18 jan. 2023.

SOUZA, M. A. V. F. de; POWELL, A. B. Kyozaikenkyu: essential lesson planning in japanese lesson study. *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, v. 13, 2023. p. 1-24.

SOUZA, M. A. V. F.; WROBEL, J. S. *Café, leite e matemática*. Vila Velha: Editora Edifes, 2017.

STERNBERG, R. J. *Psicologia Cognitiva*. Porto Alegre, RS: Artes Médicas, 2000.

TAKAHASHI, A.; MCDUGAL, T. Implementing a new national curriculum: a Japanese public school's two years lesson-study project. *In: KARP, Karen.; MCDUFFIE, Amy Roth. (Ed.). Using research to improve instruction.* Reston, VA: NCTM, 2014. p. 13-22.

TAKAHASHI, A.; YOSHIDA, M. Ideas for establishing Lesson-Study communities. **Teaching Children Mathematics**, p. 436–443, may 2004.

TAKAHASHI, A. Characteristics of Japanese mathematics lessons. **Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics**, v. 25, p. 37–44, 2006

TEODORO, S. R. **A história da ciência e as concepções alternativas de estudantes como subsídios para o planejamento de um curso sobre atração gravitacional.** Dissertação (Mestrado), Faculdade de Ciências, Unesp, Bauru. 2000.

WANDERLEY, R. A. J.; SOUZA, M. A. V. F. de. Lesson Study como Processo de Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática sobre o Conceito de Volume. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 13, p. 1-20, 2020.

WANDERLEY, R. A. J. **Algumas contribuições do Lesson Study para a formação do professor de matemática em aulas que promovam a construção do conceito de volume.** Dissertação (Mestrado) – Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2019.

WATANABE, T.; LO, J.-J.; SON, J.-W. Intended treatment of fractions and fractions operations in mathematics curricula from Japan, Korea and Taiwan. *In: SON, J.-W. (Org.). What Matters? Research Trends in International Comparative Studies in Mathematics Education.* Springer International Publishing, 2017. p. 33-62. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-51187-0_2. Acesso em: 8 jan. 2023.

Autores

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza

Graduação em Matemática – Universidade Federal do Espírito Santo
Educação Matemática – Universidade Federal do Espírito Santo
Psicologia da Educação Matemática – Universidade Estadual de Campinas
Instituto Federal do Espírito Santo
Grupo Colabora e Gepeme – Linha: Formação de Professores
alicevfs@gmail.com
<http://orcid.org/0000-0003-2038-813X>

Poliana Figueiredo Cardoso Rodrigues

Licenciatura em Matemática – Universidade Federal Fluminense
Engenharia de Produção – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense
Grupo Colabora – Linha: Formação de Professores
polianacar@gmail.com
<http://orcid.org/0000-0002-2385-1727>

Camila Augusta do Nascimento Amaral

Licenciatura em Matemática – Universidade Federal do Espírito Santo
Educação em Ciências e Matemática – Instituto Federal do Espírito Santo
Secretaria Estadual de Educação do Espírito Santo
Grupo Colabora e Gepeme – Linha: Formação de Professores
cam.amaral@yahoo.com.br
<http://orcid.org/0000-0002-5721-7783>

Como citar o artigo:

SOUZA, M.A.V.F., RODRIGUES, P.F.C., AMARAL, C.A.N. Conteúdos matemáticos e pedagógicos: contribuições, limitações e desafios em edições do Lesson Study no Grupo Colabora. **Revista Paradigma**, Vol. XLIV, Edición Temática Estudio de Clases: Edición Temática Estudio de Clases: Contribuciones de la educación japonesa en diferentes países, mayo de 2023 / 187 - 212. DOI:

<https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p187-212.id1417>

Formação inicial de professores de Matemática: uma experiência de intercâmbio internacional com base em estudos de aula³

João Pedro da Ponte

jpponte@ie.ulisboa.pt

<https://orcid.org/0000-0001-6203-7616>

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IE/ULisboa)

Lisboa, Portugal.

Regina da Silva Pina Neves

reginapina@mat.unb.br

<https://orcid.org/0000-0002-7952-9665>

Universidade de Brasília (UnB)

Brasília, Brasil.

Aluska Macedo

aluskadrmacedo@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-0398-1097>

Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Campina Grande, Brasil.

Marisa Quaresma

mq@campus.ul.pt

<https://orcid.org/0000-0002-0861-6016>

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal (IE/ULisboa)

Lisboa, Portugal.

Recebido: 02/04/2023 **Aceito:** 15/04/2023

Resumo

O estudo de aula é um processo formativo que tem sido utilizado na formação inicial de professores de Matemática. Organizámos um intercâmbio entre futuros professores de três universidades, de Portugal e do Brasil, participando em estudos de aula. A partir desse intercâmbio procurámos saber que aprendizagens fizeram os futuros professores sobre aspetos fundamentais do conhecimento didático durante o processo formativo assim como nos encontros síncronos entre os participantes das três instituições. O objetivo do presente artigo é analisar essas aprendizagens dos futuros professores e o modo como eles viveram este intercâmbio. Os dados foram recolhidos por gravação das sessões virtuais realizadas e recolha documental. Os resultados mostram que o estudo de aula contribuiu para aprendizagens significativas por parte dos futuros professores, nomeadamente sobre tarefas, planificação e sobre a condução de uma aula exploratória, incluindo a discussão coletiva. Além disso, os futuros professores mostraram compreender a necessidade de conhecer os alunos. O intercâmbio mostrou ser uma iniciativa produtiva, levando ao empenhamento dos futuros professores e reforçando a sua aprendizagem, sobretudo em aspetos didáticos.

Palavras-chave: Estudo de aula. Formação inicial de professores de Matemática. Ensino secundário. Conhecimento didático.

³ Este artigo está escrito em português de Portugal. No entanto, apresentamos no português do Brasil os termos que descrevem situações específicas da realidade brasileira. Assim, usamos “ensino secundário” (Portugal) e “ensino médio” (Brasil). Nas falas dos intervenientes de cada país, mantivemos os termos usados por esses intervenientes.

Formación inicial de profesores de Matemáticas: una experiencia de intercambio internacional a partir de los estudios de aula

Resumen

El estudio de clase es un proceso formativo que se ha utilizado en la formación inicial de los profesores de Matemáticas. Organizamos un intercambio entre futuros profesores de tres universidades, de Portugal y Brasil, que participaban en estudios de clase. A partir de este intercambio se buscó conocer qué aprendizajes hicieron los futuros docentes sobre aspectos fundamentales del conocimiento didáctico durante el proceso de formación, así como en los encuentros sincrónicos entre los participantes de las tres instituciones. El objetivo de este artículo es analizar estos aprendizajes de los futuros maestros y cómo vivieron este intercambio. Los datos fueron recolectados mediante el registro de las sesiones virtuales realizadas y la recolección de documentos. Los resultados muestran que el estudio de clase contribuyó al aprendizaje significativo de los futuros profesores, a saber, sobre las tareas, la planificación y la realización de una clase exploratoria, incluida la discusión colectiva. Además, los futuros profesores mostraron una comprensión de la necesidad de conocer a los estudiantes. El intercambio demostró ser una iniciativa productiva, que condujo al compromiso de los futuros maestros y reforzó su aprendizaje, especialmente en aspectos didácticos.

Palabras-clave: Estudio de clase. Formación inicial. Matemáticas. Educación secundaria, Conocimiento didáctico.

Initial training of mathematics teachers: an international exchange experience based on classroom studies

Abstract

The lesson study is a formative process that has been used in the initial teacher education of mathematics teachers. We organized an exchange between future professors from three universities, from Portugal and Brazil, participating in lesson studies. From this exchange, we sought to know what learning the future teachers made about fundamental aspects of didactic knowledge during this process as well as in the synchronous meetings between the participants from the three institutions. The aim of this article is to analyze this learning of the future teachers and how they lived this exchange. The data were collected by recording the virtual sessions held and collecting documents. The results show that the lesson study contributed to significant learning by the future teachers, namely about tasks, planning and leading an exploratory lesson, including the whole-class discussion. In addition, the future teachers showed an understanding of the need to know students. The exchange proved to be a productive initiative, leading to the commitment of the future teachers and reinforcing their learning, especially in didactic aspects. **Keywords:** Lesson study. Initial teacher education. Mathematics. Secondary education. Didactic knowledge.

Introdução

A formação inicial de professores tem a missão de preparar os jovens para o início do exercício da atividade profissional. Trata-se de uma missão extremamente exigente, dada a complexidade da atividade do professor, nas suas múltiplas vertentes, e dadas as exigências de

um contexto escolar marcado pela diversidade dos alunos e a evolução constante da tecnologia e da sociedade. Daí, o esforço constante que os formadores de professores e os investigadores têm dedicado a estudar formas de tornar mais efetiva a formação inicial dos professores (Bergsten *et al.*, 2009; Ponte & Chapman, 2008, 2016; Strutchens *et al.*, 2016).

Uma das propostas que se tem vindo a experimentar em muitos países para valorizar a formação inicial de professores de Matemática é o uso de estudos de aula (*jugyou kenkyuu* em japonês e *lesson study* em inglês). O estudo de aula é um processo formativo, originário do Japão e centrado na prática letiva. É habitualmente realizado por um pequeno grupo de professores, que identifica um problema na aprendizagem dos alunos, procura estudar as possíveis formas de ultrapassar esse problema e, com base nisso, planeia em detalhe e realiza uma aula, designada por “aula de investigação”. Essa aula é lecionada por um dos membros do grupo e os restantes observam, com especial atenção ao trabalho dos alunos e à sua aprendizagem. Na sequência, o grupo reúne-se para refletir em detalhe sobre as aprendizagens conseguidas ou não pelos alunos e sobre a adequação do plano de aula e eventuais formas de o melhorar. Este processo formativo, com algumas adaptações, tem vindo a ser usado na formação inicial de professores de Matemática em diversos países (Cavanagh & Garvey, 2012; Clivaz & Miyakawa, 2020; Martins, Mata-Pereira & Ponte 2021; Pina Neves & Fiorentini, 2021).

No entanto, são muitas as interrogações que se colocam relativamente às opções mais vantajosas a assumir na realização de estudos de aula na formação inicial de professores. Assumindo que a troca de experiências entre futuros professores de Matemática de diferentes países participando em estudos de aula poderia ajudar a iluminar aspetos interessantes e aspetos problemáticos deste processo, organizámos um intercâmbio entre futuros professores de três universidades, uma de Portugal e duas do Brasil. A partir desse intercâmbio procurámos saber que aprendizagens tinham feito os futuros professores sobre as tarefas a propor aos alunos e a abordagem a seguir, bem como sobre as aprendizagens, estratégias e dificuldades dos alunos com que eles trabalharam. Neste quadro, o objetivo do presente artigo é analisar essas aprendizagens dos futuros professores e o modo como eles viveram este intercâmbio.

Quadro conceptual

Na prática letiva do professor de Matemática assume particular importância o conhecimento didático. Este conhecimento é valorizado desde há muitos anos nos programas de formação inicial de professores. Shulman (1986, 1987) sublinhou a importância desta vertente

da formação dos futuros professores com a designação de “*pedagogical content knowledge*”. Para Shulman, este conhecimento representa uma articulação entre conteúdo e pedagogia. Mais tarde, Ball, Thames e Phelps (2008) aprofundaram as ideias de Shulman para o caso particular dos professores de Matemática, considerando diversos subdomínios tanto no conhecimento do conteúdo (conhecimento geral, conhecimento especializado e conhecimento do horizonte matemático) como no *pedagogical content knowledge* (conhecimento dos alunos, conhecimento da prática de ensino e conhecimento do currículo). Estes autores decidiram designar o conjunto destes dois domínios por “*mathematical knowledge for teaching*”, expressão que salienta a vertente matemática e secundariza a vertente didática.

Outros modelos para descrever o *pedagogical content knowledge* ou conhecimento didático têm vindo a ser propostos, como o de Carrillo-Yañez *et al.* (2018), que procura aperfeiçoar alguns aspetos do modelo de Ball *et al.* (2008), nomeadamente a distinção pouco clara entre conhecimento matemático geral e especializado. Outro modelo que conheceu bastante divulgação é o de Rowland, Huckstep e Thwaites (2005), “*knowledge quartet*”, que segue uma lógica bastante diferente dos anteriores, ao procurar dar conta de como este conhecimento se orienta e articula com a ação na prática letiva do professor. Estes autores consideram os domínios fundação, transformação, conexão e contingência. Mais recentemente, Schoenfeld (2020) propôs um modelo do que designa como a “sala de aula poderosa”, mas que no fundo representa aspetos centrais do conhecimento didático e da prática letiva do professor. Este modelo tem cinco dimensões: (i) Matemática, (ii) exigência cognitiva, (iii) acesso equitativa à Matemática, (iv) agência, domínio (*ownership*) e identidade, e (v) avaliação formativa.

Neste trabalho, usamos o modelo de Ponte (2012) que propõe a consideração de quatro domínios no conhecimento didático – o conhecimento da Matemática escolar, do currículo, do aluno e dos seus processos de aprendizagem, e da prática letiva –, sendo que este último assume um papel central, em constante articulação com os restantes. No que respeita ao conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem, Ponte e Oliveira (2002) indicam que “conhecer os alunos como pessoas, os seus interesses, gostos, formas habituais de se comportar e reagir, valores, referências culturais, formas de aprender... são condições decisivas para o sucesso do trabalho dos professores” (p. 88). Os autores consideram ainda neste domínio as estratégias que

os alunos usam para resolver as questões matemáticas, bem como as dificuldades que encontram. No que respeita ao conhecimento da prática letiva, os autores referem:

Nesta dimensão, estão incluídos planos de longo ou médio prazo, como o plano projetado para cada sessão de aula, a elaboração das tarefas a serem realizadas e todas as questões relacionadas à condução da atividade na sala de aula de matemática: formas de organização do trabalho dos alunos, criação de uma cultura de aprendizagem em sala de aula, desenvolvimento e regulação dos modos de comunicação e avaliação da aprendizagem dos alunos e do ensino do corpo docente, etc. (p. 88)

Um dos aspetos que influencia de forma decisiva a prática letiva do professor é a abordagem curricular que este assume. Internacionalmente, tem vindo a ganhar importância uma abordagem que, com diferentes designações como “*reform mathematics*”, “*ambitious teaching*” ou “*inquiry based*”, dá um papel de grande relevância ao aluno no processo de aprendizagem. Em língua portuguesa, uma expressão muito usada é a de “abordagem exploratória” (Ponte, 2005). Nesta abordagem, o aluno aprende sobretudo a partir do trabalho que realiza na resolução de tarefas que lhes são propostas pelo professor e que procura resolver muitas vezes em parceria com um ou mais colegas. O professor seleciona algumas resoluções para discussão num momento próprio da aula, tendo em conta a sua relevância para ilustrar ideias matemáticas importantes, estabelecendo conexões entre diferentes representações e diferentes estratégias. Nesta discussão assume um lugar muito importante a discussão de erros nas resoluções, que são encarados como uma oportunidade de aprendizagem. Assim, a aula, em vez de começar com a exposição de novos conceitos por parte do professor, apoiado por um ou outro exemplo, e prosseguir com exercícios de prática por parte dos alunos, começa com a proposta de uma tarefa que os alunos consigam realizar tendo por base os seus conhecimentos prévios. Depois de um período de trabalho autónomo dos alunos (individual, em pares ou em grupos), tem lugar uma discussão coletiva, e a aula encerra com a síntese final ligando as principais ideias trabalhadas.

Metodologia

Aspetos gerais

Este trabalho assume um carácter qualitativo. Os participantes são futuros professores (FP) das Universidades de Lisboa (ULisboa), de Portugal, Federal de Brasília (UnB) e Federal de Campina Grande (UFCG), ambas do Brasil. Em Portugal, os futuros professores estavam no

penúltimo ano da sua formação e no Brasil estavam no seu último ano. Com o intuito de ampliar as oportunidades de formação dos futuros professores que vivenciam o estudo de aula em seus processos formativos, foram realizados dois encontros virtuais com a sua participação bem como dos respetivos professores (autores deste artigo). Assim, os dados foram recolhidos dos encontros conjuntos (E1 e E2) realizadas em Zoom com estes futuros professores (com gravação vídeo posteriormente transcrita) bem como recolha documental das suas produções escritas (que incluem tarefas, planos de aula e relatórios finais (RF) do trabalho realizado). A análise de dados foi realizada por análise de conteúdo (Bardin, 1979) tendo em conta categorias estabelecidas a partir do quadro conceptual: (i) tarefas e abordagem; e (ii) aprendizagens, dificuldades e estratégias dos alunos.

Contexto e participantes de Portugal

No Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, realizam-se, desde há vários anos, estudos de aula no curso de formação inicial de professores de Matemática. Este curso é um Mestrado em Ensino (com 4 semestres) que é oferecido para candidatos com uma formação de base em Matemática ou área afim. Essa formação de base tem um mínimo de três anos, sendo que o equivalente a 4 semestres é necessariamente de disciplinas de Matemática. A organização no Mestrado em Ensino contempla, no 1.º ano do curso, disciplinas em Matemática, Educação Geral, e Didática da Matemática e uma disciplina em cada semestre de Iniciação à Prática Profissional (IPP) e, no 2.º ano do curso, ainda algumas disciplinas de Educação Geral e Didática da Matemática e agora uma atividade mais intensa de Iniciação à Prática Profissional em ambos os semestres.

Os estudos de aula têm vindo a ser feitos em IPP II, no 2.º semestre do curso. Esta disciplina tem uma escolaridade de 2 horas semanais. Tem duas vertentes, sendo a principal a realização de estudos de aula e a secundária o estudo das diversas funções profissionais extra-letivas do professor. Nesta fase da sua formação, espera-se que os futuros professores observem aulas e outras atividades em escolas, mas não se espera que lecionem aulas – atividade que está reservada para o 2.º ano do curso.

No ano letivo de 2021-2022, frequentaram a disciplina (sempre em regime presencial) 11 futuros professores que foram organizados em quatro grupos (3 ou 4 elementos cada), realizando cada grupo um estudo de aula. Dois grupos trabalharam com os tópicos da área do trapézio e introdução à noção de semelhança (do 7.º ano) e outros dois grupos com o tópico do

teorema de Pitágoras (8.º ano). As aulas dos dois grupos do 7.º ano versavam tópicos diferentes mas foram uma na sequência da outra. As aulas do 8.º ano, embora sobre o mesmo tópico, versavam objetivos de aprendizagem diferentes, sendo realizadas também em sequência. Todas as aulas, com a duração de 50 minutos, foram lecionadas por duas professoras experientes de uma escola que se disponibilizaram para o efeito. O trabalho de preparação foi realizado pelos futuros professores, consultando as professoras da escola e os professores de IPP II. Além disso, de modo a conhecerem os alunos, os futuros professores fizeram uma observação prévia da turma em que a aula iria ser lecionada.

Contexto e participantes do Brasil

As disciplinas de Estágio Curricular Supervisionado em Matemática (ECSM) II, da Universidade Federal de Campina Grande, e Estágio Supervisionado de Regência em Matemática II (Ensino Médio), da Universidade de Brasília, são componentes curriculares obrigatórios dos Cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil e recebem, em ambas as instituições, futuros professores dos dois últimos semestres do curso. Desde 2020, esses componentes são planejados e desenvolvidos, em conjunto pelas professoras orientadoras (segunda e terceira autoras), utilizando o estudo de aula como processo formativo. Assim, os futuros professores interagem entre si e também com as professoras da universidade e da escola, ao longo de um semestre letivo, em espaços físicos nas universidades e nas escolas, e também em espaços virtuais, por meio de computadores e celulares. De modo especial, as duas turmas vivenciam encontros virtuais síncronos para análise crítica e discussão coletiva sobre os planos de aulas em elaboração, bem como sobre seu desenvolvimento em turmas da educação básica (Pina Neves *et al.*, 2022; Macedo *et al.*, 2019). Os casos apresentados neste artigo referem-se à participação de dois grupos de futuros professores, um da UFCG e um da UnB, nos encontros realizados, nos quais eles socializaram um plano de aula e relataram a experiência de o desenvolver. Esses grupos integraram as referidas disciplinas no 1.º semestre de 2022, momento em que as instituições estavam em ensino remoto e as escolas públicas em ensino presencial.

A turma da UFCG era composta por 8 futuros professores que se reuniam semanalmente durante 2 horas no semestre acadêmico de 2021.1 (22 de novembro de 2021 a 02 de abril de 2022), com aulas extras quando necessário. Os futuros professores foram divididos em dois grupos, cada um com quatro elementos. O tópico das aulas foi o plano cartesiano (representação de pontos no primeiro quadrante) escolhido pelo calendário escolar.

A turma da UnB era composta por 14 futuros professores, sendo 11 homens e 3 mulheres, com idades entre 20 e 56 anos, sendo a maioria com 23 anos, que se reuniam semanalmente durante 4 horas no semestre acadêmico de 2021.2 (de janeiro a maio de 2022), sendo 2 horas de encontros síncronos, realizados às sextas-feiras das 8h às 10h e, 2 horas assíncronas para as ações entre professora-orientadora e estagiários via *drive* da disciplina. Todos os futuros professores já haviam cursado ECSM I, sendo a primeira vez que eles vivenciavam a experiência de estágio em processo de Estudo de Aula.

O tópico curricular foi definido de acordo com o cronograma da escola, tendo o grupo assumido o conteúdo de probabilidade (espaço amostral, evento e cálculo de probabilidade). Para tanto, foram planejadas e realizadas 4 aulas de 90 minutos, tendo os 4 futuros professores atuado como regentes e observadores. Neste artigo focamos a segunda aula, reunindo elementos do seu planejamento e desenvolvimento.

Grupo de futuros professores da ULisboa

Enquadramento geral

O trabalho de preparação, para os quatro grupos, incluiu o estudo de como o tópico vem descrito nos documentos curriculares portugueses (designado “*Aprendizagens Essenciais*”) e como é apresentado no manual em uso na escola. Este trabalho envolveu ainda a leitura e discussão de artigos sobre estudos de aula (Ponte *et al.*, 2016), ensino exploratório e tarefas (Ponte, 2005; Swan, 2016-2017) e elaboração de planos de aula (Ponte *et al.*, 2015) bem como a realização de pesquisas na Internet.

Com base neste trabalho preparatório, os quatro grupos, sempre acompanhados pelos professores da disciplina, realizam uma versão preliminar dos planos de aula, tendo por base tarefas a realizar pelos alunos da escola. Os grupos procuraram selecionar ou elaborar tarefas que pudessem servir de base a uma aula de cunho exploratório. Este modo de trabalho já era conhecido dos futuros professores da disciplina de Didática da Matemática I do 1.º semestre do curso e foi aprofundado com o trabalho realizado em Didática da Matemática II e em IPP II.

Abordagem e tarefa

Neste artigo, por uma questão de espaço, debruçamo-nos apenas sobre o trabalho de um grupo constituído por quatro futuros professores. O objetivo de aprendizagem definido para a aula pela professora da escola que colaborou neste estudo foi “conhecer e compreender o

teorema de Pitágoras”. Por sua iniciativa, os futuros professores decidiram acrescentar a este um outro objetivo: “saber que o Teorema de Pitágoras não se estende a triângulos não retângulos”. Os futuros professores decidiram que a aula iria seguir a abordagem exploratória (Ponte, 2005) e fizeram o seu planeamento geral, com grande detalhe, em articulação com a professora da escola. No entanto, na realização da aula, a professora não seguiu o que estava planeado, reduzindo a discussão coletiva e síntese final a um breve momento:

A aula por nós preparada seguia um modelo exploratório que era também evidente na tarefa elaborada. Estava, então, dividida em três partes: a introdução (5 minutos), o trabalho autónomo dos alunos a pares (35 minutos) e a discussão coletiva acompanhada de uma síntese final (20 minutos). No entanto, esta estrutura não foi inteiramente seguida pela professora. A aula ficou dividida numa introdução (cerca de 7 minutos) e no trabalho autónomo dos alunos intercalado com algumas muito breves discussões e/ou correções das questões da tarefa (40 minutos). Apenas cerca de 3 minutos restaram para o que previmos que constituiria o momento de discussão coletiva e síntese final. (RF)

Os futuros professores elaboraram a tarefa para a aula de investigação “de modo a que os alunos obtivessem o Teorema de Pitágoras através de um raciocínio indutivo” (RF). Durante o planeamento, ponderaram a possibilidade de incluir na tarefa a demonstração do teorema. No entanto, após a observação de uma aula que fizeram antes da aula de investigação, puseram de parte essa ideia, por, segundo referem “termos observado ritmos de trabalho muito discrepantes entre alunos, dificuldades frequentes na manipulação algébrica e no cálculo aritmético e um ambiente bastante desordeiro do coletivo, em acréscimo à limitação temporal que tínhamos para esta aula” (RF). Os futuros professores consideraram que a estratégia que seguiram “se revelou particularmente frutífera na medida em que permitiu aos alunos construir de forma faseada o seu conhecimento através de aprendizagens prévias que lhes eram acessíveis” (RF). Os futuros professores reconheceram assim a importância de valorizar o raciocínio indutivo como forma de os alunos construir o seu próprio conhecimento.

Ainda relativamente à tarefa, os futuros professores relatam uma interessante aprendizagem que fizeram. A tarefa que elaboraram indicava aos alunos que não deveriam utilizar a calculadora. No entanto, contrariamente ao que estava previsto, a professora cooperante não só permitiu esta utilização como a incentivou. No final, os futuros professores fizeram a seguinte reflexão:

A observação da aula corroborou algo para o qual já havíamos sido alertados e que se tornou uma das maiores aprendizagens conseguidas neste processo: a construção de uma tarefa e plano de aula deve sempre visar os objetivos de aprendizagem definidos.

A proibição do uso da calculadora intencionava que os alunos adquirissem fluência no cálculo aritmético, o que não estava previsto como objetivo para a aula de investigação. Sabendo que isto constituía uma dificuldade para os alunos, reconhecemos o risco corrido ao termos imposto esta proibição. De facto, se a professora não tivesse permitido a utilização da calculadora, os alunos teriam multiplicado o tempo usado para a realização da questão 1., e seguramente não atingiriam os objetivos da aula no tempo previsto. (RF)

Assim, durante a fase de planeamento, os futuros professores desejaram proibir a utilização da calculadora com o intuito de exigir que os alunos, já do 9.º ano, conseguissem fazer os cálculos elementares que eram pedidos. Consideravam, provavelmente com alguma razão, que os alunos, muitas vezes, usam a calculadora sem sentido crítico. No entanto, compreenderam que, dadas as dificuldades dos alunos, este não pode ser um objetivo de todas as aulas.

Aprendizagens, dificuldades e estratégias dos alunos

Para os futuros professores, a aula permitiu que os alunos atingissem os objetivos de aprendizagem definidos, tanto no que respeita à verificação do teorema de Pitágoras para os triângulos retângulos, como à sua não verificação para triângulos não retângulos.

A partir das observações que fizeram da aula de investigação, os futuros professores identificaram diversas dificuldades sentidas pelos alunos durante a aula. Estas dificuldades incluem aspetos muito diversos. Por exemplo, uma dificuldade não prevista, mas que foi facilmente ultrapassada, foi os alunos “não terem reconhecido onde se encontrava a hipotenusa nos triângulos em que os catetos não se posicionavam paralelamente às margens da ficha de trabalho” (RF). Uma outra dificuldade que os futuros professores consideraram mais problemática dizia respeito ao cálculo de raízes quadradas:

Aquela que foi possivelmente a dificuldade mais impeditiva do avanço na realização da ficha [a tarefa] foi o cálculo do quadrado de $\sqrt{18}$, acompanhado de outras dificuldades de cálculo que rapidamente se manifestaram em afirmações como “8 vezes 8 é 72” e “a raiz de 18 é 9”. (RF)

Diversos alunos não reconheceram que tirar a raiz quadrada e elevar ao quadrado são operações inversas que deixam um número inalterado e fizeram arredondamentos nas duas operações. Outra dificuldade assinalada foi verificar que todos os alunos calcularam a área do quadrado usando $l \times l$ e nenhum usou a expressão l^2 . Outra dificuldade, ainda, teve a ver com a “utilização rigorosa da linguagem matemática” (RF). A expressão que traduz o teorema foi também causadora de problemas para bastantes alunos:

Na questão 2, surgiu a dificuldade mais frequente dos alunos e que mais nos intrigou. Esperava-se que reconhecessem a relação $a^2 + b^2 = c^2$. No entanto, a escrita de “ $a + b = c$ ” foi um erro generalizado. Podemos apenas especular que, não utilizando a representação da fórmula da área do quadrado “ l^2 ”, ao não encontrarem qualquer quadrado aritmético na tabela [fornecida aos alunos], atribuíram a designação a à primeira coluna e, de forma semelhante, b e c às restantes.

No seu relatório, os futuros professores indicam ainda outras dificuldades dos alunos, mostrando que realizaram uma observação atenta da aula de investigação e que, na sequência, fizeram uma reflexão aprofundada sobre o que observaram.

Balço do estudo de aula com futuros professores

O estudo de aula que descrevemos revelou-se uma aprendizagem muito valiosa para os futuros professores sobre tarefas, a abordagem exploratória, a aprendizagem e as dificuldades dos alunos. Na aula, nem tudo correu de acordo com o plano, seja porque o plano estava desadequado seja porque a professora decidiu atuar de forma diferente do previsto. No entanto, a realização de um plano detalhado foi uma mais-valia, ajudando os futuros professores a perceber em profundidade o que pode ser uma aula exploratória produtiva e que problemas podem surgir na sua realização.

Para além dos aspetos referidos, os futuros professores indicam ainda ter realizado outras aprendizagens, por exemplo, sobre o uso de tecnologia e outros recursos e sobre o envolvimento dos alunos na aula. Com a realização do estudo de aula nesta fase ainda inicial da sua formação como professores, ficaram certamente muitas questões por aprender. No entanto, tratou-se de uma experiência de aprendizagem muito poderosa, dada a ligação que foi possível estabelecer entre teoria e prática e a possibilidade de basear as reflexões feitas sobre observações diretamente recolhidas em sala de aula.

Grupo de futuros professores da UnB

Enquadramento geral

O calendário acadêmico da UnB alinhava-se, em parte, ao da UFCG e integralmente ao da Universidade de Lisboa, o que permitiu que os futuros professores tivessem encontros com as outras duas turmas. No primeiro encontro eles apresentaram e ouviram sugestões sobre um plano de aula (Ponte *et al.*, 2015), antes da lecionação da aula na escola. No segundo encontro,

socializaram as reflexões que construíram no pós-aula bem como a sua experiência com os estudos de aula (Ponte *et al.*, 2016).

O ECSM II da UnB, desenvolvido no ensino médio, possuía quatro grupos, sendo três com quatro futuros professores cada e um com dois. A escolha do grupo para atuar neste intercâmbio foi consensual entre todos os grupos, sendo formado por quatro estagiários, dois homens e duas mulheres, com idades entre 20 e 24 anos, que realizaram o estágio nas proximidades da UnB, em escola pública da Secretaria de Estado da Educação do Distrito Federal (SEEDF), em turmas de 3.º ano do ensino médio. O professor da escola estava, nessa ocasião, em seu primeiro ano de atuação no ensino médio, depois de ter atuado por cinco anos no ensino fundamental. É egresso do curso de Licenciatura em Matemática da UnB, o que facilitou o diálogo e a chegada dos futuros professores à escola. Sua opção em receber o grupo apoiou-se, fortemente, em sua disponibilidade para acolher projetos da UnB bem como na oportunidade de ter apoio para trabalhar com as turmas, visto o aumento do número de alunos em situação de dificuldade de aprendizagem no retorno ao ensino presencial pós-pandemia.

Durante o período de observação e colaboração na escola, o grupo teve amplo acesso às rotinas e às práticas do professor da escola. Assim, perceberam que os alunos apresentavam dúvidas conceituais sobre tópicos curriculares do ensino fundamental II e que as aulas do professor da escola pautavam-se, de modo geral, no paradigma do exercício (Skovsmose, 2000). Perceberam, igualmente, um contrato didático sob o qual os alunos só trabalhavam em situações que fossem valorizadas para a composição da nota final (listas de exercícios, testes, atividades extraclasse, etc.).

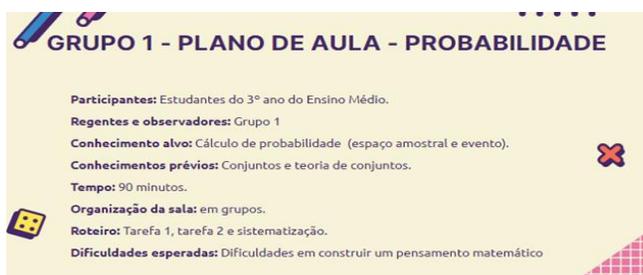
Abordagem e tarefa

A abordagem do ensino exploratório foi sugerida pela professora da universidade ao grupo que demonstrou receios e expectativas. Os receios pautavam-se em argumentos como: os alunos não tinham vivenciado experiências anteriores com o ensino exploratório; o número de alunos em sala variava muito, ora 38, ora 25; os alunos apresentavam dificuldades de adaptação ao ensino presencial, o que ocasionava comportamentos indesejados como o uso frequente do celular, conversas excessivas e a falta de respeito com os colegas e o professor, mostrando-se, por vezes, imaturos para o ensino médio e o convívio social. Tudo isso impunha dificuldades aos futuros professores no planejamento da aula em três fases e na delimitação dos tempos. Já as expectativas vinculavam-se às suas demandas pessoais por aprender práticas específicas da

carreira docente, impactadas pelas leituras realizadas na disciplina e pelos diálogos com os futuros professores da UFCG. Além disso, o grupo expressava, com frequência, a preocupação ao ver muitos alunos sem autonomia, sem entusiasmo, sem curiosidade e a necessidade de construir uma opção de aula de matemática que “*acordasse a moçada*” (RF). Evidenciava-se, assim, uma tensão positiva no grupo visto que os futuros professores passaram a equilibrar receios e expectativas assumindo, perante os demais grupos, uma postura mais reflexiva, inquieta e detalhista em relação às leituras dos artigos científicos, aos debates, aos planejamentos e à discussão sobre eles. Entendemos, assim como referem Pina Neves e Fiorentini (2021) que tais momentos são frutíferos para as aprendizagens profissionais.

Apoiados nos diálogos e reflexões proporcionados pelo EA, o grupo revisou a distribuição das quatro aulas, sendo que a primeira passou a abordar teoria de conjuntos, e a segunda vivenciar no ensino médio a tarefa matemática *par ou ímpar* descrita em Canavarro (2011) bem como trabalhar as seguintes habilidades da BNCC: “MAT48FG Identificar espaços amostrais em uma determinada situação”; “MAT50FG Calcular probabilidades levando em consideração a necessidade de realizar correspondências (quando for evento não equiprovável) entre o espaço amostral inicial e um novo espaço amostral adequado à situação”; “MAT51FG Resolver e elaborar situações-problema envolvendo o cálculo da probabilidade, realizando contagem das possibilidades, para identificar o espaço amostral de eventos aleatórios”. Desse modo, a segunda aula passou a ter a estrutura e tarefas indicadas na Figura 1.

Figura 1 - Elementos do Plano de aula do grupo



TAREFA 1
Par ou ímpar:
Depois de uma festa (*nomear dois alunos da turma*) ficaram apenas com um brigadeiro. Para decidirem quem comeria o brigadeiro, resolveram tirar a sorte: par ou ímpar. Eles já estão habituados a fazer isso: cada um esconde uma mão atrás das costas e escolhe mostrar 1, 2, 3, 4 ou 5 dedos; em seguida mostram as mãos ao mesmo tempo e a soma dos dedos das suas mãos determina o vencedor; se for par, ganha quem escolheu par previamente, se for ímpar, ganha quem escolheu ímpar.

1. Por meio da construção de um esquema, uma tabela ou um registro do que você entendeu, mostra as diferentes situações que podem ocorrer.
2. X escolheu ímpar e Y escolheu par. Você acha que alguém tem mais chance de ganhar? Justifique a sua resposta.

TAREFA 2:
Os Dados



Quero ganhar! Em muitos jogos de tabuleiro existe uma disputa de dados entre os adversários de maneira que quem tiver o maior número ganha.
Situação: Se em um determinado jogo, duas pessoas precisam lançar dois dados distintos para ver quem conquista um território, e o primeiro jogador tirou 5 em um dado e 3 no outro.
Qual é a chance do segundo jogador ganhar?
Após reflexão inicial adicionar mais perguntas:

1. Qual a chance dos dois dados darem par?
2. Qual a chance dos dois serem ímpares ou os dois serem par?
3. Qual a chance da soma dos dados ser maior que 7 é ímpar?
4. Qual a chance de tirar a maior soma?

Fonte:

Elaboração dos autores - 15 de março de 2022.

Aprendizagens, dificuldades e estratégias dos alunos

Uma das maiores preocupações do grupo durante o planejamento e a realização da aula era “tomar cuidado para não fornecer a resposta – ampliar o entendimento dos alunos sobre os caminhos possíveis” (E2). Esse fato foi retomado várias vezes nas reflexões quando os futuros professores se referem aos processos de raciocínio dos alunos, evidenciando que eles observaram que “os alunos tinham muitos pensamentos soltos, lógicos e intuitivos, mas dificuldade de organizar em tabelas e estruturas” (E2). E que, para tanto, deveriam formular respostas a questionamentos ou afirmações como: “Se par tem mais chance de acontecer, por que o colega que escolheu ímpar ganhou a disputa? Ímpar tem mais chance de acontecer, porque são mais números ímpares” (E2).

À medida que a aula era lecionada em uma turma, regentes e observadores realizavam alterações no plano de aula (que levavam consigo impresso), adicionando novas antecipações e melhorando as respostas. Logo, compreendiam que as antecipações expressas no plano poderiam ser ampliadas de modo a auxiliar o próximo regente que realizaria a aula nos dias seguintes, e que a cada nova aula eles ampliaram seus repertórios de antecipações. Todavia, perceberam, ao mesmo tempo, que “aprender a perguntar no ensino exploratório é demorado” (E2).

O fato de se aplicar o plano em quatro turmas, deu aos quatro futuros professores o entendimento do “plano de aula na prática” (E2). Logo, foi possível observar que os futuros

professores contrapuseram as dificuldades que anteciparam sobre as suas atuações em sala de aula (gestão da sala de aula, insegurança quanto ao conteúdo matemático e ao uso da linguagem adequada ao longo das intervenções) com o que eles vivenciaram. Assim, destacaram o que foi superado, superado em partes ou mantido “esforço maior [dos futuros professores] de deixá-los em grupos [os alunos] para explorar/responder as tarefas matemáticas; sugerir e guiar mais o trabalho dos alunos, incentivando a construção de tabelas; fazer mais perguntas provocativas” (E2). Ao reunir tais elementos, os futuros professores evidenciam o quanto é preciso ampliar junto deles o seu conhecimento didático, do conteúdo e dos alunos para que isso repercuta no plano de aula, em particular, quando se busca alterar uma cultura didática que não tem o hábito de permitir, aos alunos, um momento de investigação matemática apoiado em tarefas matemáticas (Quaresma *et al.*, 2022).

Ao longo da leção das aulas, os futuros professores verificaram a dificuldade de se realizarem, a contento, todas as etapas do ensino exploratório, especialmente, a sistematização, algo que foi amplamente debatido nos encontros de ECSM II. Isso aconteceu porque, era necessário permitir a investigação, ampliar o raciocínio dos alunos por meio de perguntas adequadas, “sem atropelar o tempo dos alunos”(RF). E também porque organizar a sistematização (o quadro, a recolha da produção dos alunos) a partir do que foi produzido individualmente/duplas/grupos, ampliando a compreensão conceptual do máximo possível de alunos, por meio de linguagem matemática adequada (Figura 2) se revelou bastante complexo.

Figura 2 - Elementos da segunda versão do plano de aula do grupo no que se refere às ações do professor na sistematização.

20 minutos	Sistematizar, a partir, das respostas dos alunos o que vem a ser união de eventos, interseção de eventos e eventos complementares (relacionando com o conteúdo trabalhado na aula anterior). Definir como se realiza o cálculo de probabilidade. (discutir que a probabilidade nunca passa de 100%).
------------	--

Fonte: Elaboração dos autores - 15 de março de 2022.

Ao mesmo tempo que os futuros professores se mostraram cientes das suas dificuldades, eles elencaram o quanto a proposta foi formativa, justamente por contrariar o que eles viveram enquanto alunos da educação básica e o que acompanharam no período de observação e colaboração na escola: “planejar uma aula ao redor do aluno. É algo que foi muito interessante para a gente, porque, querendo ou não, a gente veio do ensino muito tradicional” (E2).

Nesse sentido, em ECSM II muito se discutiu sobre a proposta da disciplina acontecer em processo de estudo de aula e, nesse ensejo, ter a turma organizada em grupos, almejando o envolvimento, o diálogo, a cooperação e a colaboração entre os integrantes em prol do desenvolvimento de conhecimento de forma coletiva. Assim, o percurso de respeito e acolhimento trilhado pelo grupo revelou-se muito educativo e apresentou para os formadores de professores, elementos para o fomento de novos grupos nos semestres seguintes *“foi um trabalho realizado em um grupo; o grupo participou de maneira muito construtiva. Todo mundo tinha fala, todo mundo tinha opinião, então a gente conseguia respeitar muito bem o que cada um falava, que cada um tinha para colaborar”*(E2).

O papel do professor da escola foi refletido pelo grupo a partir do questionamento. As respostas dos futuros professores mostram o quanto eles valorizaram a liberdade para o planejamento e as oportunidades, criadas por este professor, de acesso à sua prática e o quanto ele se mostrou disponível para aprender: *“o estágio não era um momento de aprendizado só nosso, mas também que era uma oportunidade dele aprender”* (E2). Igualmente, os futuros professores refletiram sobre a aprendizagem dos alunos contrapondo o quanto a aula a partir de um planejamento, que foi tão debatido, gerou ou não novas aprendizagens. Os futuros professores avaliam que a tarefa matemática 2 permitiu-lhes observarem avanços conceituais importantes nos alunos: *“em termos de conhecimento, eles soubessem encontrar os casos favoráveis, dividir pelos casos possíveis, entender o que que é um espaço amostral, o que é a chance de um evento ocorrer, calcular uma probabilidade”* (E2). Ademais, consideram que isso só foi possível a partir da tarefa matemática 1 e das melhorias que empreenderam ao comunicarem com os alunos.

Balanco do estudo de aula com futuros professores

O contato com futuros professores de uma instituição fora do Brasil deu ao grupo mais entendimento sobre a formação inicial de professores ao mesmo tempo em que despertou neles o interesse por conhecer o mercado de trabalho e as oportunidades de formação continuada para os professores recém-formados. A ampliação do diálogo, junto a futuros professores de três turmas, permitiu ao grupo melhorias quanto à comunicação e à organização de suas produções. A apresentação do plano de aula levou os futuros professores a debates sobre distribuição de tempo e falas, formato dos slides, software mais adequado, etc., o que, sem dúvida, contribuiu para sua futura prática profissional.

Os encontros permitiram ao grupo compreender melhor os estudos de aula e o ensino exploratório, especialmente, o papel da antecipação, no plano de aula, das ações do professor ante as dificuldades dos alunos. Nesse sentido, os futuros professores passaram a valorizar mais a etapa de estudo que antecede a primeira versão do plano. Passaram a defender que ela seja ampliada nos próximos semestres, dada a importância de acessar, com propriedade, tanto conhecimento do conteúdo a ministrar quanto conhecimento didático.

Grupo de futuros professores da UFCG

Enquadramento geral

É necessário destacar que o calendário acadêmico da UFCG era diferente das demais instituições. Ao participar dos dois encontros, sendo o primeiro com apresentação dos planos de aula (Ponte *et al.*, 2015), e o segundo com as observações e reflexões pós-aula, o ECSM II tinha concluído todos os ciclos de estudo de aula (Ponte *et al.*, 2016; Quaresma *et al.*, 2022). Portanto, os comentários realizados no primeiro encontro não podiam interferir nos resultados, porque tinham sido coletados anteriormente.

O ECSM II da UFCG, desenvolvido nos anos finais do ensino fundamental, possuía dois grupos com quatro futuros professores cada. Os professores da escola que acolhiam os dois grupos eram egressos do curso de Licenciatura em Matemática da UFCG e atuavam em escolas distintas. O grupo escolhido voluntariamente para participar desses momentos colaborativos foi o 2, composto por três homens e uma mulher, que atuaram em duas turmas de 7.º ano. A professora da escola ministrava aulas nesse nível há pouco mais de 2 anos e tinha experiência em receber futuros professores de estágio. O grupo era composto por alguns ex-alunos seus, facilitando a comunicação e o interesse da professora, que deixou o grupo à vontade para utilizar a metodologia que escolhesse, embora ela adotasse mais o paradigma do exercício (Skovsmose, 2000).

Abordagem e tarefa

Como o ECSM era conjunto com a UnB, então o ensino exploratório estava presente, o que se tornou um desafio para os futuros professores, tendo em vista que os conhecimentos e as vivências sobre esta abordagem eram iniciais. Para contribuir com a situação de exploração, o grupo dos futuros professores sentiu a necessidade de dinamizar a aula com um jogo para que os alunos participassem mais, pois estavam voltando a interagir de modo mais lento por conta

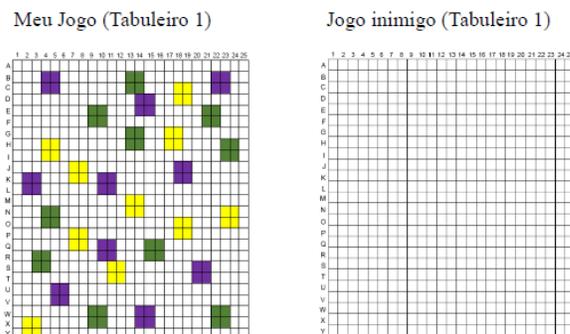
da pandemia e o retorno ao ensino presencial. O jogo foi adaptado da batalha naval tradicional após algumas sugestões e discussões durante as aulas de ECSM II, pois com as embarcações ficaria complicado trabalhar os pontos do plano cartesiano.

Para iniciar a elaboração do plano, o grupo escolheu dois objetivos, sendo um da Base Nacional Comum Curricular: “(EF05MA15) Interpretar, descrever e representar a localização ou movimentação de objetos no Plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros” (Brasil, 2018, p. 297) [plano de aula do grupo]. Isso mostra o reconhecimento e análise de um documento oficial que rege a educação básica brasileira atualmente, indicado nas disciplinas de ECSM pelas professoras.

Já o outro objetivo estava em consonância com o que o grupo esperava da aula com foco no jogo didático selecionado: “fazer com que os alunos se familiarizem com o termo “par ordenado” no momento que, no jogo, eles necessitam pegar pares para que consigam jogar e ganhar a competição. Por exemplo, os termos “B,4; B,5; C,4; C,5” são pares que completam um quadrado” (Plano de aula do grupo). Então, os futuros professores decidiram utilizar quadrados pintados em cores diferentes para facilitar a visualização dos pontos que seriam determinados pelo centro de cada quadrado (formado por quatro quadrados menores), conforme mostra a Figura 3.

Foram feitos dois tipos de tabuleiro com posições diferentes dos quadrados para cada par. O objetivo era encontrar todos os quadrados grandes, e cada cor tinha uma pontuação diferente, e o par que tivesse mais pontos, vencia. Mesmo assim, a professora continuava questionando como os futuros professores queriam introduzir o plano cartesiano se os pares do jogo representavam quadrados e não pontos. Por isso, o grupo escolheu uma tarefa que chamou de verificação para fazer a transição dos pares do jogo para os pares ordenados do plano cartesiano, não apenas da compreensão dos pontos, mas dos termos matemáticos também através de questionamentos escritos no plano, como se observa na Figura 4.

Figura 3 - Tabuleiro do jogo Batalha dos Quadrados, adaptado do Batalha Naval (do plano de aula do grupo).

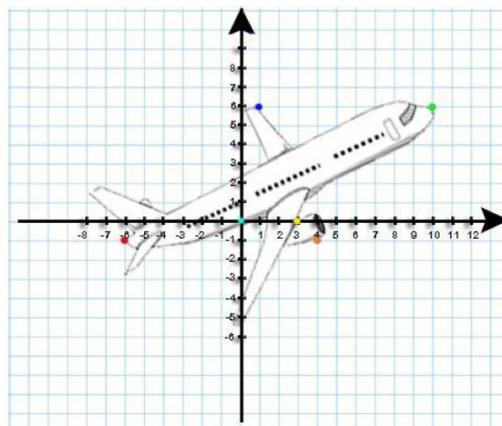


Fonte: Elaboração dos autores – 22 de fevereiro de 2022.

Figura 4 - Tarefa de verificação de aprendizagem do conteúdo (do plano de aula do grupo).

Tarefa 1²: Para verificação de aprendizagem do conteúdo.

Considere as coordenadas representadas pelos pontos a seguir:



Fonte: Elaboração dos autores - 22 de fevereiro de 2022.

Com essa tarefa, os futuros professores esperavam alcançar o primeiro objetivo do plano e além dele, pois os pontos estavam espalhados em todos os quadrantes.

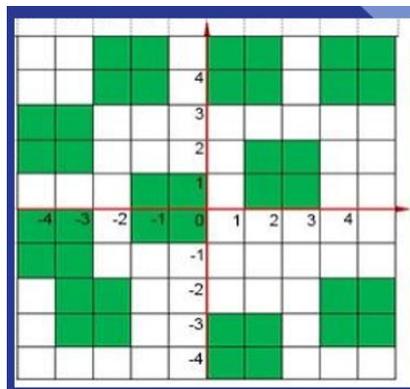
Aprendizagens, dificuldades e estratégias dos alunos

Esse ECSM III aconteceu no retorno às aulas presenciais, e a escola estava recebendo as turmas (cerca de 30 a 38 alunos no total) parcialmente, ou seja, uma semana recebia metade da turma e na outra, a segunda metade. Portanto, nesse período de tempo, o grupo decidiu fazer modificações na reflexão da primeira implementação do plano e construir um novo plano. Desse modo, percebe-se que a colaboração dentro da disciplina de estágio interveio na primeira

construção e as reflexões pós-aula nas demais versões, pois o grupo modificou o plano mais duas vezes após a primeira execução. O plano foi elaborado para uma aula de 50 minutos, entretanto o tempo não foi suficiente e o grupo teve que estendê-lo para uma segunda aula.

Após a aula, o grupo reuniu-se e decidiu mudar o tabuleiro do jogo, sobrepondo as coordenadas do plano cartesiano. Além disso, alterou as regras para facilitar a compreensão por parte dos alunos. Após outra aula, na penúltima reflexão, o grupo resolveu criar um novo tabuleiro (Figura 3) para conseguir cumprir os objetivos da aula, pelo fato de ter muitos quadrados para serem descobertos. O grupo retirou as letras e os números das laterais para facilitar o encontro dos centros dos quadrados, que seriam os pares ordenados após a formalização do conteúdo.

Figura 5 - Tabuleiro 3 do jogo Batalha do Quadrados (elaborado pelo grupo).



Fonte: Elaboração dos autores - 31 de março de 2022.

Diante dessa mudança, os alunos participaram ativamente da aula e os objetivos foram alcançados sem grandes dificuldades de compreensão. Com essa última versão, os futuros professores concluíram que os alunos “conseguiram realizar mais jogadas, até porque a gente acha que quanto mais jogadas, digamos assim, eles vão entender o conceito de par ordenado e de uma coordenada. Então mais jogadas estão relacionadas com maior aprendizado” (E2).

A partir dessa fala, é possível destacar que o objetivo da aula estava presente na mente dos futuros professores atrás da ludicidade do jogo. A falta de experiência profissional conduziu a várias versões de um mesmo planejamento, mas as reflexões e discussões foram relevantes e trouxeram mudanças significativas na escrita e na condução das aulas, desde o modelo do tabuleiro, nas regras, na distribuição do tempo, até nos questionamentos a levantar durante a aula. No relato, um dos futuros professores destacou:

A importância de deixar o jogo claro e sem muitos detalhes desnecessários para a aprendizagem do conteúdo. Não apenas o jogo, mas também os objetivos que se tem para a realização daquela aula, pois com o objetivo da aula em mente é mais fácil elaborar um jogo que cumpra com sua função de: despertar o raciocínio lógico dos alunos, o espírito de competitividade, etc. (RF).

Finalizando a apresentação no encontro 2, um futuro professor comentou:

Após o replanejamento de um plano, ainda pode haver necessidade de mudanças. Como é que a gente passou da versão 1 para a versão 2 e agora para a versão 3, e mesmo assim a gente vê que alguma mudança é necessária? Então, nunca a gente vai ver que um plano vai ficar realmente bom, digamos assim, para todas as pessoas, para todos os alunos. A gente sempre tenta fazer de maneira que o plano cumpra com o seu objetivo para um maior número de alunos possível. (E2)

O entendimento de que cada turma pode reagir de uma maneira diferente levou o grupo a chegar a esta conclusão.

Após a apresentação, algumas perguntas surgiram tanto dos futuros professores das demais instituições quanto de um dos professores da universidade: “os alunos conseguiram compreender e responder a tarefa de verificação? Foi uma aprendizagem satisfatória relativamente ao objetivo proposto? Eles conseguiram, ao final da aula, estabelecer essa relação entre um par ordenado e um lugar no espaço?” (E2 professor). As duas primeiras perguntas foram respondidas afirmativamente pelos futuros professores: “sim, a maioria dos alunos alcançou uma aprendizagem satisfatória e respondeu a tarefa de verificação sem dificuldades” (E2). A terceira pergunta ficou confusa para os futuros professores, tendo um deles dito que “como ambos estão no plano cartesiano, acredito que sim” (E2).

Em seguida, um dos professores questionou quais as aprendizagens que os futuros professores realizaram nessa experiência. Um deles respondeu que aprendeu a escrever de forma mais visível, a falar mais alto para os alunos escutarem e a explicar melhor. E continuou: “a gente melhorou também é em planejamento, principalmente, o planejamento, a gente não tinha muita experiência e essa aqui foi a melhor experiência que a gente teve em questão do planejamento como professor” (E2). A ideia de planejamento no início das aulas de ECSM II foi transformada a partir dos estudos realizados com a realização do estudo de aula, pois há uma estrutura diferente da que se está habituado em outros estágios.

Balanco do estudo de aula com futuros professores

Os encontros conduziram os futuros professores a refletirem sobre seus planejamentos ao assistirem às apresentações dos outros participantes e também aos comentários e sugestões feitas

para cada grupo. Isso ficou visível nos planeamentos do ECSM III que continham os mesmos futuros professores do ECSM II, pois as ações dos futuros professores e, principalmente, dos alunos se tornaram mais profundas em termos de conhecimento matemático. Os replaneamentos foram menos presentes, devido ao tempo, mas também devido à prática que vinha sendo desenvolvida desde o semestre anterior. A condução das aulas e as reflexões pós-aula também alcançaram um desenvolvimento maior, conforme se destaca nas falas e atitudes dos futuros professores, revelando que o estudo de aula e a colaboração neste presente contribuíram para o crescimento profissional dos participantes.

Intercâmbio como espaço de reflexão conjunta dos futuros professores

Os dois encontros de intercâmbio foram organizados de modo a que os futuros professores tivessem um tempo de apresentação das suas experiências, seguido de um momento de perguntas e respostas e, no final, houve ainda tempo para uma apreciação global desta experiência. Nesse espaço de reflexão conjunta, de um modo geral, todos os futuros professores valorizaram a partilha internacional de experiências, percebendo que aquilo que, por vezes, poderiam ser dificuldades só suas, afinal são também de colegas de outros pontos do seu país ou até de outros países. Por exemplo, um futuro professor da UFGC identificou as mesmas dificuldades dos alunos portugueses e brasileiros na interpretação das tarefas e no desenvolvimento do trabalho durante a aula:

Um ponto né? Que a gente como quando começa a dar aula, percebe, é que às vezes os problemas que acontecem durante a aula é algo exclusivo daquela aula. E a gente, nessa apresentação, a gente vê que esses problemas de interpretação de texto, de foco do aluno durante a aula, é uma coisa que está não só na gente, mas também noutras aulas e até noutras países. Interessante essa questão. (FP UFGC)

Num sentido semelhante, um futuro professor da ULisboa identificou a necessidade e a dificuldade em motivar os alunos nos diferentes países:

Também foi abordada por vários grupos. É, nomeadamente, também do Brasil, que tem a ver com o desinteresse dos alunos, nomeadamente os mais novos... Acho que é um grande desafio pensar sobre a forma como motivá-los a aprender matemática. (FP ULisboa)

Os futuros professores salientaram também esta partilha como um espaço onde aprenderam e tiveram oportunidade para conhecer novas tarefas exploratórias:

Eu vi várias tarefas exploratórias que eu, com certeza, pensaria em aplicar na minha vida enquanto professora, então foi realmente muito rico, muito oportuno, obrigada. (FP UnB)

Tal como destacado nos casos anteriormente apresentados, os futuros professores salientaram novamente na discussão final o papel importante do planeamento:

Conseguir perceber também essa questão do planeamento, que é uma coisa necessária, né? Digamos assim, e que às vezes não sai como planejado. É uma coisa que a gente planeja, mas às vezes a gente não consegue chegar num objetivo correto de aprendizagem, dá para cumprir com o objetivo daquela aula, né? Digamos assim. (FP UFCG)

Este futuro professor sublinhou, contudo, tal como foi visível em todas as apresentações, que nem sempre é possível por o plano em prática como idealizado.

Para a realização do plano de aula, foi destacado por um futuro professor da ULisboa a importância de conhecer a turma para que a aula seja a mais adequada possível:

Queria também referir ao reforçar a importância de termos podido assistir a uma aula primeiramente para conhecer a turma. No caso do nosso grupo, foi muito importante. Nós verificamos que a turma é muito heterogênea em termos do interesse que mostravam pela aula e isso levou-nos, durante o planeamento da nossa tarefa, a criarmos inclusive a 2 tarefas... Uma tarefa extra para os alunos mais capazes e uma primeira tarefa primeira mais simplificada para que todos os alunos se sentissem motivados. (FP ULisboa)

Na sequência, uma futura professora da UFCG refletiu sobre o momento de observação que estavam a viver naquele momento e como o podiam aproveitar de uma forma mais produtiva:

E um ponto extremamente importante e novo que eu, que eu verifiquei, foi o que o [colega da ULisboa] tinha falado. Que o fato de a gente chegar ontem na sala de aula para conhecer a turma. Para ver como que os alunos lidam com o professor preceptor que está ali naquele momento e tudo mais é até então, até o momento, a gente não tinha essa experiência aqui. É, fiquei pensando nisso aqui agora, se realmente a gente pode agregar isso agora em nosso estágio... Pelas experiências que demonstraram aqui, isso ajuda bastante na elaboração, no planeamento. Isso ajuda também até no desenvolvimento pessoal. É do da gente, não é? Quando a gente vai, vai estar lá na sala de aula tentando aplicar um determinado conteúdo. Quando a gente tem uma certa noção de como a turma vai se comportar. Isso colabora bastante, né? Porque a gente já tem um conhecimento prévio a mais. Uma estratégia mais para se utilizar naquela aula. (FP UFCG)

Apesar desta futura professora ter feito outro estágio onde realizou muitas observações, nesta partilha, ela refletiu sobre a informação que podia recolher dos alunos para a realização do planeamento da aula, mas também para o momento da sua lecionação.

Por fim, os futuros professores destacaram ainda este momento de partilha, como um momento de reflexão dentro dos próprios grupos na elaboração das apresentações: “[quero] agradecer a oportunidade, foi muito rico a essa troca e até pra gente também foi muito rico poder apresentar e estruturar todo esse conhecimento” (FP UnB).

Este intercâmbio permitiu aos futuros professores estruturarem e aprofundarem o seu próprio conhecimento, por meio da preparação das suas apresentações, mas também, compreender que os problemas profissionais não são exclusivos de uma sala de aula, nem tão pouco de um país. Para além disso, permitiu ainda que os futuros professores pudessem atribuir novo significado à observação de aulas, compreendendo que na observação é possível conhecer as turmas de modo a contribuir com o planeamento que será realizado.

Conclusão

O estudo de aula foi integrado de modos diferentes em fases diferentes dos programas de formação inicial de professores de Matemática que descrevemos, mas em todos os casos mostrou contribuir para aprendizagens significativas por parte dos futuros professores. Assim, estes reconheceram o valor de planificar uma aula em detalhe bem como de fazer um trabalho prévio de preparação dessa planificação explorando aspetos matemáticos e didáticos relevantes. Os futuros professores identificaram-se com a abordagem exploratória, reconhecendo as potencialidades de propor tarefas abertas e problemas aos alunos e de promover a sua aprendizagem a partir desse trabalho. Reconheceram, também, o valor da discussão coletiva, embora assinalando a dificuldade na condução deste momento da aula. Além disso, mostraram compreender a necessidade de conhecer os alunos para poder trabalhar com eles e, em particular, para elaborar planos de aula ajustados às suas características.

O intercâmbio que realizámos mostrou ser uma iniciativa produtiva. Os futuros professores empenharam-se na preparação das suas intervenções e durante os encontros realizados colocando questões aos colegas de outras instituições. Mostraram ter aprendido na interação uns com os outros e evidenciaram ter alargado os seus horizontes a partir do trabalho realizado. Deste modo, tanto o estudo de aula como o intercâmbio entre futuros professores de diferentes instituições de diferentes países mostraram ser atividades valiosas na formação inicial, que projetamos continuar a realizar no futuro.

Referências

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Bardin, L. (1979). *Análise de conteúdo*. Edições 70.

Bergsten, C., Grevholm, B., Franco Favilli, Bednarz, N., Proulx, J., Mewborn, D., et al. (2009). Learning to teach mathematics: Expanding the role of practicum as an integrated part of a teacher education programme. In R. Even & D. Loewenberg Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics: The 15th ICMI Study* (pp. 57-70). Springer.

Brasil. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.

Canavarro, A. P. (2011) Ensino exploratório de matemática: práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., et al. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.

Cavanagh, M. S., & Garvey, T. (2012). A professional experience learning community for pre-service secondary mathematics teachers. *Australian Journal of Teacher Education*, 37(12), 57-75.

Clivaz, S., & Miyakawa, T. (2020). The effects of culture on mathematics lessons: An international comparative study of a collaboratively designed lesson. *Educational Studies in Mathematics*, 105, 53-70.

Macedo, A.D.R., Baltar Bellemain, P.M., & Winsløw, C. (2020). Lesson study with didactical engineering for student teachers in Brazil. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, Vol. 9 No. 2, pp. 127-138. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-03-2019-0027>.

Martins, M., Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2021). Os desafios da abordagem exploratória no ensino da matemática: Aprendizagens de duas futuras professoras através do estudo de aula. *BOLEMA*, 35(69), 343-364.

Pina Neves, R. da S., & Fiorentini, D. (2021). Aprendizagens de futuros professores de matemática em um estágio curricular supervisionado em processo de Lesson Study. *Perspectivas da Educação Matemática*, 14(34), 1-30. <http://dx.doi.org/10.46312/pem.v14i34.12676>

Pina Neves, R. da S., Fiorentini, D., & Silva, J. M. P. (2022). Lesson Study Presencial e o Estágio Curricular Supervisionado em Matemática: contribuições à aprendizagem docente. *Paradigma*, 43(1), 409-442. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2022.p409-442.id1178>

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-98). Graó.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). Routledge.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 223-261). Taylor & Francis.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2015). É mesmo necessário fazer planos de aula? *Educação e Matemática*, 133, 26-35.

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2016). O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. *BOLEMA*, 30(56), 868-891.

Ponte, J. P., & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação*, 11(2), 145-163.

Quaresma, M., Pina Neves, R. da S., Macedo, A. D. R. (2022). Prática profissional e o estágio curricular supervisionado: experiências com Lesson Study na formação inicial de professores de matemática. *Educação Matemática em Revista - RS*, 23(1), 135-148.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255-281.

Schoenfeld, A. H. (2020). Reframing teacher knowledge: a research and development agenda. *ZDM*, 52, 359-376.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, 14(13), 66-91.

Strutchens, M. E., Huang, R., Losano, L., Potari, D., Ponte, J. P., Cyrino, M., et al. (2016). *The mathematics education of prospective secondary teachers around the world*. Springer.

Swan, M. (2017-18). Conceber tarefas e aulas que desenvolvam a compreensão concetual, a competência estratégica e a consciência crítica. *Educação e Matemática*, 144-145-146, 67-72 e 68-14.

Dados dos autores

João Pedro da Ponte

Licenciatura em Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Portugal
Doutoramento em Mathematics Education na Universidade da Georgia, EUA
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal
Área de Investigação e Ensino de Didática, Linha de Pesquisa de Estudos de Aula
jpponte@ie.ulisboa.pt
<https://orcid.org/0000-0001-6203-7616>

Regina da Silva Pina Neves

Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Goiás
Mestrado em Educação, Universidade de Brasília
Doutorado em Psicologia, Universidade de Brasília
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Grupo de Investigação em Ensino de Matemática (GIEM)
Linha de Pesquisa em Formação de Professores
reginapina@mat.unb.br
<https://orcid.org/0000-0002-7952-9665>

Aluska Dias Ramos de Macedo

Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual da Paraíba
Mestrado em Educação, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco
Universidade Federal de Campina Grande
Grupo de Investigação em Ensino de Matemática (GIEM)
Linha de Pesquisa em Formação de Professores
aluskadrmacedo@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-0398-1097>

Marisa Quaresma

Licenciatura, Professores do Ensino Básico na variante de Matemática e Ciências da
Natureza, Escola Superior de Educação de Setúbal
Mestrado em Educação, especialidade em Didática da Matemática, Instituto de Educação
da Universidade de Lisboa
Doutoramento em Educação, especialidade em Didática da Matemática, Instituto de
Educação da Universidade de Lisboa
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Área de Investigação e Ensino de Didática, Linha de Pesquisa de Estudos de Aula
mq@campus.ul.pt
<https://orcid.org/0000-0002-0861-6016>

Como citar o artigo:

PONTE, J.P., PINA NEVES, R. S. P., MACEDO, A. D. R., QUARESMA, M. Formação inicial de professores de Matemática: uma experiência de intercâmbio internacional com base em estudos de aula. **Revista Paradigma**, Vol. XLIV, Edición Temática Estudio de Clases: Contribuciones de la educación japonesa en diferentes países, mayo de 2023 / 213 – 240. DOI: <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p213-240.id1418>

Aprendizagem Conceitual e Didática Acerca do Sentido de Número: resultados de um *lesson study* em uma escola pública sobralense

Madeline Gurgel Barreto Maia

madelinemaia@yahoo.com.br

<https://orcid.org/0000-0002-3595-0677>

Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)
Sobral, Brasil.

Dario Fiorentini

dariof@unicamp.br

<https://orcid.org/0000-0001-5536-0781>

Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Campinas, Brasil.

Recebido: 05/04/2023 **Aceito:** 25/04/2023

Resumo

Esta investigação tem por objetivo conhecer e discutir as aprendizagens e os aprendizados conceituais e didáticos de professoras que ensinam Matemática, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, e que participaram de uma experiência de *Lesson Study* (LS) com foco de estudo no sentido de número e que foi desenvolvida em uma escola pública da cidade de Sobral/Ceará. Trata-se de uma investigação qualitativa, na modalidade de pesquisa narrativa, desenvolvida com um grupo colaborativo de três professoras de uma escola pública e uma formadora da universidade. Os dados foram coletados a partir de narrativas orais e escritas relativas à experiência de LS, bem como de materiais didáticos utilizados pelas professoras e documentos oficiais curriculares de âmbito nacional, estadual e municipal. As ações foram desenvolvidas com o grupo colaborativo, com encontros semanais, a partir de um ciclo do LS, contendo quatro fases: (1) discutir com as professoras as ideias de sentido de número na prática cotidiana; (2) pensar e repensar as ações docentes desenvolvidas por elas e a proposta da rede e analisar documentos curriculares; (3) planejar uma aula, visando explorar o sentido de número; (4) refletir sobre ela e verificar os aprendizados e avanços decorrentes, que configurou-se como as novas espécies marinhas na realidade de Sobral. A análise dos dados evidenciou aprendizagens e aprendizados conceituais e didáticos relacionados à prática docente no trabalho exploratório com os sentidos de número, em que as professoras ressignificaram suas ações e experiências, a partir da análise de documentos recebidos pela rede de ensino, repensando as questões, realizando discussões e abordagens em sala de aula. As vivências proporcionadas no grupo colaborativo, a partir do ciclo de LS, revelaram que o sentido de número não se constrói apenas em um processo de discussão e explanação dos conteúdos, mas em modelos formativos que tomam como objeto de estudo casos reais que ocorrem na prática, oportunizando aprendizados e a produção de conhecimentos da e para a prática.

Palavras-chave: Sentido de Número. Lesson Study. Aprendizagens. Aprendizados.

Aprendizaje conceptual y didáctico sobre el sentido numérico: resultados de un estudio de clase en una escuela pública de Sobral

Resumen

Este trabajo trae una narrativa de una investigación desarrollada en el aula, a partir de una pasantía posdoctoral. La investigación tuvo como objetivo conocer y discutir el aprendizaje conceptual y didáctico de profesores que enseñan Matemática en los primeros años de la Enseñanza Fundamental sobre el sentido del número en una escuela pública de la ciudad de Sobral/Ceará. Se trata de una investigación cualitativa, en forma de investigación narrativa, desarrollada con un grupo de tres docentes de una escuela pública. Los datos fueron recolectados de narraciones orales y escritas, así como de materiales didácticos utilizados por los docentes y documentos curriculares oficiales de los niveles nacional, estatal y municipal. Las acciones se desarrollaron en un grupo colaborativo, con reuniones semanales, con base en un ciclo Lesson Study - LS que incluyó: (1) discutimos con los maestros las ideas del sentido numérico en la práctica diaria. (2) Pensamos y repensamos las acciones docentes desarrolladas por ellos y la propuesta de la red y analizamos los documentos curriculares. (3) Planeamos una lección para explorar el sentido numérico. (4) Reflexionamos sobre ella y comprobamos las lecciones aprendidas y los avances resultantes, que se convirtieron en las nuevas especies marinas en la realidad de Sobral. El análisis de datos evidenció aprendizajes conceptuales y didácticos relacionados con la práctica docente en el trabajo con los sentidos del número, donde los docentes resignificaron sus acciones y experiencias, a partir del análisis de documentos recibidos por la red docente, repensando las preguntas, discusiones y aula. enfoques. Las experiencias brindadas en el grupo colaborativo, del ciclo Lesson Study, revelaron que el sentido del número no se construye sólo en un proceso de discusión y explicación de los contenidos, sino en modelos formativos que estudian casos reales, surgidos de la práctica, en la práctica. y para la práctica.

Palabras clave: Sentido de los números. Estudio de la lección. Aprendizajes. Aprendizajes.

Conceptual and Didactic Learning About Number Sense: results of a lesson study in a public school in Sobral

Abstract

This work brings a narrative of a research developed in the classroom, from a post-doctoral internship. The investigation aimed to know and discuss the conceptual and didactic learning and learning by teachers who teach Mathematics in the early years of Elementary School about the sense of number in a public school in the city of Sobral/Ceará. This is a qualitative investigation, in the form of narrative research, developed with a group of three teachers from a public school. Data were collected from oral and written narratives, as well as didactic materials used by the teachers and official curriculum documents from the national, state and municipal levels. The actions were developed in a collaborative group, with weekly meetings, based on a Lesson Study - LS cycle that included (1) we discussed with the teachers the ideas of number sense in everyday practice. (2) We thought and rethought the teaching actions developed by them and the proposal by the network and analyzed curricular documents. (3) We planned a lesson to explore number sense. (4) We reflected on it and verified the lessons learned and the resulting advances, which became the new marine species in the reality of Sobral. Data analysis

showed conceptual and didactic learning related to the teaching practice in working with the senses of number, where the teachers re-signified their actions and experiences, based on the analysis of documents received by the teaching network, rethinking the questions, discussions and classroom approaches. The experiences provided in the collaborative group, from the Lesson Study cycle, revealed that the sense of number is not built only in a process of discussion and explanation of the contents, but in formative models that study real cases, arising from practice, in practice and for practice.

Keywords: Number Sense. Lesson Study. Apprenticeships. Learnings.

1. Introdução

Este trabalho narra analítica e interpretativamente uma experiência formativa e investigativa, cujo objetivo foi conhecer e discutir as aprendizagens e os aprendizados conceituais e didáticos de professoras que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, mediante um processo colaborativo de estudo de aula (Lesson Study - LS) sobre o sentido de número e que foi desenvolvido em uma escola pública da cidade de Sobral/Ceará. O estudo foi pensado para ser desenvolvido nesta cidade, levando em consideração, principalmente, sua posição de destaque nacional em relação aos resultados das avaliações em larga escala. Sobral conquistou, no ano de 2021, quando da proposição desta pesquisa, a nota 8,0 na avaliação dos anos iniciais (1º ao 5º ano), no Índice de Oportunidades da Educação Brasileira (IOEB)⁴, ficando em primeiro lugar no *ranking* nacional. Dessa forma, interessou-nos conhecer esta realidade, principalmente aquela relacionada ao sentido de número e à prática desenvolvida por aqueles que ensinam Matemática nos anos iniciais, uma vez que a preparação deles é aspecto fundamental para o bom desempenho discente.

Definimos o sentido de número como o assunto a ser estudado, aprofundado e explorado em sala de aula. Buscamos, inicialmente, averiguar como esse conceito era tratado nos documentos curriculares e como as professoras o concebiam e agiam didaticamente para propiciar sua elaboração junto aos seus alunos.

Dessa forma, estruturamos um processo formativo, com um grupo colaborativo, composto por três professoras de uma escola pública municipal sobralense e uma formadora da universidade (primeira autora deste artigo) para tratar e explorar a temática, a partir de um ciclo de LS. O LS tem natureza investigativa, reflexiva e colaborativa. Ele vai se construindo na

⁴ Dados levantados de: <https://www.opovo.com.br/noticias/ceara/2021/10/21/sobral-e-cruz-conquistam-maiores-notas-no-indice-de-oportunidades-da-educacao-brasileira-2021.html>. Acesso em: 27 jun. 2022

interação e discussão do grupo, em que são levantadas informações relacionadas a um determinado assunto, a partir de um estudo de aula (PINA NEVES; FIORENTINI, 2022). Aspectos da própria prática profissional dos envolvidos são destacados e vão desde a definição de um problema a enfrentar, o trabalho preparatório e o planejamento de uma nova aula, seguido da intervenção e observação e as reflexões após a aula. Nesse limiar, há movimentos de transformação de dentro para fora que levam todos os envolvidos a um processo de desenvolvimento profissional (FIORENTINI; CRECCI, 2012). Assim, considerando a formação de um grupo colaborativo, a partir de uma experiência de LS, construímos um processo formativo que surge na prática, da prática e volta-se para a prática (COCHRAN-SMITH; LYTLE, 1999), gerando aprendizagens e aprendizados⁵ conceituais e didáticos. Neste sentido, o LS pode dar ferramentas ao professor para: avançar em conhecimentos do conteúdo curricular e de ensino; observar e perceber dificuldades e possibilidades dos alunos; fortalecer vínculos pessoais e profissionais e estabelecer relação entre as práticas cotidianas e objetivos de ensino; motivar, dar segurança e senso de eficácia ao professor; promover a melhoria da qualidade da aula. Diante do exposto, a investigação sobre a prática, na perspectiva do LS, configura-se como um processo de movimento constante que promove desenvolvimento profissional e aprendizagens docentes. O que foi verificado neste estudo.

Frente a toda esta realidade, sabíamos que, diante de nós, havia um “oceano” chamado Educação; neste oceano, existia um “mar rico”, chamado por nós de experiência educacional de Sobral; e, dentro deste “mar”, tínhamos “espécies marinhas” a serem descobertas, as aprendizagens e os aprendizados conceituais e didáticos. Estes estavam vinculados à formação do professor que ensina matemática, nossa área de trabalho e todas as nuances que formam “novas espécies marinhas” também traduzidas por vivências e experiências formativas, relacionadas ao sentido de número dentro “daquele mar”.

A partir desta visão, decidimos realizar um levantamento de referências bibliográficas acerca dos assuntos abordados e vivenciados em nosso ciclo de formação. Assim, tivemos acesso à literatura especializada acerca de autores que trabalham com sentidos de número, bem como com grupos colaborativos, pesquisa narrativa e experiências de LS. Isso foi fundamental

⁵ As aprendizagens são os processos ou modos de aprender em uma experiência formativa; e, aprendizados os produtos e resultados do processo de aprendizagem, desenvolvidos em uma comunidade de prática (PINA NEVES; FIORENTINI, 2022)

para a abertura de um leque de novas abordagens que, necessariamente, se estendia diante de nós e, conseqüentemente, de pesquisadores, alunos de graduação e pós-graduação na comunidade de educadores matemáticos. É impossível sermos os mesmos no “oceano da Educação”, após o “mergulho” feito neste estudo, que compõe a seção 2, intitulada “Espécies estudadas no fundo do mar: entendendo os sentidos de número”.

Realizado este “mergulho” em águas profundas e novas, partimos para a realização do trabalho de campo, que está descrito na seção 3, intitulada “Mergulhando em águas profundas: caracterização do Lesson Study e procedimentos metodológicos de coleta e análise de dados”. O trabalho de campo foi visto por mim e pelas três professoras do 3º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Sobral, como um *mar calmo, tranquilo, sem grandes ondas*, mas absolutamente rico em “espécies marinhas” que estavam em um único lugar por muito tempo, mas com vontade de descobrir e chegar em novos lugares na imensidão do que chamamos de oceano da Educação. O “Mar” da Educação de Sobral poderia ir além!” E assim, fomos “nadando” juntas em nossas trocas de experiências que, a todo instante, nos levavam a um nível mais profundo de reflexão. Chegar a outro lugar “naquele mar” era uma transformação de dentro para fora, que nos tornou outras pessoas e profissionais para o resto de nossas vidas.

Na seção 4, discorremos sobre as espécies marinhas descobertas. Essa seção foi intitulada “Um mar rico em espécies marinhas: análise narrativa das aprendizagens e dos aprendizados desenvolvidos na experiência formativa do LS de Sobral”. Tais espécies se traduzem aqui como os achados de nossa pesquisa, as aprendizagens e os aprendizados conceituais e didáticos, o movimento de aprendizagem e transformação do grupo e das professoras. Apresentamos o que foi acontecendo dentro de nós “naquele mar”, que foi a prática docente estudada. Como éramos? Como descobrimos novos lugares? Como ficamos ao descobrir novos lugares? As novas percepções nos levaram para uma nova vida! E não apenas “marinha”, aprendemos a “respirar dentro e fora d’água” de um modo diferente! E vamos voltar para a Universidade formando novos professores e para as escolas formando novos alunos!

E essa “nova forma de respirar” compõe a última seção deste trabalho, apresentando nossos aprendizados como formadora de professores que ensinam Matemática! São as conclusões e reflexões finais, apresentando o Lesson Study (LS) como cilindro de oxigênio que ajuda a explorar os sentidos de número na realidade de Sobral. Sabemos que o mar chamado de “aula e prática docente daquelas professoras” foi apenas uma gota do oceano que é a Educação.

Mas, temos clareza que muito foi feito naquele pedaço de mar já “tão rico e que acreditava tanto ser um dos melhores para mergulho”!

2. Espécies estudadas no fundo do mar: *entendendo os sentidos de número*

Ao iniciar este “mergulho”, que seria a formação de um grupo colaborativo com professoras interessadas em discutir profundamente um assunto complexo como o trabalho conceitual e didático a partir dos sentidos de número (a ser configurado e estudado na fase 1 do LS), sabíamos que isso não poderia ser algo fácil e rápido, mesmo utilizando um “cilindro de oxigênio”. Talvez, fosse necessário, inicialmente, utilizar um “esnórquel” para conhecer o que a literatura e os documentos oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (2017), o Documento Curricular Referencial do Ceará (DCRC) (2019) e o Documento Curricular Referencial de Sobral (DCRS) (2021), bem como a literatura abordavam o sentido de número.

O trabalho e as discussões sobre este assunto ainda são recentes. A literatura nos tem mostrado que um ensino pautado na ideia de Sentido de Número favorece o pensamento flexível e intuitivo, a partir de uma compreensão relacional necessária ao fazer matemático: desenvolvendo nos alunos o poder de análise, criação, conhecimento e destreza com conteúdos matemáticos na vida cotidiana (CEBOLA, 2007).

Turkel e Newman (1993) afirmam que um mesmo número pode ser usado com diferentes significados e que, portanto, os sentidos de números que devem ser desenvolvidos na escola são, principalmente: localização, ordenação, identificação, medição e estimativa. Existem ideias mais complexas, como o pensamento algébrico, o contexto e o número como código de identificação e localização nas diferentes práticas sociais, que precisam também ser exploradas na prática escolar e formativa dos professores.

O próprio National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2022) deixa claro que o sentido de número envolve a compreensão de relações Matemáticas, considerando diferentes contextos de uso e de práticas socioculturais que envolvem números. Portanto, destaca, direta e indiretamente, a importância de se considerar a sintaxe e a semântica numérica. O sentido de número é um conceito complexo e não se desenvolve em um único ano letivo. Ao contrário, perpassa todo o Ensino Básico.

Diante do exposto, o sentido de número que foi adotado em nosso processo de LS e baseado na perspectiva de Greenes, Shulman e Spungin (1993) que o definem como a

compreensão de relações matemáticas, considerando os diferentes contextos e a aplicação dessas relações. Logo, uma boa compreensão das relações entre os números, ter destreza com eles, compreender seus diferentes usos e o contexto do problema compõem o sentido de número.

Nesse cenário, assumimos que as crianças precisam reconhecer os vários usos dos números, a adequação deles aos respectivos contextos, associando suas magnitudes a objetos, eventos e situações reais. Por exemplo, faz parte da ideia de sentido de número: compreender as diferentes formas de contagem e comparações de quantidades dentro dos contextos e interpretar as frases a partir do estabelecimento de relações matemáticas.

Diante disso, entendemos que o número não é um “conteúdo” ou tema isolado, que se resume à aprendizagem da escrita, leitura e contagem para, em seguida, se aprenderem as “operações básicas”. O número ganha significado no contexto de uso e as relações matemáticas estabelecidas nesse contexto dão sentidos que precisam ser explorados no fazer matemático. Mas, até que ponto as professoras conheciam estas ideias, as praticavam ou estavam em condições para delas fazerem uso em suas práticas? Ou ainda necessitavam conhecer melhor esta nova “espécie marinha”!

Em face dessas premissas, Cebola (2007) critica os currículos que deixam de modo vago essas ideias acerca dos sentidos de número. Assim, consideramos necessário, antes mesmo de formarmos o grupo de trabalho colaborativo, conhecer melhor o que dizem os documentos oficiais BNCC (2017), DCRC (2019) e DCRS (2021) que, embora não ditem diretamente os currículos e conteúdos específicos, ainda norteiam a Educação brasileira. Destacamos os sentidos de número presentes explicitamente nas áreas temáticas e habilidades matemáticas a serem desenvolvidas nos anos iniciais do Ensino Fundamental nos referidos documentos.

Nenhum deles mencionou especificamente o termo “sentido de número”. Apenas traziam relações implícitas, deixando aos próprios formadores ou docentes a tarefa de explorá-los ou não em suas práticas educativas. Havia um enfoque maior na *quantificação, contagem, ordens numéricas e operações*, reforçando uma prática compartimentalizada em sala de aula. Outros sentidos de número apareceram nesta mesma linha de pensamento: contagem, probabilidade, ordem, leitura, escrita, reconhecimento, o número nas operações, proporcionalidade, regularidades e padrões, o número no cálculo mental, na reta numérica, medida, número no contexto do dinheiro e como código de localização e identificação.

É importante ressaltar que a ideia do número como código localizador e identificador apareceu, de modo bastante restrito, na BNCC e no DCRC e não apareceu de modo explícito no DCRS, reforçando uma abordagem restrita ao primeiro ano do ensino fundamental e superficial desta perspectiva, embora ela traga em si um caráter bastante relevante, inclusive relacionado à inclusão social, por exemplo.

Neste primeiro “fundo do mar” que adentramos, algumas reflexões iniciais foram realizadas. A “cultura” (SACRISTÁN, 1998) aí revelada reforça o que tradicionalmente representa senso comum nas escolas: realização de um trabalho compartimentalizado dos conteúdos como se estes não tivessem relação entre si, o que vai contra o que diz a literatura acerca do sentido de número, na perspectiva aqui tratada.

Fugindo dessa perspectiva, Pires e Silva (2011) trazem a ideia para a sala de discussões relacionadas ao sentido do número em diferentes contextos e não apenas a ideia de ensinar números e operações, como normalmente vem em destaque nas áreas temáticas dos documentos norteadores brasileiros. O trabalho com os números não pode ficar restrito ao que tradicionalmente se entende pela disciplina escolar de Matemática. Uma organização curricular com base nos sentidos de número revela-se culturalmente relevante para o ensino e a aprendizagem da Matemática: destacando aspectos sociais, culturais, históricos e de inclusão. Mas, estariam as professoras preparadas ou em condições para trabalhar nesta perspectiva de organização curricular? O LS foi um mergulho novo na realidade de Sobral. Ele abriu espaço para discutir e problematizar as aprendizagens que vinham produzindo NA prática, dando início às aprendizagens DA prática, transformando-as (MAIA; FIORENTINI, 2023).

3. Mergulhando em águas profundas: caracterização do Lesson Study e procedimentos metodológicos de coleta e análise de dados

Fomos ao “alto mar” desenvolver uma pesquisa qualitativa de caráter narrativo. Encontramos um mar calmo, tranquilo e sem grandes ondas: a realidade educacional de Sobral. Especificamente, formamos um grupo de três professoras de uma escola pública municipal, do terceiro ano do Ensino Fundamental, mais a pesquisadora da universidade. Tínhamos encontros semanais, com duração de 2 horas e 30 minutos. A escola escolhida foi indicada pela secretaria de Educação, tendo em vista uma organização e melhor distribuição da quantidade de

pesquisadores que hoje investigam a experiência educacional da cidade de Sobral. A escolha do ano (3º ano) deu-se pelo fato dessa turma ter feito o primeiro e o segundo ano praticamente no modelo remoto, devido à pandemia da Covid-19.

E neste “mar”, formamos um grupo colaborativo (FIORENTINI, 2009), cujo mergulho foi longo e já contando com o apoio de “cilindros de oxigênio”, pois foram cinco meses de convivência, nos quais desenvolvemos um ciclo de LS, por sua natureza reflexiva, investigativa e colaborativa. O LS é um processo formativo que parte da própria prática profissional dos docentes (MAIA; FIORENTINI, 2023). Esta prática passou a ser reconhecida internacionalmente como um processo que promove desenvolvimento profissional, centrado no estudo das próprias práticas letivas (PINA NEVES; FIORENTINI, 2022) e por meio de parcerias entre formadores, pesquisadores universitários, gestores das redes de ensino, das escolas e professores da Educação Básica (SILVA; BALDIN, 2021).

Em nossa proposta, vivenciamos 4 fases: (1) discutimos com as professoras as ideias de sentido de número na prática cotidiana delas; (2) pensamos e repensamos as ações docentes desenvolvidas por elas e a proposta pela rede e analisamos documentos curriculares; (3) planejamos uma aula, visando explorar o sentido de número; (4) refletimos sobre ela e verificamos os aprendizados e avanços decorrentes, que se configuraram como as novas espécies marinhas na realidade de Sobral.

Na verdade, estudamos os temas matemáticos que elas estavam trabalhando e que deveriam ser de acordo com os cadernos da Escola de Formação de Professores de Sobral. Mensalmente, as professoras recebem os temas e descritores das avaliações a serem trabalhados, as habilidades a serem desenvolvidas, bem como as questões específicas a serem contempladas e as páginas do livro didático adotado do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD).

Embora existisse um forte controle sobre as ações das professoras no sentido do que devem ministrar e que modelo de questões deveriam desenvolver, isso não impedia que pudéssemos adotar, na prática, a exploração do sentido de número. Esta foi a brecha que encontramos nesse contexto escolar altamente controlado e monitorado (DE CERTAU, 1994). Assim, colaborativamente: estudamos e definimos um problema (a exploração do sentido de número) a enfrentar dentro da realidade delas; planejamos uma aula; lecionamos e observamos; refletimos no pós-aula e replanejamos. Tudo isso foi permeado por discussões, reflexões, criações e vivências nem sempre conhecidas por elas.

Para coletar os dados dessa experiência e analisar os processos de aprendizagem e seus aprendizados, utilizamos narrativas escritas e orais, conforme propõe a pesquisa narrativa (CLANDININ; CONNELLY, 2000), sendo esta uma forma de entender a experiência em um processo de colaboração entre pesquisador e participantes da pesquisa. As histórias narradas trazem informações sobre os processos vividos (aprendizagens) e os sentidos e conhecimentos produzidos nesse contexto (aprendizados). Para colocar em evidência e compreender esse processo de desenvolvimento profissional das professoras, foi realizada uma análise narrativa dessa experiência formativa, destacando situações de aprendizagem e suas ressignificações, além de identificar as reverberações disso na prática e no conhecimento profissional não apenas das professoras da escola, mas também da própria pesquisadora (FIORENTINI, 2013). Algumas dessas descobertas foram metaforicamente identificadas, neste estudo, como “novas espécies marinhas” descobertas no “fundo do mar”.

4. Um mar rico em espécies marinhas: análise narrativa das aprendizagens e dos aprendizados desenvolvidos na experiência formativa do LS em Sobral

4.1 Estudo e planejamento de atividades exploratórias sobre sentido de número

Estamos chamando de espécies marinhas ou novas espécies marinhas, neste tópico, as aprendizagens e aprendizados proporcionados pelas experiências vividas no grupo colaborativo. As primeiras ações realizadas em “alto mar”, na *primeira fase* de nosso ciclo de LS (*Estudo e definição de um problema pedagógico – o sentido de número*), diziam respeito ao estudo de uma aula já ministrada pelas professoras. Era impossível seguir uma estratégia em nosso estudo de aula na realidade de Sobral se não partíssemos do que já era pré-determinado pela rede municipal de ensino.

Como era praxe seguir os “cadernos da escola de formação de professores”, as docentes trouxeram para o grupo os materiais que trabalharam em sala de aula, que tratavam de conteúdos matemáticos essencialmente baseados nos descritores do SAEB⁶, cujo assunto principal era relativo aos números pares e ímpares. A partir desses materiais, lemos, estudamos e discutimos o que os descritores traziam e as ideias de sentido de número que estavam por trás de cada um

⁶ Sistema de Avaliação da Educação Básica

deles. Havia algumas questões que, basicamente, trabalhavam sequências numéricas. As tarefas a serem aplicadas pelas professoras, em sala de aula, eram alinhadas ao paradigma do exercício, conforme Skovsmose (2000), ou seja, eram tarefas geralmente não exploratórias. Nessa realidade, os professores costumam apresentar os conteúdos matemáticos e técnicas operatórias, depois mostram exemplos semelhantes, em seguida, propõem exercícios, visando à fixação dos conteúdos. Assim, seguimos com a análise dos assuntos a serem trabalhados por elas, de acordo com a orientação da rede, analisando e problematizando algumas questões relacionadas ao sentido de número.

Questionadas sobre quando os alunos utilizariam os números pares e ímpares na vida, uma das professoras respondeu: “...os alunos vão precisar disso lá na frente, para aprender outros conteúdos”. A partir desse momento, travamos uma exploração sobre os números das casas, nas ruas e endereços, na tentativa de que percebessem que o trabalho com números pares e ímpares poderia remeter à ideia de número como localizador e/ou identificador de lugar. Algumas hipóteses e perguntas relacionadas a isso foram levantadas pela pesquisadora: você mora na casa número “x”, portanto você mora do lado direito. Como você sabe que os números pares estão do lado direito? A carta deve ser entregue na casa de número “y”, então o carteiro vai procurar a casa do lado direito ou esquerdo? Frente a estes questionamentos, as professoras começaram a se envolver nas discussões, evidenciando estarem sendo “conquistadas” naquela experiência do LS.

Esse momento foi importante, pois, em uma experiência de LS, não basta a pesquisa ser desenvolvida pelo interesse do pesquisador, muitas vezes externo ao ambiente escolar, é preciso que todos se envolvam e se sintam motivados a estudar a própria prática. O sentido de número como localizador foi percebido por uma das professoras, quando ela nos falou: “olha só, esse é um sentido que eu nunca havia pensado e só agora, com suas perguntas, é que eu percebi. Vocês sabiam disso (perguntando para as colegas)?” Um aprendizado conceitual foi revelado nessa fala que as motivaram a aprender a explorar, em suas aulas, o sentido de número. Perceberam que este processo formativo e reflexivo iniciado poderia reverberar em mudanças de suas ações didáticas futuras, evidenciando desenvolvimento profissional docente (CRECCI; FIORENTINI, 2018). Esta foi uma das primeiras espécies marinhas encontradas naquele grupo, durante a primeira fase do ciclo de LS!

A partir destes questionamentos e reflexões, iniciamos a *segunda fase (Trabalho preparatório para uma prática pedagógica exploratória do sentido de número)* era a etapa de pensar e repensar as ações docentes desenvolvidas) de nosso ciclo de LS. Esta fase foi impulsionada pela fala de uma das professoras: “você deixa a gente louca com tantas perguntas”. Quando perguntei se elas questionavam os alunos, imediatamente as três professoras responderam que “sim, mas não daquela forma”; outra professora completou: “nossas perguntas são mais relacionadas a que continhas eles têm que fazer para descobrir as respostas, o que não traz à tona o sentido de número, por exemplo; outra professora completou: acho que desta forma que a gente está fazendo aqui (dialogando por meio de perguntas), estimula mais os alunos, embora a gente perca muito tempo e pode ser que a gente não dê conta daquilo que tem que dar”. Nesse momento, elas começaram a questionar o modelo de formação que recebiam e que, normalmente, não estimulava os alunos a pensar. De alguma forma, o que lhes é imposto e o que desenvolvem em sala produzem a contenção e o controle das suas próprias ações (HARGREAVES, 2010). E quando falam que as perguntas “estimulam mais”, indiretamente questionam o “paradigma do exercício” como forma de não promover nos alunos uma aprendizagem mais relevante culturalmente. No caso do sentido de número, de acordo com o National Council of Teachers of Mathematics (2022), é preciso entender o contexto e seu significado de uso. Um mesmo número pode ser usado com diferentes significados, dependendo do contexto. É impossível explorar esses múltiplos sentidos com uma tarefa que apenas reforce a leitura e a escrita numérica, por exemplo. Esse aprendizado relacionado à prática, à consciência de que é preciso fazer diferente didaticamente para se chegar a um lugar diferente, pode ser uma das espécies marinhas mais importantes encontradas naquele contexto. Isso porque a ideia de que o modelo que se desenvolve alcança objetivos do fazer matemático revelou o interesse em aprender algo novo por parte do grupo, relacionado às atividades exploratórias.

Assim, “novas espécies marinhas” (aprendizados) foram reveladas por meio de um ensino exploratório (aprendizagem). A aprendizagem proporcionada pela forma como estávamos trabalhando, por meio do estudo de uma aula delas (*Lesson Study*), bem como por meio de problematizações e perguntas sobre o material que utilizavam e as ações da prática, revelavam questionamentos do que viviam em suas formações, do que faziam em sala de aula e dos resultados alcançados, o que evidenciou um processo formativo de dentro para fora. Em outras palavras, essa experiência formativa, proporcionada pelas fases do ciclo do LS até aqui

vividas, discutindo o que faziam até então, proporcionou o desenvolvimento profissional docente relacionado à didática das professoras participantes, sobretudo quando perceberam que fazer diferente, explorando e perguntando mais, desafiava e encorajava os alunos a evidenciar outras possibilidades de resolução e significação, permitindo a identificação de diferentes sentidos de número.

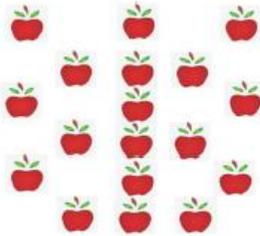
Os aprendizados das professoras são evidenciados quando reconhecem que, ao analisar e discutir, em grupo, o descritor proposto para aquela aula, o que fazia parte das fases do nosso ciclo do LS naquela realidade, ajudava a revelar o sentido de número subjacente à tarefa a ser trabalhada em sala de aula, o que implica, geralmente, em tentar antecipar dinâmicas de exploração e questionamentos durante a aula ou até de adaptar a tarefa proposta, em face das condições ou possibilidades cognitivas de seus alunos. Isso as ajudou a reconhecer as limitações do paradigma do exercício no alcance dos objetivos matemáticos esperados, colocando em xeque conceitos e maneiras tradicionais de ensinar matemática.

Um exemplo disso foi revelado por meio de uma tarefa que as professoras escolheram para tentar transformar, na visão delas, o “paradigma do exercício” em uma “atividade exploratória”. Era o início da *terceira fase do ciclo do LS correspondente ao “planejamento de uma aula exploratória – visando o sentido de número”* a ser desenvolvida. Tratava-se de uma situação-problema que envolvia a contagem de maçãs compradas na feira e como poderia se chegar à contagem total das maçãs. A questão foi retirada do livro do PNL (GIOVANI, 2018), adotado pelas professoras.

De acordo com Maia e Fiorentini (2023), as professoras conseguiam destacar o que era explorado conceitualmente na questão: adição e multiplicação linha X coluna. Mas não perceberam que a forma como as maçãs estavam organizadas em linhas (3) e colunas (6) favorecia ou até induzia o pensamento do aluno e o “ensino” de uma única estratégia de contagem: 3×6 . A tentativa de transformar a tarefa em uma situação-problema exploratória foi o maior desafio para as professoras, tanto que não conseguiram. A pesquisadora foi quem sugeriu uma reorganização das maçãs, desconstruindo a organização retangular proposta pelo livro e refazendo as perguntas, em uma perspectiva exploratória do sentido de número, conforme pode ser visto na tarefa apresentada e discutida por Maia e Fiorentini (2023).

Figura 1 – Tarefa exploratória do sentido de número modificada pela primeira autora

Joana gosta muito de maçãs. Veja a quantidade de maçãs que ela comprou na feira hoje.



De que formas podemos pensar a contagem de maçãs?

De que formas podemos representar essa contagem?

Podemos calcular esse total de maçãs por meio da adição? Existe uma ou mais adições para calcular o total de maçãs?

Fonte: Maia e Fiorentini (2023).

As professoras, ao lerem a nova versão da tarefa, comentaram: “desta forma confunde mais ou assim não poderemos só contar ou multiplicar em linha e coluna, mudou tudo... Assim os alunos pensam mais...Tem mais matemática, eu acho! Não é fácil fazer assim...” Essas falas evidenciam que houve mudança de percepção ou consciência do que foi feito e que a tarefa se tornou mais desafiadora para os alunos. Não induz respostas mecânicas ou únicas, como normalmente acontece no paradigma do exercício. Os alunos, agora, precisam pensar antes de responder. Há várias formas de resolver a tarefa. E novos aprendizados começam a emergir, “novos corais” são encontrados naquele fundo de mar...

Ao iniciar a terceira fase do ciclo de LS, que era a do planejamento da aula a ser experienciada, novos questionamentos acerca do paradigma do exercício surgiram, principalmente quando as professoras assumiram a responsabilidade de tentar transformar as questões do próprio caderno da escola de formação em tarefas exploratórias. O planejamento que tentavam fazer visava explorar o sentido de número a partir do material da escola de formação e isso já era diferente do modo como costumavam fazer. A preocupação, agora, era não apenas trabalhar os descritores propostos, mas também os significados que estavam por trás deles e que poderiam ser explorados na perspectiva do sentido de número.

As próprias professoras passaram a pensar em perguntas e hipóteses que poderiam levantar em sala de aula, de modo a instigar os alunos a explorar os sentidos de número, como estávamos vivendo naquela fase do ciclo de LS. Isso ficou evidente quando, diante de uma tarefa que continha oito bolinhas desenhadas para que os alunos tentassem formar pares, as professoras foram cercar as bolinhas duas a duas, até que uma delas levantou a seguinte conjectura: “olha

só, deu certo formar pares, porque o número 8 é par. Será que sempre acontece isso, quando o número for par?” Outras conjecturas começaram a ser levantadas a partir de conceitos trabalhados e estudados por nós na experiência do LS, como no caso do “par e ímpar”.

Isso deu mais confiança às professoras em pensar sobre os conteúdos e tentar criar perguntas mais abertas com múltiplas possibilidades de significação e resolução, abrindo, assim, espaço para a exploração dos diferentes sentidos de número. Essa experiência foi possível graças ao processo de estudo de aula que estávamos vivenciando nesta fase de planejamento, tendo como objeto de análise e discussão o próprio material didático exigido pela escola.

Podemos dizer que, nesse processo, houve aprendizagem conceitual e didática por parte das professoras, fato que pode ser inferido da seguinte fala de uma das professoras: “a forma como a gente pergunta aos alunos é que muda tudo!” Essa fala revela também a resignificação que os professores passaram a estabelecer às tarefas e atividades de ensino da matemática e de como pode ser feita a gestão da aprendizagem do sentido de número, já durante o planejamento, interligando a sintaxe e a semântica numérica no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos.

Ainda sobre a importância das tarefas exploratório-investigativas na prática das professoras, para o trabalho com os números, durante o planejamento da aula, uma das professoras antecipou uma possível conjectura que os alunos poderiam levantar a partir da exploração: “olha que legal, a gente quer saber se um número par multiplicado por outro qualquer, resulta em número par. Os alunos descobrirem isso é muito legal mesmo, vai além do que a gente quer”. Este foi um mergulho interessante dado pela professora, pois ela começa a compreender que existem descobertas matemáticas para além do ensino tradicional que pode ser oportunizado cotidianamente na sala de aula delas.

Essa espécie marinha (aprendizado) para quem leciona nos anos iniciais do ensino fundamental pode ser um grande avanço no processo formativo dos professores que ensinam matemática. Outra docente destacou a importância do planejamento para que as discussões, nesta perspectiva, não se percam em sala de aula: “é muito difícil elaborar atividades assim, porque dar conta do que a gente tem que dar no modelo daqui, vai levar muito tempo ... o que vai dar um diferencial na nossa prática, é o planejamento, que precisa ser mais cuidadoso e ser feito com mais atenção”. As falas relatadas trouxeram um discurso permeado de revisão não apenas conceitual, mas também didática sobre o sentido de número. Revelaram, ainda, o

desenvolvimento profissional das docentes, sobretudo quando os aprendizados auferidos, durante a experiência formativa do grupo colaborativo, transformaram-se em discursos que certamente irão reverberar em mudanças da prática docente das professoras.

Havia diferença na percepção das professoras entre as tarefas que elas desenvolviam e aquelas que estávamos analisando em nossos encontros e o que escolhíamos no planejamento da aula a ser desenvolvida. Elas percebiam que não exploravam os sentidos de número, pois os modos de gestão da aprendizagem em sala de aula e as tarefas propostas não ajudavam. Os aprendizados conceituais e didáticos, obtidos em relação aos sentidos de número, evidenciaram avanços nos modos de ser professora. Entretanto, é preciso destacar que isso somente acontecia por conta da imersão do grupo em uma proposta formativa que, tradicionalmente, fugia do que elas estavam acostumadas a fazer. As novas espécies marinhas configuradas em aprendizados, com as quais elas foram se deparando, só surgiram graças ao cilindro de oxigênio que estamos chamando, aqui, de experiência formativa de LS com tarefas e atividades exploratórias.

Contudo, quando iniciamos os trabalhos, nosso mergulho em águas profundas na realidade de Sobral, acreditávamos que a maior dificuldade seria as professoras acreditarem em alternativas de ensino e aprendizagem que caminhassem lado a lado com o foco dos trabalhos que normalmente elas faziam, que era seguir os cadernos e roteiros determinados pela rede de ensino, cujo foco são as avaliações externas. Até aqui, percebemos que os estudos sobre os sentidos de número, que poderiam emergir dos próprios materiais delas, dependiam de problematizações e de um mergulho analítico sobre os descritores, as habilidades e as questões propostas. Elas avançaram nisso! Houve uma tomada de consciência de que as coisas poderiam caminhar lado a lado, evidenciando aprendizagem e desenvolvimento profissional (FIORENTINI, 2013).

Nessa fase de estudo e planejamento do ciclo de LS, surgiu um repensar da prática delas. As docentes perceberam e começaram a repensar as ações desenvolvidas por elas em sala, entendendo que uma prática mais exploratória ajudaria na construção do pensamento matemático dos alunos e no desenvolvimento de aulas mais desafiadoras e motivadoras. Assim, quando do processo de planejamento da intervenção, que embora tenha tido adesão total e voluntária do grupo, percebeu-se uma fragilidade na elaboração de questões exploratórias. O cilindro de oxigênio, que era nosso ciclo do LS, mostrava que nem todas se sentiam à vontade

ou seguras em realizar aquele mergulho, criando as próprias questões e perguntas, sendo uma prática que fugia dos padrões do que até então costumavam realizar.

Quando iniciamos as conversas sobre a intervenção, houve adesão voluntária de uma professora que se candidatou a desenvolver a aula, desde que pautada nas espécies marinhas já estudadas nos encontros de trabalho conjunto com o grupo. Elas não se sentiram à vontade em criar algo, mas estavam dispostas a experienciar com seus alunos, em sala de aula, as mesmas questões, embora tenham conseguido criar e antecipar perguntas para além “das contas que tinham que ser descobertas no processo de descobrimento das respostas”. A professora que se candidatou a ministrar a intervenção, por exemplo, revelou que não sabia se conseguiria “elaborar uma questão (exploratória) com esta proposta. Talvez seja melhor, a gente seguir as questões que vivenciamos, pois eu me sinto mais segura”. As demais professoras concordaram e propuseram escolher questões do livro do PNLD e dos cadernos da escola de formação, analisando os descritores e criando perguntas a serem propostas aos alunos.

Eis as principais espécies marinhas conhecidas, reveladas e aprendidas até então. Elas estavam mais confiantes na possibilidade de criarem perguntas exploratórias que resgatassem sentidos de número, ao invés de criar a própria questão. Isso já se configurou como um aprendizado que atingiu diretamente a didática delas. Após a construção das perguntas, as professoras narraram as experiências vividas naquele planejamento dizendo: “a gente vê que, em sala, nosso papel era só ensinar como resolver a questão, encontrar a resposta. Mas, não é só isso, né?” Outra professora completou: “se a gente mudar a pergunta, a gente consegue pensar mais”. O desenvolvimento profissional, proporcionado pelas aprendizagens e aprendizados conceituais e didáticos revelados na elaboração de perguntas a serem feitas em sala de aula, evidenciou um processo de consciência das docentes não apenas sobre o que tradicionalmente vivenciavam, mas entenderam que o trabalho que desenvolviam tinha muita relação com o receber pronto um material de “cima para baixo”, reproduzindo um movimento de fora para dentro da escola e, por vezes, fora da realidade delas. Isso limitava seu trabalho, impedindo, por exemplo, que explorassem os diferentes sentidos de número, conforme aponta nossa literatura (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 2022, CEBOLA, 2007, TURKEL; NEWMAN, 1993, WALLE, 2009, GREENES; SHULMAN; SPUNGIN, 1993).

Como podemos ver, o papel das professoras se limitava a executar um processo vindo de fora. Entretanto, a partir da experiência formativa de LS vivida no grupo, elas passaram a

reconhecer que isso poderia ser diferente, ressignificando a prática e o significado do que ensinavam e desenvolviam junto aos alunos. É possível driblar os “ouriços” (intocáveis) encontrados naquele mar! A consciência que ganharam no mergulho realizado pelo LS permitiu que o planejamento fosse realizado a partir dos alunos. A ideia posta por uma das professoras foi muito clara: “o primeiro passo é deixar os alunos lerem e falar o que pensam, como pensam e a gente perguntar o que eles buscam e o sentido do que buscam. Pensar bem nas perguntas e como vamos fazer. Pedir que falem. Se eles forem capazes de falar, eles compreenderam bem o que tem que ser feito”.

Antes da implementação da aula a ser realizada, as professoras analisaram o planejamento das atividades que escolheram. Naquele momento, percebemos que já não havia mais “ouriços”, espécies difíceis de serem tocadas pelos alunos, mas “polvos” com capacidades cognitivas surpreendentes! As perguntas poderiam gerar redes de conhecimentos calculadas pelas docentes, mas também desenvolvidas pelos alunos. Ao comentar o planejamento que desenvolveram, uma das professoras disse: “está bem diferente. Agora, os alunos têm mais liberdade. Pensam bem mais. Podem até discutir uns com os outros. Veja, a gente pergunta por formas diferentes de resolver o problema. Daí, eu nem posso perguntar em continha para encontrar resposta. Muda pra mim e para meus alunos”. Essa fala evidencia o aprendizado conceitual e didático da professora, pois ela não apenas sistematiza, mas também teoriza, ao complementar:

se a gente olhar para a questão das maçãs, a gente se surpreende. A mesma questão exige mais pensamento. Eu preciso saber como perguntar. Aqui eu deixo o aluno livre para pensar, construir o pensamento matemático dele. Matemática tem outros jeitos de se chegar à resposta e a gente tem que mostrar isso, o que naturalmente, do modo como propomos agora, acontece.

Sobre os descritores e habilidades que escolheram para a aula, seguindo o modelo de Sobral, uma professora comentou: “*o sentido do número vai aparecer se eu olhar inclusive para o descritor e para a habilidade de modo diferente*”. O mergulho que inicialmente deveria ser feito apenas com “esnórquel”, como falamos no início deste trabalho, já evidenciou que foram mais longe. Isso porque, com o cilindro de oxigênio proporcionado pelo LS, tinham mais fôlego e contavam com o apoio e a segurança do grupo colaborativo.

As perguntas criadas pelas professoras, a partir das questões dos cadernos e livros didáticos, evidenciaram aprendizado, claramente caracterizado como avanço na prática docente

delas, já que, como dissemos, elas costumavam perguntar sobre “quais as continhas que tinham que descobrir para resolver o problema”. As perguntas criadas foram: “vamos pensar sobre cada número que temos no problema? O que ele nos diz?” “Existe mais de uma possibilidade de solução? Que caminhos vocês encontraram para responder? Quem fez desta forma? Quem fez diferente? Vamos analisar esta solução? Qual o sentido desse número como resposta para esta pergunta? O que esse dado do problema nos diz? Qual o significado dele?...”. As espécies marinhas descobertas, os aprendizados e as aprendizagens geraram produtos diferentes nos modos de condução da aula. Além disso, as antecipações do que poderia acontecer durante a implementação das tarefas e os tempos previstos para os alunos as realizarem pareciam mais claros e viáveis às professoras.

4.2 Intervenção pedagógica e reflexões pós-aula: aprendizados como espécies marinhas que ficam

Na fase 4, relativa à “*implementação das tarefas e observação da aula*”, a professora que se candidatou livremente para ministrar a aula planejada pelo grupo desenvolveu livremente a aula e as demais participantes observaram o seu desenvolvimento. Os alunos do 3º ano entraram no mar junto com as professoras. Eles interagiram entre si, leram as perguntas projetadas e discutiram sem que a professora pedisse. Perceberam que a aula foi diferente e conduzida de modo mais livre e isso foi relatado por uma das professoras nas reflexões pós-aula que também compunham esta fase. Mesmo os alunos que tinham mais dificuldades em classe, tentaram rabiscar caminhos alternativos de resposta para as perguntas abertas. Uma criança com bastante dificuldade tentou mostrar que tinha rabiscado algo relacionado ao problema que estava sendo resolvido na aula. De acordo com uma das professoras: “houve conversa sobre os itens de resposta, os sentidos e significados deles. A gente nunca fez isso!”

Uma docente comentou, durante o planejamento, que uma das discussões propostas poderia “levar muito tempo em uma única questão”. Entretanto, na implementação, a professora que fez a intervenção resgatou esta fala e disse: “você viu? O que parecia perda de tempo, foi crescimento, porque eles discutiram e encontraram mais de uma possibilidade. Isso é mais do que a gente queria e o sentido só aparece aí”. Como podemos perceber, houve uma nova forma de planejamento e intervenção, ou seja, espécies marinhas foram discutidas naquele mergulho.

Aquilo dificilmente seria feito em outro modelo formativo que não o da vivência das fases do LS. As professoras passaram a escolher, cuidadosamente, questões que promovessem o pensamento matemático sobre os sentidos de número. Buscaram estratégias diferentes de resolução, passaram a pensar em possíveis respostas dos alunos e não apenas nos conteúdos a ministrar ou descritores a serem trabalhados. Com isso, elas perceberam que a dinâmica da aula foi diferente, conforme veremos nos depoimentos que compõem o tópico seguinte. Por fim, ainda sobre o planejamento desenvolvido, uma das docentes falou: “não lembrava mais quando eu tinha pensado um plano de aula, a partir dos alunos, sem pensar só no descritor e item de resposta”. Tal fala evidencia reconsideração de postura didática e conceitual, ou seja, há evidência de que houve um mergulho transformador! Ou seria libertador?

O processo de intervenção pedagógica, portanto, ocorreu de modo tranquilo e colaborativo. A professora que ministrou a aula evidenciou postura segura, autônoma e de protagonismo. Ela passeava pela sala, chamava os alunos para a discussão, perguntava como estavam pensando, o que buscavam e quem gostaria de falar e mostrar como estava fazendo. Em suas palavras: “não me senti pressionada pelo tempo e nem pela necessidade de dar conta em relação ao conteúdo e ao descritor, já que eu sabia, pelo que eu tinha vivido, que nas discussões daquelas questões, os alunos aprendem mais do que queremos ou esperamos”. Percebemos, pela fala da docente, uma segurança muito grande do que estava fazendo e a consciência de onde iria chegar com suas ações em sala de aula. Ela parecia conhecer muito bem aquele mar!

A experiência formativa no ciclo do LS proporcionou esta sensação, ao mesmo tempo que modificou sua postura didática em sala. Em relação às questões a serem trabalhadas, como elas foram debatidas no grupo colaborativo, algumas perguntas não planejadas emergiram durante a aula: “qual o significado do número 586 no problema? E o de 283? Quando a gente encontrar o resultado, o que ele vai nos dizer? O que cada item de resposta (apontou para os itens A, B, C e D da questão) significa? Tem outra forma de resolver a questão? Alguém fez diferente?” Quando questionada sobre o maior aprendizado que teve naquela intervenção, a professora prontamente respondeu: “Dar tempo aos alunos e ouvi-los é algo que eu não fazia e foi isso que me emocionou quando eu vi a resposta que aquela aluna mostrou no quadro, ela foi além do que eu ensinei. Ficar falando lá na frente, seguindo questão por questão, nem sempre ajuda”. A fala desta professora mostrou que sua maior aprendizagem estava relacionada à

transformação das suas ações em sala de aula. Além disso, evidencia que os aprendizados dos alunos poderiam emergir desta forma, de modo bastante diferente. Existia uma ação consciente e intencional que aconteceu de dentro para fora e que foi proporcionada pelo estudo da própria prática delas no ciclo do LS.

É importante ressaltar que a aprendizagem docente revelada pela fala da professora, bem como as experiências vividas por nós em nosso ciclo de LS, em nenhum momento anula as ações e o foco da rede pública de ensino de Sobral; pelo contrário, as professoras começaram a entender que existiam caminhos que podiam se encontrar e que dependiam também delas, da transformação da prática delas, como podemos ver na seguinte fala:

O que eu percebo hoje na minha realidade e depois de tudo que vivemos aqui, [...] é que tudo que levei para meus alunos foi pronto, previamente pronto. Ainda que eu estivesse ali ensinando os meninos a estratégia, porque eu estava ensinando técnica que dá certo e não a pensar. Então, a habilidade que eu pensava estar ensinando, eu levava pronto e pensado por mim, nada construído por eles. Eu sempre ensinei que somar era assim, multiplicar era assim, dividir era assim. Então, eu não sei se é o sistema daqui que está errado, sabe? Eu nunca cheguei para dar para meus meninos possibilidades, sempre foi aquilo que eu dei, que eu ensinei, que eu permiti e que era o que eles tinham que me mostrar! Isso era prática docente. Não vou culpar o sistema e nem a organização curricular. Isso pra mim foi aprendizado e abriu meus olhos.

Na verdade, todos conseguiam nadar juntos naquele mar já não tão desconhecido por elas. A professora percebeu que o material que ela recebia deveria ser interpretado, lido por ela e entendido, no sentido de se saber aonde se quer chegar, o que se quer que o aluno pense sobre aquele assunto. As professoras que observaram concordavam com o que ouviam, ao mesmo tempo que diziam estar “admiradas com a capacidade, tranquilidade e modos de condução do processo”. A docente que realizou a implementação chegou a comentar que, da forma como fez, dando mais espaço aos alunos, questionando e deixando-os falar e expor suas estratégias, sabia que “o sentido de número ia surgir neste processo”. O LS permitiu que as professoras não apenas olhassem a habilidade e o descritor que foi determinado para ensinar naquele dia, mas entendessem também o sentido e o significado do que estava ocorrendo ali, alterando inclusive a prática docente delas.

Sobre a modificação no ser professora, o aprendizado didático proporcionado pela experiência do LS revelou estar relacionado também à problematização e à ruptura do paradigma do exercício (SKOVMOSE, 2000) e a iniciação de um trabalho mais voltado às

atividades exploratórias e investigativas, como forma de fazer fluir sentidos de número (TURKEL; NEWMAN, 1993). Na fala de uma das professoras:

A gente acredita (ou acreditava, né!) que a matemática só técnicas, procedimentos que eles usam para resolver problemas. E eu passei a acreditar que a gente tem que estar todo tempo desafiando, aceitando novas possibilidades que podem não vir da gente, mas deles, se eu der espaço. E a gente ainda achava que tinha que usar o lúdico, material que auxilia no ensino e que é aquilo que vai despertar o interesse. Eu acreditava que isso resolvia, mas o que achei mais interessante de tudo, é que *o diferente é estar perguntando, instigando, deixar fazer, dar autonomia!* Isso foi realmente o que mais me despertou. É isso que tem que ser feito. Eu senti o aprendizado dos meus alunos. Eu vi um crescimento em uma aula que eu nunca tinha visto. Desenvolver a aula de modo a dar um tempo para cada um, não atropelar o tempo da criança. Não sou eu quem ensino. Ela, aquela menina lá, me ensinou e ensinou aos colegas quando eu a chamei na lousa e ela fez mais do que eu ensinei.

Na verdade, a professora conseguiu ter uma visão mais clara de que é preciso fazer para que a atividade de sala de aula seja mais dinâmica e se desenvolva diferente, de modo que os alunos apareçam, tenham visibilidade e voz. Isso implica realizar um trabalho que não privilegie apenas os aspectos sintáticos no trabalho com os números, como ocorre no paradigma do exercício, mas também semânticos, os quais são mobilizados por tarefas e atividades exploratório-investigativas, de forma a atribuir sentido aos números e às suas operações.

Tomando por base Cochran-Smith e Lytle (1999) e Fiorentini e Carvalho (2015), podemos dizer que foi um trabalho que envolveu momentos de aprendizagem de conhecimentos PARA a prática, sobretudo durante o estudo e planejamento de tarefas exploratórias para ensino do sentido dos números (fases 1, 2, e 3 do ciclo de LS). Houve momentos de aprendizagem de conhecimentos NA prática, sobretudo durante as discussões de planejamento (fase 3) e principalmente durante a implementação das tarefas exploratórias em sala de aula (fase 4). Houve, também, aprendizagem de conhecimentos DA prática, à medida que o grupo refletia, discutia e investigava suas aprendizagens e seus aprendizados obtidos durante a prática de planejamento e de implementação de tarefas exploratórias em sala de aula, ressignificando, inclusive, os conhecimentos PARA a prática advindos da Secretaria de Educação e teorizando sobre os conhecimentos obtidos por elas NA prática.

5. Algumas conclusões e reflexões finais: o LS como cilindro de oxigênio que ajuda a explorar os sentidos de número na realidade de Sobral

Mergulhar em águas profundas, como a realidade de Sobral, exigia de todos os envolvidos estar com cilindros de oxigênio. As aprendizagens a serem desenvolvidas e os aprendizados a serem obtidos em um grupo dependem das relações estabelecidas no grupo colaborativo. O LS foi nosso cilindro de oxigênio nesta experiência! Foi ele que nos permitiu um mergulho profundo e nos ajudou a promover aprendizagens e a conhecer, discutir e construir aprendizados conceituais e didáticos acerca do sentido de número por parte de professoras que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

A experiência desenvolvida em nosso ciclo de LS nos possibilitou mergulhar em águas profundas! As professoras passaram a ver o currículo e os descritores, aos quais sempre foram submetidas em suas práticas, de um modo diferente. Compreenderam a importância e a necessidade de problematizar e reprogramar o que já vem prescrito. Avaliando os conteúdos e as habilidades que são privilegiados e a forma de ensiná-los, os professores podem encontrar brechas e projetar táticas para recontextualizar as tarefas propostas, ampliando suas possibilidades didático-pedagógicas, de modo a promover uma educação culturalmente relevante a seus alunos e a explorar, por exemplo, os múltiplos sentidos de número.

Nesse sentido, a experiência formativa, proporcionada pelo processo de LS, possibilitou que as professoras enxergassem o planejamento como algo vivo, inconcluso e que deve ser coletivamente revisitado, discutido, assim como as aulas que costumeiramente desenvolvem. As professoras começaram a questionar: quais sentidos de número serão trabalhados a partir de tais descritores e habilidades? Quais objetivos relacionados ao número serão alcançados e de que modo? Rever isso e replanejar ajudou a compreender não apenas os passos seguintes da prática docente, mas os alunos e suas formas de raciocinar e aprender; proporcionou desenvolvimento profissional, desencadeando ação de mudança de dentro para fora das professoras, incrementando a aprendizagem matemática delas e dos alunos, como foi visto na intervenção desenvolvida na escola; despertou a consciência de que elas “podem fazer perguntas, criar e recriar”, a partir do que recebem pronto, quebrando o mito de que o que dá certo é o que está posto e proposto pelo sistema. Todas essas questões influenciam diretamente as aprendizagens e os aprendizados conceituais e didáticos em relação ao trabalho com o sentido de número em sala de aula, como bem aponta a literatura.

As ideias sobre sentido de número, encontradas na prática das professoras de acordo com nossos estudos iniciais, foram basicamente aquelas presentes explicitamente nos descritores das provas das avaliações externas, conforme os cadernos que elas recebiam das redes de ensino, aos quais tivemos acesso. Era um trabalho baseado em contagem, ordem, leitura, escrita, reconhecimento dos números, o número nas operações, o número como medida e como dinheiro. Tais abordagens geralmente não dão conta de explorar a dialética da sintaxe e da semântica inerente à exploração e significação dos números nas diferentes práticas sociais e culturais.

Infelizmente, conforme aponta Cebola (2007), uma organização curricular que foge de um trabalho a partir dos sentidos de número limita as possibilidades de exploração e de desenvolvimento das habilidades numéricas de que necessitam os alunos. O modelo de trabalho e formação docente em Sobral não dá conta de atender o que a literatura propõe sobre o trabalho com os sentidos de número nos anos iniciais. E isso está muito relacionado à forma como as professoras trabalham em sala e que reflete, certamente, o processo formativo que recebem.

Trabalhar com o número dentro de um currículo é discutir, evidenciar, construir e desenvolver seus sentidos e significados a partir de diferentes contextos. Isso precisa aparecer na prática, na formação dos professores, nos planejamentos e na execução das aulas. O currículo precisa estar organizado com base nos sentidos de número. A ausência disso não oportuniza o desenvolvimento de ações didáticas que possibilitem uma real compreensão dos números presentes na vida social e cultural das crianças.

O sentido de número para os docentes não se constrói apenas em um processo de discussão e explanação dos conteúdos, mas em modelos formativos que estudem casos reais, voltados não somente PARA a prática, mas também NA prática e sobretudo DA prática mediante estudo colaborativo, como aquele desenvolvido em nosso grupo colaborativo na perspectiva do LS. Um modelo assim promove: (1) a transformação do currículo; (2) o avanço em conhecimentos do conteúdo e de ensino; (3) um novo olhar do professor para o papel do aluno em sala de aula; (4) o fortalecimento de vínculos pessoais e profissionais; (4) o aperfeiçoamento da relação entre as práticas e os objetivos de ensino; (5) a motivação de alunos e professores; (6) a oportunidade de mais segurança e autonomia aos docentes; (7) um planejamento mais efetivo; e (8) viabiliza a elaboração de atividades mais significativas

matematicamente. Já em um modelo formativo “top down”, dificilmente alcançamos tantas vertentes e assuntos relevantes no âmbito da formação docente.

Nesse sentido, estudos colaborativos de aula, como este desenvolvido na perspectiva do LS, seguindo etapas específicas, podem abrir portas para a participação de agentes externos, ou seja, formadores de professores que se dispõem a colaborar com os docentes nas escolas, promovendo problematizações, questionamentos das práticas educativas, buscando construir em conjunto alternativas mais exploratórias em sala. É este o caminho que se abriu e que pretendemos desenvolver no âmbito de nossa prática profissional.

O próprio LS abriu espaço para que, em nossas discussões, o trabalho com atividades exploratório-investigativas (FIORENTINI, 2012) viesse à tona e contribuísse como ação didática que destaca as multifaces dos números, contemplando suas dimensões sintáticas e semânticas, empoderando matematicamente os docentes e discentes. Em síntese, podemos dizer que a experiência vivida com as três professoras foi uma oportunidade única e ímpar de mergulho ao fundo do mar na Educação Matemática de Sobral!

Referências

- BRASIL, **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação, Brasília, 2017.
- CEARÁ. **Documento Curricular Referencial**. Secretaria da Educação do Ceará. Fortaleza, 2019.
- CEBOLA, G. **Do Número ao Sentido de Número**. Seção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2007. p. 223-239.
- CLANDININ, J. D.; CONNELLY, M. **Narrative inquiry: experience and story in qualitative research**. San Francisco: Jossey-Bass Publishers, 2000.
- COCHRAN-SMITH, M.; LYTLE, S. L. Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in communities. **Review Research Education**, [s. l.], v. 24, p. 249-305, 1999.
- CRECCI, V. M.; FIORENTINI, D. Desenvolvimento profissional em comunidades de aprendizagem docente. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n. 34, p. 1-19. 2018.
- DE CERTEAU, M. **A invenção do cotidiano: artes de fazer**. Tradução de Ephraim Ferreira Alves. Petrópolis, RJ: Vozes, 1994.

FIORENTINI, D.; CRECCI, V. M. Práticas de Desenvolvimento Profissional sob a perspectiva dos professores. **Diversa Prática**. Volume Especial de Lançamento, p. 65-76, 2012. Disponível em: <http://www.seer.ufu.br/index.php/diversapratica>. Acesso em: 10 out. 2022.

FIORENTINI, D. Formação de professores a partir da vivência e análise de práticas exploratório-investigativas e problematizadoras. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**. [s. l.], Año 7, n. 10, 2012.

FIORENTINI, D. Learning and professional development of the mathematics teacher in research communities. **Sisyphus Journal of Education**, [s. l.], v. 1, n. 3, p. 152-181, 2013.

FIORENTINI, D.; CARVALHO, D. L. O GdS como lócus de experiências de formação e aprendizagem docente. In: FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CARVALHO, D. L. (Org.). **Narrativas de Práticas de Aprendizagem Docente em Matemática**. São Carlos: Pedro & João Editores, 2015. p. 15-37.

GIOVANNI, J. J. R. **A Conquista da Matemática** – Anos Iniciais (3º a). São Paulo: FTD, 2018.

GREENES, C.; SCHULMAN, L.; SPUNGIN, R. Developing Sense About Numbers. **The Arithmetic Teacher**, [s. l.], v. 40, n. 5, p. 279 – 284. January, 1993.

HARGREAVES, A. Leading Professional Learning Communities: Moral Choices Amid Murky Realities, In: BLANKSTEIN, A. M.; HOUSTON, P. D.; COLE, R. W. **Sustaining Professional Learning Communities**, Thousand Oakes: corwin Press, 2010. p. 175-198.

MAIA, M. G. B.; FIORENTINI, D. Experiência Formativa de uma comunidade colaborativa com professoras que ensinam Matemática nos anos iniciais. **Revista Artes de Educar. Dossiê Temático RIAE**. v. 9, n. 1. p. 185-204, Março, 2023. DOI: <https://doi.org/10.12957/riae.2023.70689>

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and Standards for School Mathematics**. Abril, 2000. Disponível em: <https://www.nctm.org/standards/>. Acesso em: 28 mar. 2022.

PINA NEVES, R. S.; FIORENTINI, D.; SILVA, J. M. P. Lesson Study presencial y la pasantía curricular supervisada en matemáticas: contribuciones al aprendizaje docente. **Revista Paradigma**, [s. l.], v. 43, Edición Temática, n. 1. p. 409-442, enero, 2022. DOI: 1037618

PIRES, C. M. C.; SILVA, M. A. Desenvolvimento Curricular em Matemática no Brasil: trajetórias e desafios. **Revista Quadrante**, [s. l.], v. XX, n. 2, 2011.

SACRISTÁN, J. **O Currículo: uma reflexão sobre a prática**. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

SILVA, A. F.; BALDIN, Y. Y. **Transformando oficinas de formação de professores na metodologia de resolução de problemas em grupos de Lesson Study**, Brasília, 2021

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema**, Rio Claro, n.14, p. 66-91, 2000.

SOBRAL. **Documento Curricular Referencial de Sobral**. Secretaria de Educação, 2021.

TURKEL; NEWMAN. Qual é o seu Número? **Educação Matemática**, [s. l.], v. 25. 1993. p. 31 a 33.

WALLE, J. V. de. **Matemática no Ensino Fundamental**: formação de professores em sala de aula. Porto Alegre: Artmed, 2009.

Dados dos autores

Autores

Madeline Maia

Pedagogia, Universidade Estadual do Ceará
Mestrado em Educação, Universidade Estadual do Ceará
Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Universidade Estadual Vale do Acaraú
GPEEMAT/ Formação de Professores que Ensinam Matemática
madelinemaia@yahoo.com.br
<https://orcid.org/0000-0002-3595-0677>

Dario Fiorentini

Dario Fiorentini
Matemática, Universidade de Passo Fundo
Mestrado em Matemática, IMECC/Unicamp
Doutorado em Educação, Unicamp
Professor aposentado da FE/Unicamp
Líder do Grupo de Pesquisa Prática Pedagógica em Matemática (Prapem)
Email: dariofiore@unicamp.br e dariof@unicamp.br
<https://orcid.org/0000-0001-5536-0781>

Como citar o artigo:

MAIA, M.G.B, FIORENTINI, D. Aprendizagem Conceitual e Didática Acerca do Sentido de Número: resultados de um lesson study em uma escola pública sobralense. **Revista Paradigma**, Edição Temática Estudio de Clases: Contribuciones de la educación japonesa en diferentes países, mayo de 2023 / 241 - 267.

DOI: <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p241-267.id1419>

Conhecimentos profissionais de professores que Ensinam Matemática na Rede Municipal de Ensino de São Paulo a partir do seu envolvimento em um Projeto de Pesquisa pautado na metodologia *Lesson Study*

Edda Curi

edda.curi@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-6347-0251>

Universidade Cruzeiro do Sul

São Paulo, Brasil.

Priscila Bernardo Martins

priscila.bmartins11@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-6482-4031>

Universidade Cruzeiro do Sul

São Paulo, Brasil.

Suzete de Souza Borelli

suzeteborelli@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-0738-8162>

Universidade Cruzeiro do Sul

São Paulo, Brasil.

Recebido: 13/03/2023 **Aceito:** 15/04/2023

Resumo

Este trabalho é parte de um projeto de pesquisas intitulado “Discussões Curriculares: contribuições de um grupo colaborativo para a implementação de um novo currículo de Matemática e o uso de materiais curriculares na rede pública Municipal de São Paulo”. Assim, pretende-se, neste artigo, identificar e apontar os conhecimentos profissionais de professores que Ensinam Matemática no Ciclo de Alfabetização⁷ da Rede Municipal de Ensino de São Paulo, no âmbito de um Projeto de Pesquisa pautado nas etapas da *Lesson Study*. Para isso, adotamos uma perspectiva teórica baseadas em Schön (2000) e Shulman (1986, 1987). O estudo tem natureza qualitativa, de cunho interpretativo. Envolve professores do Ciclo de Alfabetização que ensinam Matemática na Rede Municipal de São Paulo. As formações foram desenvolvidas quinzenalmente nas dependências da Universidade Cruzeiro do Sul. A análise baseou-se no material empírico constituído de relatórios, protocolos observacionais, episódios dos vídeos das formações. Os resultados da pesquisa mostram que o processo de construção e de reflexão, desenvolvido a partir da metodologia *Lesson Study*, propicia uma autorreflexão sobre o trabalho desenvolvido, permitindo avaliar o que deu certo e trazer indicações de ajuste, principalmente em relação ao planejamento desenvolvido de forma colaborativa.

Palavras-chave: *Lesson Study*. Conhecimento profissional do professor. Reflexão e Colaboração.

⁷ O Ciclo de Alfabetização envolve os 03 (três) primeiros anos (1º, 2º e 3º).

Conocimiento profesional de profesores que enseñan Matemáticas en la Red Municipal de Educación de São Paulo a partir de su participación en un Proyecto de Investigación basado en Estudio de Lección

Resumen

Este artículo es parte de un proyecto de investigación titulado “Discusiones Curriculares: Contribuciones de un Grupo Colaborativo para la Implementación de un Nuevo Currículo de Matemáticas y el Uso de Materiales Curriculares en la Escuela Pública Municipal de São Paulo”. Así, en este artículo, pretendemos identificar y señalar el saber profesional de los profesores que enseñan Matemáticas en el Ciclo de Alfabetización de la Red Municipal de Educación de São Paulo, en el ámbito de un Proyecto de Investigación basado en las etapas del Estudio de Lección. Para ello, adoptamos una perspectiva teórica basada en Schön (2000), Shulman (1986, 1987). El estudio tiene un carácter cualitativo, interpretativo. Se trata de profesores del Ciclo de Alfabetización que enseñan Matemáticas en el Sistema Municipal de São Paulo. Los cursos de formación se desarrollaron quincenalmente en las instalaciones de la Universidad Cruzeiro do Sul. El análisis se basó en material empírico consistente en informes, protocolos de observación, episodios de videos de entrenamiento. Los resultados de la investigación muestran que el proceso de construcción y reflexión desarrollado a partir de la metodología Lesson Study, proporciona una autorreflexión sobre el trabajo desarrollado, permitiendo evaluar lo que funcionó y traer indicios de ajuste, principalmente en relación a la planificación desarrollada de forma colaborativa.

Palabras-clave: Estudio de la lección. Conocimiento profesional del profesor. Reflexión y Colaboración.

Professional knowledge of teachers who teach Mathematics in the Municipal Education Network of São Paulo based on their involvement in a Research Project based on Lesson Study

Abstract

This article is part of a research project entitled “Curricular Discussions: Contributions of a Collaborative Group for the Implementation of a New Mathematics Curriculum and the Use of Curriculum Materials in the Municipal Public School of São Paulo”. Thus, in this article, we intend to identify and point out the professional knowledge of teachers who teach Mathematics in the Literacy Cycle of the São Paulo Municipal Education Network, within the scope of a Research Project based on the steps of the Lesson Study. For this, we adopt a theoretical perspective based on Schön (2000), Shulman (1986, 1987). The study has a qualitative, interpretative nature. It involves teachers from the Literacy Cycle who teach Mathematics in the Municipal System of São Paulo. The training courses were developed fortnightly on the premises of the Cruzeiro do Sul University. The analysis was based on empirical material consisting of reports, observational protocols, episodes of training videos. The research results show that the process of construction and reflection developed from the Lesson Study methodology, provides a self-reflection on the work developed, allowing to evaluate what worked and bring indications of adjustment, mainly in relation to the planning developed in a collaborative way.

Keywords: Lesson Study. Professional knowledge of the teacher. Reflection and Collaboration.

1. Introdução

Iniciamos este texto retomando uma menção de Nóvoa (2008) em uma palestra no SINPRO/SP⁸: “há um déficit de práticas na formação dos professores”. Na mesma conferência, Nóvoa (2008, p.8) afirma que “A formação dos professores continua hoje muito prisioneira de modelos tradicionais, de modelos teóricos muito formais, que dão pouca importância à prática e à sua reflexão”. As ponderações de Nóvoa (2008) são importantes e apontam a necessidade de colocar em discussão as práticas que são desenvolvidas pelos professores que ensinam matemática nas ações de formação.

Desse modo, o Projeto de Pesquisa denominado “Discussões Curriculares: contribuições de um grupo colaborativo para a implementação de um novo currículo de Matemática e o uso de materiais curriculares na rede pública Municipal de São Paulo”, contexto deste artigo, foi idealizado em 2018, a partir de um cenário de implementação curricular, em que a Secretaria Municipal de São Paulo (SME-SP) anunciou, em um dos seus seminários, a preocupação em identificar a compreensão e o uso que os professores da Rede faziam do novo Currículo e dos materiais curriculares de Matemática, que foram produzidos para subsidiá-los em seu trabalho na sala de aula.

Cabe destacar que a preocupação com a aproximação e o uso que os professores fazem dos referidos materiais pela Secretaria é compreensível, pois essa Rede conta com cerca de 60.000 professores na Educação Básica e fazer esse acompanhamento é primordial, visto que é preciso ter elementos para subsidiá-los na proposição de uma política formativa que possa atender às necessidades desses profissionais.

A Secretaria buscou fomento junto à Unesco para o desenvolvimento de um Projeto de Pesquisa que trouxesse indicativos sobre a compreensão e o uso que os professores faziam dos documentos e materiais curriculares implementados. Assim, a coordenadora do projeto, primeira autora do referido artigo, tomou conhecimento do edital e submeteu a proposta do Projeto supracitado, sendo aprovado para o seu desenvolvimento.

Desse modo, o referido projeto foi desenvolvido, em 2019, em parceria com a Secretaria Municipal de São Paulo e anuência da Unesco⁹; ele envolveu 55 (cinquenta e cinco) professores,

⁸ SINPRO – Sindicato dos Professores de São Paulo. Atuam basicamente junto aos professores de escolas particulares.

⁹ Unesco - Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura.

correspondentes aos anos de escolaridade, 1º ao 9º ano do Ensino Fundamental, 10 (dez) formadores, 02 (dois) colaboradores, e 01 (uma) coordenadora geral, sendo desenvolvido nas dependências da Universidade Cruzeiro do Sul. A organização do projeto e seus desdobramentos serão explicitados no desenvolvimento do artigo. Todavia, cabe justificar, aqui, que adotar a metodologia *Lesson Study* no Projeto de Pesquisa foi um diferencial nas ações de formação, isso porque foi possível articular a prática e a teoria, levando em consideração o conhecimento do contexto em que a escola estava inserida, as necessidades de conhecimentos matemáticos que os professores apresentavam para o desenvolvimento dessa prática, bem como dos conhecimentos pedagógicos que permitem dar maior legitimidade às escolhas que os professores fazem na organização de seu trabalho.

As experiências que temos vivenciado com a metodologia *Lesson Study*, em Projetos de Pesquisas que envolvem a formação continuada de professores que ensinam matemática e nas pesquisas do Grupo de Pesquisa "Conhecimento, Crenças e Práticas de Professores que ensinam Matemática (CCPPM)", nos trouxeram alguns questionamentos, como: "Como podemos inverter essa lógica de formação, dando maior destaque à prática e às necessidades formativas que os professores apresentam, a partir de seus contextos de atuação?"

Outras questões também emergiram dessas vivências formativas, entre as quais destacamos: Quais conhecimentos profissionais são essenciais para a atuação dos professores que ensinam matemática? Que bases teóricas e práticas devem se articular na construção de conhecimentos sobre ensino, currículo e especificidades da escola? Que experiências de formação – individuais e coletivas – são potencializadoras de uma “boa” formação de professores?

A partir dessas indagações, pretendemos, neste artigo, identificar e apontar os conhecimentos profissionais de professores que Ensinam Matemática no Ciclo de Alfabetização¹⁰ da Rede Municipal de Ensino de São Paulo, no âmbito de um Projeto de Pesquisa pautado nas etapas do *Lesson Study*. Para atingir tal objetivo, recorreremos a uma abordagem de natureza qualitativa, empregando os registros escritos (relatórios dos professores e formadores, protocolos observacionais e audiovisuais - episódios das filmagens), como recursos de análise de dados.

¹⁰ O Ciclo de Alfabetização envolve os 03 (três) primeiros anos (1º, 2º e 3º).

Isto posto, organizamos este artigo em tópicos. O primeiro tópico apresenta as características do conhecimento do professor. Em seguida, no segundo tópico, explanamos as vertentes do conhecimento do professor, dando ênfase ao conhecimento dos conteúdos matemáticos, ao conhecimento didático dos conteúdos e ao curricular. Para isso, adotamos uma perspectiva teórica baseadas em Schön (2000) e Shulman (1986, 1987). Posteriormente, no terceiro tópico, abordamos o Projeto de Pesquisa, a sua organização e o seu desenvolvimento. Seguimos no tópico quatro, evidenciando o Planejamento no Ciclo de Alfabetização. Depois, analisamos alguns episódios relevantes na perspectiva de Shulman (1986, 1987). Por fim, apresentamos as considerações finais do artigo.

2. Caracterização do conhecimento do professor

Na caracterização do conhecimento do professor, destacamos os trabalhos do pesquisador americano, Donald Schön (2000). Nos estudos de Schön, encontramos a relevância da reflexão na formação de professores, que seria o alicerce da construção do conhecimento tácito e dinâmico. Para o pesquisador, o conhecimento do professor é tácito porque se revela no desenvolvimento da ação, no entanto, muitas vezes, ele não é clarificado ou teorizado pelo professor. É dinâmico, pois é levado em consideração que o professor detém em sua profissão diferentes conhecimentos, os quais são construídos e empregados, de modo reflexivo.

Schön (2000) emprega a expressão “conhecimento na ação” para fazer menção aos tipos de conhecimento que são expressos na execução de ações inteligentes, tanto físicas quanto cognitivas. Segundo Schön (2000), o ato de conhecer na ação, característico de profissionais competentes em um campo profissional, não é o mesmo que o conhecimento profissional ensinado nos cursos de licenciaturas. Ele apresenta quatro dimensões centrais do pensamento: o conhecimento na ação, a reflexão-na-ação, reflexão-sobre-a-ação e reflexão-sobre-a-reflexão-na ação

O *conhecimento na ação* corresponde ao conhecimento que é revelado na concretização da ação e que se integrou em um saber inteligente, dinâmico e que conduz ao aprimoramento da própria ação. A *reflexão-na-ação* é aquela efetuada no mesmo momento em que a ação é realizada, viabilizando a intervenção e a reformulação da própria ação. Quanto à *reflexão-sobre-a-ação*, ela refere-se a uma retrospectiva sobre a ação desenvolvida, para análise e provável reestruturação, pois dessemelhante da reflexão-na-ação, que ocorre no exato momento da ação,

esta reflexão requer o distanciamento da ação, com intuito de refletir e analisar. E, por fim, a *reflexão-sobre-a-reflexão-na ação* se caracteriza pela reflexão e análise do professor sobre as suas ações, atitudes, opções e imprevistos no desenvolvimento da ação.

3. Vertentes do conhecimento do professor na perspectiva de Lee Shulman

O americano Lee Shulman (1986, 1987), concebe uma base de conhecimentos para o ensino visando contribuir para as políticas de ensino e reforma educacional. Inicialmente, Shulman (1986), movido pelo interesse de responder alguns problemas sobre defasagem nas aprendizagens dos estudantes e na formação dos professores, destacou que o conhecimento do professor possui, no mínimo, três vertentes: (1) conhecimento do conteúdo da disciplina em si; (2) conhecimento didático do conteúdo e (3) conhecimento curricular.

Um ano mais tarde, Shulman (1987) ampliou seus estudos e destacou que a base de conhecimentos para o ensino de um professor incorpora sete categorias: Conhecimento do Conteúdo; Conhecimento do Currículo; Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, Conhecimento Pedagógico Geral; Conhecimento dos Estudantes e de suas características; Conhecimento dos Contextos Educacionais; Conhecimento dos fins, propósitos e valores da Educação e de sua base histórica e filosófica. O autor enfatiza, como em 1986, que o Conhecimento Didático de Conteúdo é um conhecimento específico de professores.

Ao nosso ver, as sete categorias enfatizadas por Shulman, em 1987, são relevantes, porém, as três citadas anteriormente, no texto de 1986, correlatas ao conhecimento específico da disciplina para ensinar, dão sustentação às análises deste artigo. Segundo o autor, o professor deve ter domínio e transformar perfeitamente os conhecimentos da base em diálogo que realiza efetivamente na prática. Ele destaca como conhecimento de base o Conhecimento do Conteúdo da disciplina em si, o Conhecimento Curricular do Conteúdo e o Conhecimento didático do Conteúdo¹¹. É importante destacar que essas categorias, embora salientadas por Shulman separadamente, são imbricadas na atuação do professor.

A expressão denominada por Shulman (1986, 1987) de “*Pedagogical Content Knowledge*” está sendo usada por nós como *Conhecimento Didático de Conteúdo*. O autor designa essa expressão para apresentar uma categoria específica de conhecimento de professores, ou seja, um

¹¹ Tradução usada para as expressões que Shulman utiliza: *Content Knowledge*, *Curricular Knowledge*, *Pedagogical Content Knowledge*).

conhecimento que diferencia um professor de um especialista de uma determinada disciplina. Ressalta-se que, para o pesquisador, esse tipo de conhecimento específico do professor integra a didática da disciplina como conhecimento a ser ensinado, incorporando os modos de abordá-lo a fim de que seja compreensível para os estudantes.

A expressão “*Content Knowledge*” diz respeito ao conhecimento do conteúdo a ser ensinado. Shulman (1986, 1987) revela que o domínio do conteúdo específico fortalece a intervenção do professor, mas a sua lacuna limita as trajetórias de aprendizagens no ensino, à medida que dificulta a compreensão do quanto o estudante aprendeu e as intercorrências neste processo.

No que se refere à expressão “*Curricular Knowledge*”, Shulman (1986, 1987) defende que esse domínio engloba a compreensão dos materiais e dos programas que o professor emprega como recursos para o ofício, uma vez que o ensino de um conteúdo ou disciplina não é um fim em si mesmo, mas uma rede a trabalho de outros fins.

Além das Categorias apontadas por Shulman (2005), o autor apresenta as fontes base de conhecimento para o ensino. A fonte *formação acadêmica nas áreas de conhecimento ou disciplinas*, segundo Shulman (2005), é a fonte primária da base de conhecimento, que é o conteúdo, ou seja, a compreensão, a aptidão e o conhecimentos que devem ser adquiridos pelos estudantes. Para o autor, esse tipo de conhecimento se apoia em dois aspectos: a bibliografia, os estudos concentrados nos campos de conhecimento e a produção acadêmica histórica e filosófica acerca da natureza do conhecimento nessas áreas de estudo. Em se tratando da segunda fonte, “*os materiais e o entorno do processo educacional institucionalizado*”, para que os objetivos da escolarização sejam atingidos, segundo Shulman (2005), é necessário gerar materiais e estruturas para ensinar e aprender. Nesse processo, o autor destaca os currículos, com seus escopos e sequências didáticas, as avaliações e os materiais correlatos; as instituições de ensino com suas condições hierárquicas e seus sistemas de diretrizes e funções; as organizações profissionais de professores, com suas incumbências de negociação, transformação social e segurança mútua, entre outros.

No que tange à fonte “*pesquisas sobre escolarização, organizações sociais, aprendizado humano, ensino e desenvolvimento, e outros fenômenos sociais e culturais que afetam o que os professores fazem*”, Shulman (2005) pondera que essa fonte envolve pesquisas acadêmicas voltadas à compreensão dos processos de escolarização, ensino e aprendizado. A literatura, para

o autor, abrange os resultados e os métodos da pesquisa empírica nos campos de ensino, aprendizado e desenvolvimento humano, assim como os princípios regulamentários, filosóficos e éticos da educação. Na fonte “*a sabedoria que deriva da própria prática*”, para o pesquisador, a aquisição desse tipo de conhecimento se dá com a prática de professores experientes e iniciantes. Ao discorrer acerca dessa fonte, o autor finaliza que uma base de conhecimento para o ensino não é imobilizada e muito menos imutável, pois à medida que aprendemos mais sobre o ensino é possível reconhecer outras categorias de desempenho e compreensão, que são especificidades dos notáveis professores e que requerem reconsideração e redefinição de outros campos.

Analisando os estudos de Shulman de 2005, observamos que essas fontes são princípios adequados da base de conhecimentos acadêmicos. Ao nosso ver, ficou evidente a nossa responsabilidade em oferecer aos professores uma formação que contemple conhecimentos específicos, pedagógicos e curriculares e a valorização das experiências de sala de aula e o incentivo à reflexão da própria prática.

4. Sobre o Projeto, a sua organização e o seu desenvolvimento.

O Projeto teve o propósito de promover discussões e reflexões acerca da compreensão que os professores e formadores têm em relação à Matemática e o seu ensino, bem como os seus conhecimentos sobre os documentos e materiais curriculares da Rede Municipal de São Paulo. O início se deu em fevereiro de 2019, contando inicialmente com a participação efetiva e voluntária de 55 (cinquenta e cinco) professores, correspondentes aos anos de escolaridade, 1º ao 9º ano do Ensino Fundamental, 10 (dez) formadores, 02 (dois) colaboradores, e 01 (uma) coordenadora geral.

Os professores envolvidos eram efetivos da Rede Municipal de Educação de São Paulo e os formadores eram mestrandos, doutorandos e egressos do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Unicsul e alguns assistentes técnicos de Educação I da Rede Municipal de Ensino da cidade de São Paulo. Tanto os professores quanto alguns dos formadores técnicos eram vinculados às seguintes Diretorias Regionais de Educação: Capela do Socorro, Freguesia do Ó, Guaianases, Penha, Santo Amaro, São Mateus.

Para os encontros grupais, realizados aos sábados, com periodicidade quinzenal, os professores foram distribuídos em subgrupos correlatos ao ciclo em que atuavam

(Alfabetização, Interdisciplinar e Autoral)¹², conduzidos pelos formadores selecionados para desenvolver as atividades do Projeto em questão.

Seguindo as orientações de Pires (2011), que pontua que são relevantes as discussões sobre o processo de organização e desenvolvimento curricular, pois levam os professores a refletir sobre os objetivos de aprendizagem e a organização de atividades a serem realizadas, pensando no tempo e nos espaços escolares, organizamos a formação em dois momentos. No primeiro momento, em cada um dos encontros, os professores e formadores estudavam e discutiam as concepções que embasam o Currículo da Cidade e algumas possibilidades para sua implementação: a Matriz de Saberes; as Ideias Fundamentais; os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS); os Eixos Estruturantes e Articuladores; os Objetos de Conhecimento e os Objetivos de Aprendizagem e Desenvolvimento de Matemática.

Em um segundo momento, os professores e formadores trabalhavam juntos, aprofundando-se teoricamente em temas relacionados à Educação Matemática, utilizando os princípios da metodologia *Lesson Study*, em que analisavam as atividades das sequências escolhidas do Caderno da Cidade Saberes e Aprendizagens, de Matemática, referentes ao ano escolar que atuavam, discutiam e planejavam uma aula, desenvolviam essa aula e refletiam coletivamente sobre ela.

Para o desenvolvimento do Projeto, no qual buscou-se compreender quais aproximações e usos que os professores faziam dos materiais produzidos pela Secretaria, foi necessário recorrer a uma abordagem qualitativa, de cunho participativo, a qual se baseou na observação dos pesquisadores participantes dentro desses diferentes Ciclos de Aprendizagens, mostrando, assim, uma imersão deles nas situações propostas. Convém destacar que, para este artigo, focaremos no Ciclo de Alfabetização.

Desse modo, os pesquisadores ocuparam o papel de observadores, discutindo com os participantes os objetivos de estudo e, ao mesmo tempo, construindo a sua identidade, como formador e pesquisador, no decorrer do processo, utilizando, para isto, a análise de documentos que seriam objetos da pesquisa.

Convém evidenciarmos que foi preciso considerar dois aspectos que são relevantes para esse tipo de pesquisa: *o tempo e a interação* entre o pesquisador e os participantes do Projeto.

¹² O Ciclo de Alfabetização envolve os 03 (três) primeiros anos (1º, 2º e 3º). O Interdisciplinar abarca os 03 (três) anos seguintes (4º, 5º e 6º). Por fim, o ciclo Autoral compreende os 03 (três) anos subseqüentes (7º, 8º e 9º)

O tempo necessário para a negociação de significados do Projeto, de modo a fazer sentido para os professores e a interação entre os participantes, uma vez que a coleta de dados depende principalmente das relações de confiança que se estabelecem no grupo, principalmente, se queremos que as práticas desenvolvidas pelos professores possam ser objetos de conhecimento e reflexão da formação, amparadas pelo currículo e pelos materiais curriculares produzidos pela Rede.

Para o desenvolvimento da formação, utilizamos a metodologia de formação, de origem japonesa, o *Lesson Study*, uma vez que compreendemos que é uma atividade de natureza formativa, na qual um grupo de professores e pesquisadores trabalham juntos, visando à melhoria da aprendizagem dos estudantes e buscando o aprimoramento da própria prática.

Dudley (2015) enfatiza que o propósito central do *Lesson Study* é favorecer o desenvolvimento profissional de professores, possibilitando a ampliação e o aprofundamento do conhecimento dos estudantes. Para o pesquisador, isso exige um processo longo e contínuo de estudos que inclui avanços, mas também obstáculos e frustrações. O autor complementa que uma formação empregando os Estudos de Aula requer uma reflexão crítica em relação à profissão e aos impactos que o ensino exerce sobre a aprendizagem, mas também focaliza um aspecto colaborativo da metodologia ao apontar que os professores se engajam no projeto para melhorar a qualidade de sua aula e, conseqüentemente, ampliar as experiências de aprendizagem proporcionadas aos seus estudantes.

Stepanek *et al.* (2007) afirmam que, por meio dessa metodologia, os professores são conduzidos a compreender suas práticas, dando maior sentido ao que estão planejando e desenvolvendo em sala de aula, propiciando melhoria nas aprendizagens dos estudantes. Dentro desse raciocínio, cabem ainda algumas considerações; a primeira em relação às concepções e as crenças dos professores sobre a Matemática e o seu Ensino. Para Pires (2011, p. 297) as “crenças interferem na constituição de conhecimentos, interagem com o que eles sabem da Matemática, influenciando a tomada de decisões e as ações do professor para ensinar Matemática”. O segundo aspecto de destaque e que influenciou o desenvolvimento do Projeto foi o conhecimento curricular (SHULMAN, 1987), ou seja, o conhecimento do Currículo da Cidade de Matemática e dos materiais curriculares "Caderno da Cidade Saberes e Aprendizagens de Matemática", que foram distribuídos na Rede para apoiar a ação pedagógica dos professores.

Esse conhecimento curricular é importante, à medida que permite que o professor saiba quais temas estão sendo abordados e em que sequência eles aparecem nos materiais curriculares (BORELLI, 2019), o que possibilita ao professor compreender como os conteúdos se relacionam, em cada etapa escolar, e como eles se articulam ao longo da escolaridade.

Também é importante destacarmos que nem todos os formadores tinham experiência com a metodologia *Lesson Study* e/ou com a formação continuada de professores. Por essa razão, o Projeto foi pensado para que os formadores mais experientes apoiassem os novatos. Para isso, fizemos algumas adaptações nas etapas originais do *Lesson Study*, ou seja, o planejamento e a observação das aulas e a reflexão sobre as aulas. Assim, incorporamos a etapa de formação dos formadores, discutindo referências teóricas e estratégias formativas que permitissem o encadeamento desse processo com o grupo de professores. Depois, mantivemos a etapa do planejamento, com a definição do objetivo que se pretendia alcançar, com a escolha de uma atividade do material curricular que, segundo os professores, os estudantes poderiam apresentar dificuldades em realizá-la.

Após o planejamento minucioso entre os pares (objetivo, levantamento dos conhecimentos dos estudantes, dificuldades que poderiam ter, escolha de estratégias mais adequadas para os conhecimentos dos estudantes, indicadores de avaliação, entre outros), os professores do ano de cada ciclo, manifestaram a sua disponibilidade em abrir as portas de sua sala para prosseguirmos com a etapa de observação das aulas (etapa 3). Na etapa de observação de aula, os formadores atuaram como observadores, apoiando-se em recursos audiovisuais e escritos, acompanhando, com os coordenadores das escolas participantes, a aula que foi planejada do professor que se dispôs a desenvolvê-la. O propósito central era de averiguar se o planejamento elaborado servia de apoio ao professor em sua atividade de ensino e se contribuiu, de algum modo, para a aprendizagem dos estudantes do tópico matemático escolhido.

Na quarta etapa idealizada para o projeto, temos a análise dos registros escritos e dos vídeos. Eles foram previamente selecionados pelos formadores, que escolheram os episódios mais relevantes para serem discutidos com toda a turma do ciclo, não apenas pelos professores do ano, de maneira a refletir em conjunto para análise do percurso realizado em sala de aula.

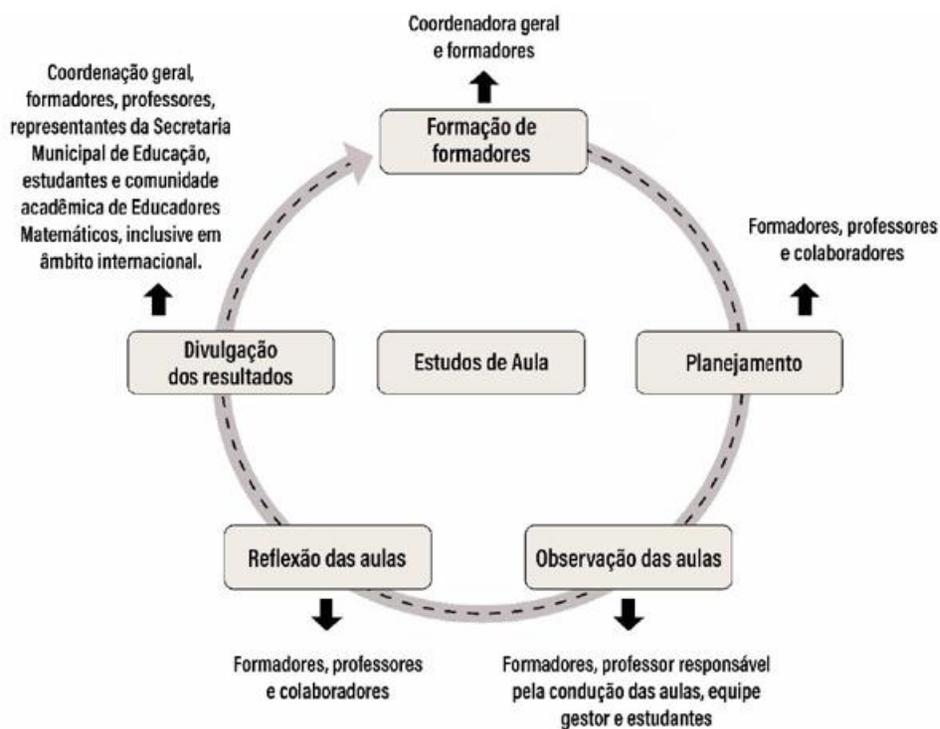
Na quinta etapa, destinada à *reflexão sobre aula*, a partir das discussões e das percepções dos professores do ciclo, novas adaptações foram sugeridas ou complementos às já existentes. Dessa forma, buscou-se ajustar a atividade, inserir uma outra ou, até mesmo, suprir em função

das respostas dos estudantes ou da dificuldade de encaminhamento que o professor pudesse ter durante a realização da atividade.

Na sexta etapa, trouxemos a importância de divulgar os resultados e/ou as aprendizagens, de modo que todos sentissem que tinham algo para compartilhar. O compartilhamento ocorreu na própria Universidade, em um seminário que realizamos no final de 2019, o qual contou com a participação de aproximadamente 200 professores e gestores da Rede Municipal de ensino de São Paulo e na organização de um livro¹³, contando com a participação dos pesquisadores, formadores e professores que cederam as aulas para serem observadas.

A título de ilustração, apresentamos, a seguir, a Figura 1, com as etapas do Projeto idealizado entre a Unicsul, a Secretaria Municipal de Educação e a Unesco.

Figura 1 - Etapas da metodologia *Lesson Study* desenvolvidas no Projeto



Fonte: Martins (2020).

A partir do exposto, a seguir, passamos a evidenciar o desenvolvimento do Projeto de forma mais detalhada. Antes, porém, gostaríamos de destacar que, em se tratando dos

¹³ https://www.casaletras.com/_files/ugd/4a0b98_a54dc8e6bd1a4d45bf4048a2b68b25ae.pdf

conhecimentos de Schön (2020), observamos que a reflexão-na-ação, reflexão-sobre-a-ação e reflexão-sobre-a-reflexão-na ação revelaram-se em muitas ocasiões durante todas as etapas da metodologia *Lesson Study*.

A metodologia de formação *Lesson Study* possibilita aos professores uma reflexão na ação e sobre a ação, tendo como base estudos e pesquisas que focalizam o ensino e a aprendizagem de um determinado Objeto de Conhecimento; estratégias de ensino; sobre os conhecimentos didáticos, específicos e curriculares, entre outros aspectos. Esse movimento de reflexão oportuniza a formação de um professor pesquisador de sua prática, pois permite que este profissional tenha a capacidade de prever as suas aulas, intervir diante das dificuldades dos seus estudantes e refletir sobre as suas aulas, como fonte de investigação e aquisição de múltiplos conhecimentos.

5. Desenvolvimento do Projeto

O Projeto foi concebido para um ano de duração e foi dividido, conforme destacamos, em duas fases. A primeira buscou discutir os princípios que orientam o Currículo da Cidade, como a equidade, inclusão, justiça social, mas também os princípios que organizavam a parte específica de Matemática, como as ideias fundamentais e o letramento matemático.

Na segunda fase, os professores vivenciaram as etapas do *Lesson Study*: o planejamento, a observação das aulas, a reflexão das aulas e a divulgação dos resultados. Gostaríamos de destacar que a segunda fase foi muito rica, uma vez que os professores colocaram em jogo o processo colaborativo que envolvem pessoas que trabalham em conjunto para atingir objetivos comuns, trazendo suas crenças, concepções e experiências para enfrentarem problemas da prática que vivenciam no seu campo profissional (CURI, 2018).

Nessa trajetória, percebemos que, pela fala de muitos professores, na escola, nem sempre é possível conversar com seus pares do ano de escolaridade, para discutir e encontrar soluções para os problemas que enfrentam no cotidiano escolar. Os professores indicavam que era preciso ter o apoio necessário para compreender as dificuldades apresentadas pelos estudantes nos temas matemáticos e a importância de obter subsídios teóricos para compreender, refletir e buscar alternativas pedagógicas para a superação dos problemas percebidos, sejam eles relativos ao currículo ou sobre os objetos matemáticos que serão ensinados para que haja aprendizagem.

Esta mesma reflexão foi trazida por Parrilla e Daniels (2004), quando falam sobre a realidade vivenciada por professores no sistema espanhol de educação.

Os pesquisadores Rausch e Schiindwein (2001), que investigam os efeitos que o trabalho em grupo de professores proporciona quando ele é pensado intencionalmente, afirmam que, para que o professor possa compreender melhor a sua prática, será preciso que ele, junto com seus pares, teorize sobre ela. Todavia, isso não acontece simplesmente assistindo palestras, seminários ou aulas expositivas, é preciso estabelecer uma relação dinâmica com a prática, a partir de uma reflexão coletiva, da autorreflexão, do pensamento crítico, da reflexão sobre a prática.

Esse processo de refletir com os colegas professores e formadores, compartilhar erros e acertos, negociar sentidos e confrontar visões diferentes aparece como uma prática pedagógica muito mais significativa e o *Lesson Study* possibilita esse compartilhamento a partir do desenvolvimento de suas etapas.

Visando ilustrar as etapas do *Lesson Study no Projeto* em questão, apresentamos, a seguir, uma parte do planejamento que foi realizado pelas professoras do 2º ano que participaram desse processo e que compunham o Ciclo de Alfabetização.

6. O Planejamento no Ciclo de Alfabetização

Conforme o exposto, o Projeto tinha o propósito de analisar a compreensão e o uso que os professores da Rede estão fazendo do novo Currículo e dos materiais curriculares de Matemática e, nessa direção, as nossas discussões serão centradas nesses aspectos.

As professoras, inicialmente, reunidas por ano de escolaridade, selecionaram uma atividade para realizar o planejamento. Para isso, elaboramos um roteiro, em nossa pauta, com três aspectos norteadores, de modo que justificassem a escolha da Sequência do Livro Caderno da Cidade: Saberes e Aprendizagens de Matemática – 2º ano, a seleção da atividade dentro da sequência e pudessem identificar quais conhecimentos os estudantes precisavam ter para desenvolvê-la.

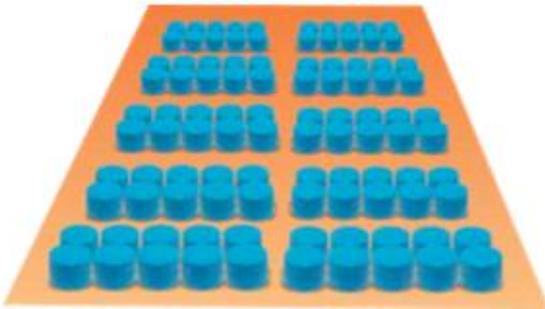
A seguir, a Figura 2 apresenta a atividade escolhida pelo grupo e as respostas elaboradas pelas professoras do 2º ano.

Figura 2 - Atividade do 2º ano

20
MATEMÁTICA

ATIVIDADE 3

1 A COLEÇÃO DE TAMPINHAS DE GARRAFA DE FELIPE AUMENTOU E ELE PEDIU AJUDA AOS AMIGOS PARA CONTÁ-LAS. VEJA O QUE ELAS FIZERAM:



A) HÁ QUANTOS GRUPOS DE TAMPINHAS? _____

B) HÁ QUANTAS TAMPINHAS EM CADA GRUPO? _____

C) NO TOTAL, HÁ QUANTAS TAMPINHAS? _____

 **RODA DE CONVERSA**

COMO VOCÊ PENSOU PARA ENCONTRAR O TOTAL?

2 A TURMA DE FELIPE TAMBÉM ESTÁ COLECIONANDO TAMPINHAS A CADA DIA DA SEMANA:

SEGUNDA-FEIRA DIA 10	TERÇA-FEIRA DIA 11	QUARTA-FEIRA DIA 12	QUINTA-FEIRA DIA 13	SEXTA-FEIRA DIA 14
15	24	30	35	43

A) DO DIA 10 AO DIA 11, QUANTAS TAMPINHAS FORAM ACRESCENTADAS À COLEÇÃO?

Fonte: Caderno da Cidade: Saberes e Aprendizagens – Matemática (SÃO PAULO, 2020, p.20)

O grupo justificou a escolha da sequência no material por considerá-la ser “a mais acessível e por ajudar na compreensão da próxima atividade”. Para a escolha da atividade 1, a

justificativa foi: “a atividade 1, nos ajuda na compreensão de outras atividades que vem a seguir no material e traz uma aproximação com a realidade”.

Como este foi o início do trabalho de planejamento, podemos perceber que o grupo escolheu o tema números, mas não apresentou argumentos que mostrassem dúvidas ou dificuldades dos estudantes que tenham sido observados no decorrer do trabalho na sala de aula. A escolha se pautou muito mais no que elas já conheciam sobre o Sistema de Numeração Decimal.

Na resposta sobre quais eram os conhecimentos matemáticos que os estudantes precisariam ter para realizar a atividade proposta, as professoras mencionaram a prevenção de saúde, sequência de números e saber fazer correspondência de legenda.

Como podemos observar, apesar do tema números ser o tema que elas se sentiram mais confortáveis para trabalhar, quando solicitadas a pensar quais são os conhecimentos que os estudantes precisariam ter para desenvolver a atividade, o grupo apresentou um repertório que nos fez questionar que conhecimentos essas professoras têm sobre o Sistema de Numeração Decimal? Será que conhecem, de fato, as suas características? Pelas respostas apresentadas, nos pareceu que não.

Após a análise da atividade e dos comentários realizados pelas formadoras, foi reforçado que aquele espaço de formação seria para que as professoras pudessem trazer temas que elas acreditassem ser mais difíceis para os estudantes e que em colaboração, os professores e os formadores, coletivamente, se apropriassem teoricamente sobre os temas. O objetivo era buscar a compreensão das orientações explicitadas no material e, se necessário, ajustar a atividade, pensando nas dúvidas e nos conhecimentos que os estudantes poderiam ter para a realização da atividade, já que o Projeto também tinha como foco a análise do documento e do material curricular.

Diante do exposto, e nas discussões entre os formadores, apresentamos uma proposta para que cada grupo, por ano, escolhesse uma outra atividade, para que, em conjunto com os professores do ciclo, pudéssemos realizar o planejamento coletivo. As professoras do 2º ano escolheram a Unidade 2, da Sequência 3 – Atividade 2 do Caderno da Cidade: Saberes e Aprendizagem, conforme Figura 3, apresentada a seguir:

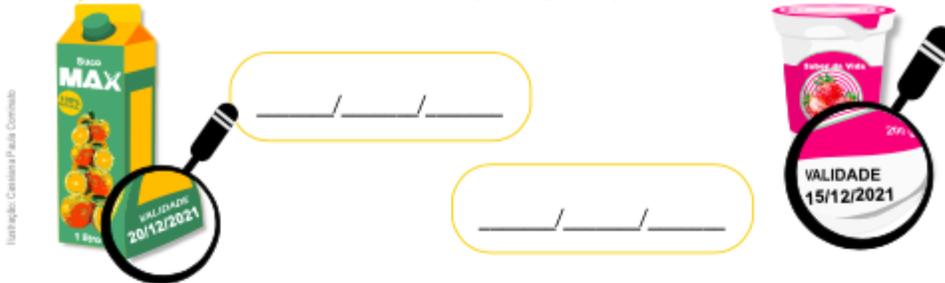
Figura 3 - Atividade 2 do 2º ano

ATIVIDADE 2

- 1 AO COMPRAR PRODUTOS ALIMENTÍCIOS PARA PADARIA, O PAI DE MARCELA VERIFICOU A DATA DE VALIDADE. VEJA:



- A) ESCREVA A DATA DE VALIDADE DOS PRODUTOS:



- B) ESSES PRODUTOS ESTÃO DENTRO DO PERÍODO DE VALIDADE? POR QUÊ?

- C) OBSERVE A FORMA DAS EMBALAGENS E INDIQUE O NOME DAS FIGURAS GEOMÉTRICAS COM AS QUAIS SE PARECEM CADA UMA DELAS:

Fonte: Caderno da Cidade: Saberes e Aprendizagens – Matemática (SÃO PAULO, 2020, p.43).

A partir das discussões no Ciclo de Alfabetização, foi organizado um planejamento coletivo, observando os seguintes aspectos: o que os estudantes precisariam saber para realizar a atividade, quais as possíveis dúvidas que eles poderiam ter, o que fazer diante delas, qual seria o tempo previsto, qual deveria ser a organização da turma e quais indicadores de avaliação poderiam nos ajudar no desenvolvimento da atividade. Mostramos, a seguir, a descrição de cada um dos itens do planejamento produzido pelo Grupo.

Quando questionados sobre *o que os estudantes precisam saber* a respeito da atividade, o grupo indicou a necessidade de conhecer a nomenclatura e as características de figuras espaciais, tais como cilindro e bloco retangular. Indicaram, ainda, a necessidade de conhecer e representar unidades de medida de tempo, assim como a estrutura do calendário. Apontaram a importância de conhecer as características dos indicadores dos rótulos (validade, validade condicional e fabricação) e o uso social destas informações.

Em se tratando das possíveis dúvidas, o grupo indicou as condições das embalagens (Apenas embalagens vazias? Quantas?), a localização dos indicadores, pensando em termos usados e a representação dos indicadores (abreviações, vide data, descrição de períodos etc.). Apontaram, ainda, a descrição das características das figuras, incorporando as figuras diferentes das regulares (nomes, características próximas, entre outras) e a contagem do intervalo de tempo.

Quando questionados sobre *o que fazer a respeito das possíveis dúvidas* que os estudantes poderiam apresentar, o grupo indicou a importância de uma orientação minuciosa sobre embalagens a serem reunidas, a ampliação do fluxo de informação, a seleção dos grupos de tipos de apresentação dos indicadores e o compartilhamento de informações. Destacaram, ainda, a importância de manter exemplos de figuras geométricas disponíveis para facilitar a visualização dos estudantes, a comparação e a exploração das planificações ou mesmo construir as formas, quando necessário, propor / incentivar comparações com as características observadas das figuras e, por fim, a indicação de compartilhar e explorar intervalos de tempo no calendário.

Em se tratando do *tempo* destinado à atividade, o grupo indicou a necessidade de quatro aulas, ao longo da semana, pensando na organização (Preparação, exploração dos indicadores de rótulos e exploração das figuras espaciais). No que tange à *organização da turma*, houve a indicação de grupos, mas com momentos individuais para registro.

No quesito *indicadores de avaliação*, o grupo indicou as respostas elaboradas pelos estudantes, a observação e o registro pelo professor da comunicação de cada estudante mediante intervenções, do tipo: Conseguem explorar as ideias? Utilizam os nomes das figuras? Descrevem características? Conseguem comparar as datas e calcular o intervalo de tempo?

Como podemos observar, houve um avanço muito significativo na elaboração do planejamento, isso porque o foco do trabalho passou a ser a aprendizagem dos estudantes e o grupo passou a se questionar: Quais são os conhecimentos que precisamos ter para poder antecipar as dúvidas dos estudantes e conduzir a aula de uma melhor forma?

Levando em conta essa experiência de planejamento elaborado com todo o Ciclo de Alfabetização, as professoras do 2º ano escolheram uma nova atividade do material para planejar. Optaram por uma atividade que tratava de grandezas e medidas, pois compreendiam que as crianças poderiam ter muitas dificuldades em organizar grupos de pessoas para subir em um elevador, lembrando que há uma carga máxima para ser transportada por ele em cada viagem. Depois desse planejamento, ficou combinado que as formadoras que acompanhavam esse grupo fariam a observação da aula, por meio de vídeos e de registros escritos.

Para o trabalho de observação da aula, uma das professoras se prontificou para que a sua aula fosse acompanhada e se propôs a ser o mais fiel possível ao que o grupo planejou, uma vez que era importante para elas verificar se o que foi planejado ajudaria na condução da aula, mas também poderia trazer novas indicações a partir da reflexão da aula para ajustar o planejamento que foi elaborado pelo grupo.

7. Algumas reflexões na perspectiva de Shulman (1986, 1987)

Para a construção deste tópico, nos baseamos nos estudos de Shulman (1986, 1987), pensando nos domínios: conhecimento do conteúdo da disciplina; o conhecimento didático do conteúdo da disciplina e o conhecimento do currículo.

No que tange ao *conhecimento do conteúdo da disciplina*, no planejamento, os dados evidenciam que o grupo de professores do Ciclo de Alfabetização mostrou dominar, inicialmente, o conhecimento comum do conteúdo de Números, no primeiro planejamento realizado, mas apresentava pouco domínio do conhecimento mais especializado, pensando nas características do Sistema de Numeração Decimal (primeira atividade planejada). Depois, na segunda atividade, que foi planejada de forma coletiva, o grupo foi avançando neste tipo de

conhecimento, uma vez que os professores passaram a ter mais contato com as teorizações e práticas mais recentes que os levaram a uma reflexão sobre ensinar/aprender Matemática. Os dados do planejamento, indicado anteriormente, mostram essa constatação e a opção de não planejar mais uma Unidade Temática, nas quais eles se sentiam confortáveis e passar a planejar uma atividade que eles considerassem que os estudantes apresentavam dificuldades.

A partir das reflexões de Shulman (1986), compreendemos que é preciso dar atenção especial ao conhecimento do conteúdo matemático nas formações para que os professores construam os conceitos e os procedimentos matemáticos que estão em jogo e, ao mesmo tempo, reflitam sobre como os estudantes podem passar por todo esse processo de estabelecimento de uma relação direta entre o conhecimento teórico e as práticas que, se realizadas na sala de aula, possibilitam, assim, maior reflexão sobre a prática.

Com relação ao *conhecimento do currículo*, os dados coletados, no início do projeto, a partir dos nossos instrumentos de pesquisa, indicaram que os professores do Ciclo de Alfabetização ainda não haviam se apropriado dos conceitos apresentados no Currículo da Cidade e no documento Orientações Didáticas do Currículo da Cidade, pois alguns desses professores alegaram que não haviam tido acesso, naquela ocasião, aos documentos supracitados.

Diante desses dados, foi optado pela coordenação do Projeto por iniciar o primeiro módulo com uma discussão sobre os documentos curriculares, confiando que isso trouxesse apropriação e ampliação sobre esses conhecimentos. Na ocasião, os professores evidenciavam lacunas nos conhecimentos das concepções que subsidiam o Currículo da Cidade, de Matemática, tais como: a organização do Currículo em Redes de Significados, as Ideias Fundamentais da Matemática, os Tipos de Raciocínios e os Eixos Articuladores.

Os únicos conhecimentos que esses professores apresentavam eram superficiais e concernentes aos Eixos Estruturantes e à Organização por Ciclos de Aprendizagem. No entanto, embora soubessem quais eram os anos que correspondiam a cada ciclo, os professores não tinham clareza do propósito de tal organização. Além disso, eles reconheciam os Objetivos de Aprendizagem e Desenvolvimento como uma lista de “conteúdos” que o professor deve indicar no seu plano de trabalho e que será entregue para o coordenador. Eles consideravam que essa era a parte que mais chamou a atenção no currículo.

Nesse processo, podemos dizer que com a *Lesson Study* foi possível aprofundar, com esses professores, os elementos constitutivos que permitem uma nova organização do Currículo, não como uma lista de objetivos, mas como respostas às reais necessidades de aprendizagens de sua turma. A partir das ações de formação e à medida que o Projeto avançava, os dados da pesquisa mostram um progresso no conhecimento dos professores sobre as concepções que embasam os documentos curriculares.

A fase do planejamento permitiu um aprofundamento na discussão do Currículo e do documento de Orientações Didáticas, para que os professores pudessem explorar com mais profundidade os elementos constitutivos do Currículo da Cidade, de Matemática, bem como encontrar os pontos de partida e sugestões de trabalho no documento Orientações Didáticas do Currículo da Cidade.

Ao fazerem o planejamento das atividades escolhidas, os professores tiveram a oportunidade de experienciar as suas compreensões sobre o Currículo. Os resultados do projeto mostram que esses professores se apropriaram dos Objetivos de Aprendizagens e Desenvolvimento, pois conseguiram identificar, sem dificuldades, quais desses objetivos estavam incorporados nas atividades que iam desenvolver com seus estudantes. Além disso, ao identificarem os objetivos pretendidos nas situações de ensino, eles puderam indicar quais eram os conhecimentos prévios necessários para que os estudantes pudessem desenvolver as atividades propostas.

Em se tratando do *conhecimento didático do conteúdo*, compreendemos que, a partir dos estudos realizados, o conhecimento que o professor possui interfere na aprendizagem do estudante. Como vimos, o conhecimento didático do conteúdo não acontece sem o conhecimento didático geral, em que se apresentam os princípios e as estratégias para a organização e condução da aula. Para isso, ele precisa refletir sobre o tipo de conteúdo que será desenvolvido e sobre as condições que lhe são oferecidas, de maneira que possa responder a duas perguntas: o como ensinar e como o estudante pode aprender. Será a partir dessas duas questões que o professor pode buscar estratégias e as formas de ensinar mais adequadas ao conteúdo escolhido, pensando na sequência e nas etapas de execução desse plano para o alcance dos objetivos pretendidos.

O trabalho de planejamento para o 2º ano no coletivo do Ciclo de Alfabetização buscou, a partir da atividade escolhida, analisar todos os elementos que compunham a atividade:

o conteúdo, o objetivo pretendido, as dificuldades dos estudantes, as possíveis dificuldades, o tempo, a organização da turma para o desenvolvimento da atividade, a própria sequência de atividade, incluindo o recolhimento de embalagens para serem observadas pelos estudantes antes da resolução da atividade que estava proposta no material.

Esse processo mostra que a troca de conhecimentos didáticos entre os professores do Ciclo de Alfabetização trouxe uma ampliação para a organização de todo processo de planejamento do 2º ano e contribuiu para que os professores aumentassem o seu repertório de encaminhamentos frente às perguntas que os estudantes pudessem fazer, vivenciando, em conjunto, um conhecimento didático geral aliado ao conhecimento didático do conteúdo matemático tratado.

8. Considerações finais

O referido estudo buscou responder como é possível dar significado à formação, tendo às práticas e os contextos de trabalho dos professores como evidências. Vimos que a metodologia *Lesson Study* traz em sua estrutura uma relação dinâmica com a prática, permitindo ao professor e ao grupo com o qual está trabalhando levantar dúvidas dos estudantes e, ao mesmo tempo, refletirem sobre suas práticas, sobre o conhecimento que possuem sobre seus estudantes, sobre os conhecimentos que eles próprios possuem sobre os conteúdos e os conhecimentos pedagógicos dos conteúdos.

Esse processo de construção e de reflexão, desenvolvido a partir da metodologia *Lesson Study*, propicia uma autorreflexão sobre o trabalho que é desenvolvido, permitindo avaliar o que deu certo e o que precisa ser ajustado, seja em relação ao aprofundamento do conhecimento do conteúdo, seja em relação ao conhecimento curricular, ou até mesmo sobre o conhecimento didático do conteúdo, uma vez que esses foram os focos da nossa discussão.

Outro aspecto relevante, que pudemos perceber no desenvolvimento do trabalho, diz respeito às críticas, elas passam a ser não somente sobre o professor em si, mas sobre o próprio desenvolvimento do trabalho planejado de forma coletiva e colaborativa, apresentando, assim, indicadores de aprofundamento, sem um olhar para um único responsável, o que permite, de certa forma, um novo desenvolvimento profissional para os participantes.

Vimos também que os processos desencadeados pelas etapas do *Lesson Study* permitiram aos professores e aos formadores compartilhar acertos e erros, negociar sentidos,

confrontar suas formas de pensar e ideias e estabelecer novos significados comuns ao grupo, possibilitando um processo dialógico entre a formação e o fazer docente, rompendo assim com modelos tradicionais de formação que não consideram a prática como um elemento desencadeador da formação.

9. Referências

BORELLI, S. de Souza. *Estudos de Aula na formação de professores de Matemática em turmas do 7º ano do Ensino Fundamental que ensinam números inteiros*. 2019. 247f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática)- Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2019.

CHACON, G. I. M. *Matemática Emocional: os afetos na aprendizagem matemática*. Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre, RS: Artmed, 2003.

CURI, E; MARTINS, P. B. Contribuições e desafios de um projeto de pesquisa que envolve grupos colaborativos e a metodologia *Lesson Study*. *Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologia: REBCT*, Ponta Grossa, v. 11, n. 2, p. 268-287, 2018.

DUDLEY, P. *Lesson Study: professional learning for our time*. London: Routledge Research in Education Series, 2015.

MARTINS, P. B. *Potencialidades dos estudos de aula para a formação continuada de um grupo de professores que ensinam matemática na rede municipal de São Paulo no contexto de uma pesquisa envolvendo implementação curricular*. 2020. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática)- Universidade Cruzeiro do Sul, 2020.

MARTINS, P. B; CURI, E. Evidências de Conhecimentos Profissionais de uma professora que ensina Matemática no 4º ano na perspectiva de um Projeto de Pesquisa envolvendo *Lesson Study*. *Acta Scientiae*, Canoas, p. 196-222, jan. 2023.

NÓVOA, A. *Nada substitui o bom professor*. (Palestra proferida em São Paulo, a convite do SinproSP, em 2008). Disponível em: . Acesso em: 31 de maio 2016.

PARRILLA, A.; DANIELS, H. *Criação e desenvolvimento de grupos de apoio para professores*. São Paulo: Loyola, 2004.

RAUSC, R. B.; SCHLINDWEIN, L. M. As ressignificações do pensar/fazer de um grupo de professoras das séries iniciais. *Contrapontos*, Itajaí, v. 1, n. 2, p. 109-23, 2001.

SCHÖN, Donald. *The reflective practitioner*. New York: Basic Books, 1983.

SCHÖN, D. A. *Educando o Profissional Reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem*. Trad. Roberto Cataldo Costa. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SCHÖN, D. *Educating the reflective practitioner*; Donald Schön's presentation to the 1987 meeting of the American Educational Research Association. Washington, DC, 1987. Disponível em: <http://educ.queensu.ca/~russellt/howteach/schon87.htm>. Acesso em: 2020.

SHULMAN, L. Those who understand knowledge growth in teaching. *Educational Research*, [s. l.], v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, L. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, [s. l.], n. 57, 1987, p. 1-22.

STEPANEK, J. *et al.* *Learning Lesson Study: A practical guide for teacher and a facilitators*. Thousand Oaks: Corwin Press, 2007.

Autores

Edda Curi

Licenciatura em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP)

Mestrado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP)

Doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP)

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática na Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL)

Grupo Conhecimentos, Crenças e Práticas de Professores que ensinam Matemática (CCPPM)

Linha de Pesquisa: Currículo, Ensino e Formação de Professores de Ciências e Matemática

edda.curi@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-6347-0251>

Priscila Bernardo Martins

Licenciatura em Pedagogia pela Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL)

Licenciatura em Matemática pela Universidade Cidade de São Paulo (UNICID)

Mestrado em Ensino de Ciências pela Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL)

Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL)

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática na Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL)

Grupo Conhecimentos, Crenças e Práticas de Professores que ensinam Matemática (CCPPM)

Linha de Pesquisa: Currículo, Ensino e Formação de Professores de Ciências e Matemática

priscila.bmartins11@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-6482-4031>

Suzete de Souza Borelli

Licenciatura em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
(PUC/SP)

Licenciatura em Pedagogia pela Universidade do Grande ABC (UNIABC)

Mestrado em Educação Matemática pela Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN)

Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul
(UNICSUL)

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática na Universidade Cruzeiro
do Sul (UNICSUL)

Grupo Conhecimentos, Crenças e Práticas de Professores que ensinam Matemática (CCPPM)

Linha de Pesquisa: Currículo, Ensino e Formação de Professores de Ciências e Matemática
suzeteborelli@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-0738-8162>

Como citar o artigo:

CURI, E., MARTINS, P.B., BORELLI, S. S. Conhecimentos profissionais de professores que Ensinam Matemática na Rede Municipal de Ensino de São Paulo a partir do seu envolvimento em um Projeto de Pesquisa pautado na metodologia Lesson Study. **Revista Paradigma**, Vol. XLIV, Edição Temática Estudio de Clases: Contribuciones de la educación japonesa en diferentes países, mayo de 2023 / 268 –292. DOI: <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p268-292.id1420>

The Lesson Study in the context of PIBID: challenges and possibilities for the initial teacher education of Brazilian Mathematics teachers

Renata Camacho Bezerra

renata.bezerra@unioeste.br

<https://orcid.org/0000-0002-4461-8473>

State University of Western Paraná (UNIOESTE)

Iguazu Falls, Brazil.

Richael Silva Caetano

richael.caetano@unioeste.br

<https://orcid.org/0000-0002-9644-3847>

State University of Western Paraná (UNIOESTE)

Iguazu Falls, Brazil.

Maria Raquel Miotto Morelatti

mraquel@fct.unesp.br

<https://orcid.org/0000-0001-5712-3237>

São Paulo State University "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP)

Presidente Prudente, Brazil.

Recebido: 10/03/2023 **Aceito:** 05/04/2023

Abstract

In this research, with a qualitative approach of the interpretative type, we aim to answer the following question: What are the limits and potentialities regarding the theoretical and practical aspects of lesson study in the initial formation of mathematics teachers in the context of PIBID? Ten (10) mathematics graduates who, during a period of PIBID, experienced the Lesson Study in the study/research, lesson planning, execution and post-class reflection about the object of second-degree equation knowledge participated in the research. For the production of the data, we used participant observation, field notes of the researchers, audio and video recordings of the meetings held on the Microsoft Teams platform and also reports prepared by these participants. Through the analysis and discussion of the data, these data categorized and interpreted using the typology of teaching knowledge proposed by Shulman, we conclude that the Lesson Study enabled, to the Initial Formation of these graduates, the learning of specific and didactic knowledge of the content related to the object of mathematical knowledge mentioned above, in addition to knowledge of the general pedagogical type, the student and its characteristics and educational contexts. The limits refer to the impossibility of being present in the preparation and execution of tasks due to the Pandemic period.

Keywords: Mathematics Teacher Education. Lesson Study. Teaching Knowledge.

Un estudio de clase en el contexto de PIBID: desafíos y posibilidades para la Formación Inicial de profesores brasileños de Matemáticas

Resumen

En esta investigación, con un enfoque cualitativo de tipo interpretativo, pretendemos responder a la siguiente pregunta: ¿Cuáles son los límites y potencialidades con respecto a los aspectos teóricos y prácticos del estudio de la lección en la formación inicial de profesores de matemáticas en el contexto de PIBID? Diez (10) graduados en matemáticas que, durante un período de PIBID, experimentaron el Estudio de la Lección en el estudio/investigación,

planificación de lecciones, ejecución y reflexión post-clase sobre el objeto de conocimiento de ecuaciones de segundo grado participaron en la investigación. Para la producción de los datos, se utilizó la observación participante, notas de campo de los investigadores, grabaciones de audio y video de las reuniones realizadas en la plataforma Microsoft Teams y también informes preparados por estos participantes. A través del análisis y discusión de los datos, estos datos categorizados e interpretados utilizando la tipología de conocimiento docente propuesta por Shulman, concluimos que el Estudio de la Lección permitió, a la Formación Inicial de estos graduados, el aprendizaje de conocimientos específicos y didácticos del contenido relacionado con el objeto de conocimiento matemático mencionado anteriormente, además de conocimientos del tipo pedagógico general, del alumno y sus características y contextos educativos. Los límites se refieren a la imposibilidad de estar presente en la preparación y ejecución de tareas debido al período de Pandemia.

Palabras clave: Formación de profesores de Matemáticas. Estudio de Clase. Enseñanza del Conocimiento.

A Lesson Study no contexto do PIBID: desafios e possibilidades à Formação Inicial de professores de Matemática brasileiros

Resumo

Na presente pesquisa, de abordagem qualitativa do tipo interpretativa, visamos responder ao seguinte questionamento: Quais os limites e as potencialidades a respeito dos aspectos teórico-práticos da *Lesson Study* na Formação Inicial de professores de Matemática no contexto do PIBID? Participaram da investigação 10 (dez) licenciandos em Matemática que, durante um período do PIBID, experienciaram a *Lesson Study* no estudo/pesquisa, planejamento de aula, execução e reflexão pós-aula a respeito do objeto do conhecimento equação do segundo grau. Para a produção dos dados, utilizamos a observação participante, notas de campo dos pesquisadores, gravações em áudio e vídeo dos encontros realizados na plataforma da *Microsoft Teams* e, ainda, relatórios elaborados pelos referidos participantes. Mediante a análise e a discussão dos dados, dados esses categorizados e interpretados valendo-se da tipologia dos conhecimentos docentes proposta por Shulman, concluimos que a *Lesson Study* possibilitou, à Formação Inicial desses licenciandos, a aprendizagem de conhecimentos específico e didático do conteúdo referentes ao objeto do conhecimento matemático supracitado, além de conhecimentos do tipo pedagógico geral, do aluno e de suas características e dos contextos educacionais. Já os limites referem-se à impossibilidade de estarem presentes no preparo e na execução das tarefas em virtude do período Pandêmico.

Palavras chave: Formação de professores de Matemática. Estudo de Aula. Conhecimentos Docentes.

Introduction

In this paper we present the results of a formative process - inserted in the context of the Institutional Program of Scholarship Initiation to Teaching (PIBID) - carried out through Lesson Study aimed at the initial training of mathematics teachers. Among the various challenges observed when we problematize and act upon this training, we can mention the need for academics, future teachers, to learn-build a wide range of specific knowledge for teaching, as

already pointed out by Shulman (1986, 1987), as well as the (re)signification/re-education of conceptions that must occur during the undergraduate course. These conceptions have already been constructed during elementary education and refer to mathematics and its teaching-learning process, as observed in some studies (FIORENTINI et al., 1998; LÓPEZ; ALSINA, 2016; SILVA; PASSOS, 2016; SAKAY, 2007).

In line with Nascimento, Carvalho, and Ramos (2022), we chose the construction of the lesson as the leitmotif of this training because we consider it the starting point of the constitutive process of being a teacher. And in this sense, the study of the lesson, as pointed out by several authors (BEZERRA, 2017; BURROUGHS; LUEBECK, 2010; ESTRELLA; MENA-LORCA; OLFOS, 2018; FERNÁNDEZ, 2010; FERNÁNDEZ; ZILLIOX, 2011; FUJII, 2018; ISODA; ARCAVI; LORCA, 2007; PINA NEVES; FIORENTINI, 2021; PONTE; ISODA; OLFOS, 2009; RICHIT; PONTE; TOMKELSKI, 2019; PONTE; WAKE; QUARESMA, 2020; STIGLER; HIEBERT, 1999; VIEIRA; PONTE; MATA-PEREIRA, 2022), is suitable for this objective because it consists in the development of a lesson, starting from a problem arising from the teaching practice, "going through" the phases of study, planning, realization and post-performance reflection of the lesson, always with the aim of the students' learning.

In this scenario, we have as a research problem the following question What are the limits and potentials regarding the theoretical and practical aspects of Lesson Study in the initial training of mathematics teachers in the context of PIBID? In the next sections, we will discuss initial teacher education and teaching knowledge from the perspective of Shulman (1986, 1987), followed by a brief contextualization of the PIBID, a program that represents an important public policy of valorization and incentive for teaching in Brazil. Next, we present the PIBID/Mathematics - Foz do Iguaçu, which constitutes the formative space in which the present research was carried out. After that, we will situate Lesson Study historically, as well as its defining elements, and briefly discuss its use in/for teacher education. Next, we present the methodology of our research, followed by the analysis and discussion of the data that will allow us to answer our research problem. Finally, we bring the final considerations observing the contributions and implications to the field of mathematics education.

Initial Teacher Education and Teacher Knowledge

Teacher education, as emphasized by García (1999, p. 26), constitutes a "[...] field of knowledge, research and theoretical and practical proposals that [...] studies the processes through which teachers - in training or in practice - engage individually or in teams in learning experiences". In our case, we are looking at the stage "in formation", or also called Initial Formation, which takes place during the course of a bachelor's degree in mathematics.

With regard to initial education, Mizukami et al. (2006, p. 22) point out its importance in providing "[...] good support to prepare them [teachers] to act in the profession". In the same sense, Imbernón (2000) understands that initial training should be the basis for the constitution of specialized pedagogical knowledge, being the beginning of professional socialization and the adoption of principles and practical rules.

The research on this specialized pedagogical knowledge, or the specific knowledge and expertise necessary for the exercise of teaching, as well as the thinking/questioning about it mobilized by the teacher before/during/in the classroom (and school) action, has generated a significant amount of research aimed at classifying/categorizing such "knowledge and expertise" according to epistemological, psychological, practical-phenomenological, etc. criteria. Such categorizations are commonly referred to in educational literature as typologies of teacher knowledge and expertise. Among the various typologies (FREIRE, 2003; GAUTHIER et al., 1998; PACHECO; FLORES, 1999; PERRENOUD, 2000; PIMENTA, 2008; PORLÁN; RIVERO, 1998; TARDIF, 2003), we chose the one synthesized by Shulman (1986, 1987).

In his analysis of the research programs and paradigms "process-product" and "teacher thinking", Shulman (1986) states that research, in an attempt to simplify the complexities, present in the classroom, ignores a central aspect of teaching: the specific content of the discipline that the teacher teaches. According to the author, such research has not been examined:

[...] how the specific content of a knowledge area was transformed based on the knowledge that the teacher had into teaching knowhow. Nor did they ask how particular formulations of content related to what students came to know or mislearn (SHULMAN, 1986, p. 6).

In this sense and aiming to contribute to the construction of a solid body of knowledge for teaching, Shulman (1987) develops a research program, the knowledge base (knowledge

base for teaching). This 'base', according to the author, is gradually built from four sources: a) academic knowledge of subject content (to teach); b) educational structures and materials; c) academic knowledge of formal education (the systematized pedagogical knowledge in its various dimensions: psychological, philosophical, curricular, sociological, historical, methodological, etc.) and; d) wisdom of practice (the least codified source of all).

Table 1, in the direction of indicating the referred 'base', presents the diverse knowledge identified by the referred author:

Table 1 - Shulman's Typology of Teacher Knowledge

Teaching Skills "Knowledge"	Definition	Knowledge - Social Sources of Acquisition	Modes of Knowledge Integration in Teacher Education
1. Teaching Content Knowledge (Specific)	These are the teacher's understandings about the structure of the subject, how he/she cognitively organizes the knowledge of the subject to be taught. To understand the structure of a discipline, the teacher needs to know - in addition to facts and concepts intrinsic to it (substantive knowledge) - the ways in which the fundamental principles of an area are organized, the processes of its production, representation and epistemological validation (syntactic knowledge).	Formal and academic contact in the area of specialty sciences (Mathematics, Physics, Chemistry, Biology, Geography, etc.) during the course (Licentiate) in Higher Education. The accumulated literature and studies in the content areas.	By the training and socialization in the course (Licentiate) about this knowledge coming from the specialty sciences.
2. General Pedagogical Knowledge	This is knowledge that transcends mastery of a specific area, including knowledge of educational goals, objectives, and purposes. It also refers to the 'management' of the class and interaction with students, the way students learn, instructional strategies, teaching and learning process.	The formal contact during the course (Licentiate) with the academic knowledge of formal education. The bibliographical documentation and research.	By the training and socialization in the course (Licentiate) about the academic knowledge of formal education. By the investigation arising from the pedagogical practice.
3. Pedagogical Content Knowledge	These are the ways of formulating and presenting content in a way that makes it understandable to students, including examples, illustrations, analogies, demonstrations, explanations, etc. Included is the teacher's understanding of what facilitates or hinders the learning of a given content, as well as the students' misconceptions and their implications on learning. It is the only knowledge that the teacher is the protagonist, because it comes from his or her professional performance.	Pedagogical practice. The literature - research - about case study(s).	By pedagogical practice. By the literature study - research - about case study(s).

4. Knowledge of the Curriculum	Represents the curriculum, that is, the set of programs designed for teaching specific subjects at a given level (Kindergarten, Elementary/Middle School, Technical School, Higher Education). Also included are the instructional materials available for the programs.	The use of programs, textbooks, instructional materials. The literature - research - on this topic.	By the use of the programs, textbooks, instructional materials.
5. Knowledge of the Students and their Characteristics	It refers to knowledge that is specific to a given context (classroom) and is different (changeable) for each.	Pedagogical practice.	By pedagogical practice.
6. Knowledge of Educational Contexts	This is the knowledge that comes from group or classroom work. This knowledge varies according to the government, cultural aspects, and characteristics of the community in which the school is located.	Pedagogical practice. The school and its social (cultural) context.	By pedagogical practice. By the experience derived from living in a certain social (cultural) context.
7. Knowledge of Educational Aims, Purposes and Values	It refers to the understanding of how the historical-philosophical aspects - developed throughout history - articulate with the purposes, objectives, and values that were, and are being, defined and adopted by the educational institutions according to the social and cultural moment.	Pedagogical practice. Society in its social, cultural, economic aspects.	By pedagogical practice. By the experience derived from social coexistence.

Source: Elaborated from Shulman (1986, 1987)

Thus, in order to collaborate in such a way as to provide good support to the Initial Formation of (Mathematics) teachers, and to contribute to the constitution of specialized pedagogical knowledge, the PIBID 'arises', as presented below.

The PIBID project: a public policy for teacher education

The Institutional Teaching Initiation Scholarship Program (PIBID) was created by Decree No. 7.219/2010 (BRASIL, 2010) and regulated by Ordinance 096/2013 (BRASIL, 2013), in which the Coordination for the Improvement of Higher Education Personnel (CAPES) is in charge. It is a public policy that aims to encourage the Initial Training of teachers, and, to this end, it brings the university closer to the school and articulates Initial Training with Continuing Training, in a continuum that aims at the appreciation of the teaching profession.

[...] and as important as the other purposes, come two aspects: to encourage teachers who graduate to participate more actively in the life of schools at this level of education, getting to know them "inside", and to teachers at basic school to take responsibility for the training of future teachers (TANCREDI, 2013, p. 14).

According to the CAPES website (<http://www.capes.gov.br/educacao-basica/capespibid/pibid>), the PIBID has the following guiding objectives:

- encourage the training of teachers for Basic Education;
- valuing the teaching career;
- improving the Initial Formation of teachers in the undergraduate programs, through the integration between Higher Education and Basic Education;
- to insert the undergraduate students in the daily life of the school, promoting methodological, technological, and practical experiences that aim to overcome the difficulties identified in the teaching-learning process;
- to encourage public Basic Education schools, through their teachers, to assume the role of co-trainers of future teachers, making them protagonists in the Initial Training processes for teaching; and
- to articulate the theory and practice needed for the formation of teachers, promoting the experience of actions in the Undergraduate courses.

The program is made up of an institutional coordinator (university teacher), an area coordinator (university teacher), a school supervisor (basic education teacher) and novice teachers (undergraduate students). All these functions are paid for with scholarships, but the project also counts on the participation of volunteer teachers and students.

Through the Edictal nº 02/2020 (BRASIL, 2020), CAPES selected proposals from all over Brazil, including the Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE). The Faculty of Mathematics of Foz do Iguaçu, together with two other faculties, Mathematics of Cascavel and Chemistry of Toledo, proposed the Interdisciplinary Project Mathematics/Chemistry, with 24 scholarship students, 3 basic education supervisors with a scholarship, a university project coordinator with a scholarship, and also six academics (two from each campus) and five university teachers (from the three campuses) as volunteers.

The activities of the PIBID began in the middle of the COVID-19 pandemic, when teaching, both in higher education and basic education, underwent a profound restructuring due to the physical and social isolation imposed on us all. In this scenario, in addition to the challenges already inherent in initial teacher education (the difficulty of integrating specific and pedagogical subjects, the conceptual discrepancies of the students coming from basic education, the re-education of the conceptions already built by the students about mathematics and its teaching and learning, the extensive "load" of subjects to be accomplished, etc.), in this version of PIBID we also had the problem of the pandemic. Thus, it was necessary to rethink the

program, in the midst of rethinking teacher education as a whole, in a context of uncertainties and difficulties generated by physical and social isolation and the use of technology.

In order to make the PIBID/Mathematics - Foz do Iguaçu possible, it was necessary to think of strategies that would motivate the student (future mathematics teacher), that would be feasible and that would also promote discussions and reflections uniting the Initial and Continuing Education of teachers. Based on this, we chose to work with the Lesson Study, because it allows the union of theory and practice, the work with a real classroom problem, and also to articulate the Initial and Continuing Education, which was the motivation and guide for the development of the work done with the “pibidians”.

In the next topic, we present and discuss what it is and how we understand the Lesson Study used in the PIBID/Mathematics - Foz do Iguaçu¹⁴ in the year 2021/2022.

A Lesson Study: a possibility for Teacher Education

Lesson Study (or Estudos de Aula/Estudos de Lição in Portugal or Estudio de Clases in Spain) is a formative process based on reflection and collaboration. It appeared in Japan at the end of the 19th and beginning of the 20th century under the name Jyugyo Kenkyu. Since then, it has been used in the Japanese school culture and is divided into three stages: a) planning (in which a lesson is structured); b) development (in which the lesson is carried out as planned); c) analysis (moment in which the lesson planning and execution are analyzed).

According to Soto Gómez and Pérez Gómez (2015), lesson study brings principles from action research, Pestalozzi's philosophy, and Dewey's experiential learning. Ponte et al. (2016) point out the possibility of joint work between initial and continuing teacher education, based on the training context made possible by Lesson Study; however, these works are still rare in Brazil, and even smaller in relation to initial education. According to Pina Neves, Fiorentini and Silva (2022):

In Brazil, the first studies in LS were mostly conducted in the Southeast Region and in continuing education contexts [...] it is observed that the number of studies conducted in other regions has been growing, at the same time as the interest for the development of LS in initial education [...] (p. 417).

¹⁴ From this point on, to refer to the "PIBID/Mathematics - Foz do Iguaçu", only the word PIBID will be used in the body of the text.

The first lesson study studies in Brazil are still recent, as evidenced by the work of Baldin (2009), Felix (2010), Coelho (2014), Merichelli and Curi (2016), Bezerra (2017), Fiorentini et al. (2018), Crecci et al. (2019), Richit et al. (2019), Wanderley and Souza (2020), Macedo, Bellemain and Winslow (2020), Pina Neves and Fiorentini (2021), among others, which are prevalent in the professional development of teachers who teach mathematics.

Throughout the world, Lesson Study is being implemented with adaptations based on what has been proposed in Japan. These adaptations are due, among other things, to the need to adapt this educational process to local realities. For example, in Brazil, due to its large geographical size, the adaptations have observed regional, cultural and economic differences.

In the present study, we chose to make an adaptation of the methodological proposal of Lesson Study, used in Continuing Education by Bezerra (2017) and synthesized by Bezerra (2020), which consists of:

STAGE 1: Planning - the moment when the group collectively chooses the object of mathematical knowledge and the objective for the preparation of the lesson. This stage is divided into several phases, namely a) choice of the subject of mathematical knowledge; b) research on the chosen subject of mathematical knowledge (in official documents, textbooks, paradidactic books and others); c) exchange of experience on the approach to the chosen subject of knowledge by the members of the group, either in the condition of students or in the condition of teachers; d) the members of the group individually and then jointly think about and select challenging problem situations for teaching the chosen object of mathematical knowledge; e) the group tries to anticipate the students' reasoning in each of the elaborated problem situations, discussing the degree of difficulty and possible changes; f) the group solves the elaborated problem situations and, if necessary, reformulates them.

STEP 2: Conducting the Class - The class is conducted by one of the members of the group and observed by the others. The lesson is recorded by means of video and individual reports to support later reflections.

STAGE 3: Reflection - After the lesson has taken place, the group analyzes the lesson by watching the recording and reading the individual reports. Through the discussions, it is possible to reflect on the lesson developed by the group, evaluate the difficulties in the teaching and learning process, and suggest changes for the lesson.

Thus, as already highlighted, the class - and the problems arising from it - constitutes the starting point of this formative context made possible by Lesson Study (BEZERRA, 2017; BURROUGHS; LUEBECK, 2010; ESTRELLA; MENA-LORCA; OLFOS, 2018; FERNÁNDEZ, 2010; FERNÁNDEZ; ZILLIOX, 2011; FUJII, 2018; ISODA; ARCAVI;

LORCA, 2007; PINA NEVES; FIORENTINI, 2021; PONTE; WAKE; QUARESMA, 2020; PONTE; ISODA; OLFOS, 2009; RICHIT; PONTE; TOMKELSKI, 2019; STIGLER; HIEBERT, 1999; VIEIRA; PONTE; MATA-PEREIRA, 2022).

It is also important to note that Lesson Study is grounded in the perspective of collaboration. Although the meaning of collaboration is polysemic, we adopted in this research the meaning attributed to Boavida (2005). According to the author

The paths of collaboration can be very different. However, for a research project to be successful it seems essential to have voluntary participation, to negotiate carefully, honestly, openly and from the beginning how the group will function, to outline a path of working together that is understood to be appropriate and feasible given everyone's needs, goals, interests, expectations and desires, and to negotiate and renegotiate each other's responsibilities and roles so that the benefits of complementary experiences, perspectives and skills govern the collaborative process for all involved. Mutuality in the sharing of goals, roles, and responsibilities is not essential. What is important is that there is a common purpose that guides the work to be developed, but also the possibility of particular interests and needs, that there is shared leadership and a non-hierarchical relationship, and that a climate of ease and mutual respect is created so that each person can share knowledge and experience, and, in this way, everyone can learn (BOAVIDA, 2005, p. 191).

Therefore, trust (expressing oneself without fear of making a mistake), conversation and negotiation are necessary elements for collaboration and should be present in the Lesson Study considered as a formative context in/for the Initial and Continuing Education of the teacher who teaches Mathematics.

Research Methodology

From our question, "What are the limits and potentials regarding the theoretical and practical aspects of Lesson Study in the initial training of mathematics teachers in the context of PIBID?", we chose the qualitative research approach (MINAYO, 2011), of the interpretive type (ERICKSON, 1986), in which we seek plurality in the interpretation and understanding of contexts, as suggested by Sandín Esteban (2010).

The students who were members of the PIBID, as well as the mathematics teacher who supervised the project and worked at the school, were informed that the PIBID meetings were also part of a research project approved by the Ethics Committee (CAAE: 47772921.0.0000.0107), and therefore they were asked to sign the informed consent form.

For the production of data, we used participant observation, researchers' field notes, audio and video recordings, considering that all the meetings were held through the Microsoft

Teams platform, and also the reports written by 10 (ten) “pibidans” (eight of them fellows and two volunteers) and posted on the aforementioned platform.

Participant observation was used because it is a “[...] strategy that involves, [...] not only direct observation, but a whole set of methodological techniques that assume a great involvement of the researcher in the situation studied” (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 28), so that one can hear, listen, see, use all the senses, being aware that one is in the group, but being someone “outside” the group, as pointed out by Whyte (2005).

The audio and video recordings offered us “[...] a limited but powerful record of temporal actions and real - concrete material events” (BAUER; GASKELL, 2015, p. 137), and this was valuable, especially considering the pandemic period we lived in during the course of the PIBID.

And finally, the reports created by the “PIBIDans” and posted on the Microsoft Teams platform had the function of a narrative in which, through writing and (re)constructing events, as suggested by Bauer and Gaskell (2015), they had the opportunity to relive the experience and find possible explanations for what happened.

The activities were developed over five months of the year 2021, in weekly meetings, as described in Table 2.

Table 2 - Activities developed in the PIBID Math/Foz do Iguçu Project through the Lesson Study training context

Day/Month	Activities developed
Initial Motivation	
30/03	The supervisor of the school, a mathematics teacher, presented to the PIBID group the difficulty in teaching and having the students understand the content "Second Degree Equation" when linked to a context.
Lesson Study Context	
06/04	On this day, the Lesson Study was presented to the group as a way to motivate them to use this context to assist the supervising teacher at the school in teaching the content "Second Degree Equation".
13/04	The students watched six videos on the YouTube channel "Lesson Study - Maria Alice" about what Lesson Study is and how it works. (https://www.youtube.com/channel/UC5XJsNGUJzmvPoVsFW3ooLw)
20/04	Discussion of the videos watched on 4/13, the historical context in which Lesson Study emerged in Japan, and how this formative context has been used around the world and in Brazil.
Studying and Researching the Content	
04/05	The future mathematics teachers were asked to formulate and present their concepts about the content of the second-degree equation. The challenge was that the concept formulated should express the understanding of the content without using the mathematical concept established in the textbooks.
11/05	From the presentations, the group decided that it was necessary to understand and define the concept of function in order to also define and understand the concept of equation and, subsequently, the concept of second-degree equation. Furthermore, it was suggested by one of the future teachers and accepted by the group the idea that history would be an important

	resource for this understanding, as it would help to understand how the contents 'appeared' and were formalized over time.
25/05	Each pibidian student presented the information found throughout the historical research. After each presentation, the group discussed and complemented the information.
01/06	Continuation of the presentations and discussion. At the end of the presentations, it was discussed that history can be motivating, can be just informative, and can be used as a resource for "new" discoveries. In view of this, the reading of three texts was suggested, namely: "Three Studies on History and Mathematics Education", by Miguel (1993); "A little History of Functions: some suggestions for practical activities for the classroom", by Oliveira, Viana and Rosa (2013) and "The History of the Concept of Function in Video: a proposal for learning", by Maciel and Cardoso (2014).
15/06	The texts read were discussed and the students were asked to review the definitions of function, equation and second-degree equation formulated individually from the discussions and reflections held in and with the group.
22/06	The objective of this meeting was, based on the individual definitions, to create a collective definition of the concept of function, equation, and second-degree equation. The discussion was long and full of comings and goings, because the goal was for the group to understand the differences and formalize a concept without the need to look for the concepts elaborated in the textbooks. For the next meeting, the students were challenged to think of problems (elaborate or re-elaborate) that use the second-degree equation content to work (conduct a lesson) with ninth graders as requested by the school's supervising teacher.
Preparation of the Lesson	
29/06	Presentation and discussion of the problems prepared/reworked by each of the students for lesson planning. At each presentation there were group discussions and additions to the problem presented.
06/07	End of the presentations and discussions about each proposed problem. The group, in a collaborative process and based on the reflections made about each proposed problem, chose two problems that, according to the consensus of the moment, best met the objectives of the lesson development regarding second degree equation for ninth grade students.
13/07	The chosen problems were discussed and reformulated when necessary. At this moment, the whole group tried to anticipate the students' reasoning and possible difficulties and tried to eliminate possible doubtful interpretations. The participation of the mathematics teacher, who supervises the school, was important to bring day-to-day situations and promote reflection with the future teachers.
Conducting the Class	
26/07 To 30/07	By decision of the PIBID/Foz group, the PIBID teacher was responsible for conducting the planned class with the ninth-grade students and the other members of the group were responsible for the observations. Remember that due to the COVID-19 Pandemic, the classes were watched by the pibidians remotely through the Classroom platform made available by the Paraná state government (Brazil).
Post Class Reflection	
03/08	On this day, we started the post-class reflection about the first problem developed and applied with the ninth-grade students. The future math teachers and the supervising teacher were able to discuss and reflect on the strengths and difficulties in carrying out the proposed lesson. It was also pointed out how the students reacted to the problem presented and how it was solved.
17/08	The second problem developed and applied to the ninth-grade students was discussed. After this reflection, each PIBID student was responsible for preparing a reflective report about the activities developed, highlighting the perceptions of the process, as well as what exceeded expectations and what was considered as a limitation in carrying out the activities developed.

Source: Organized by the authors, 2021

After the presentation of the summary of the activities and discussions that took place during the Lesson Study in PIBID, we will now present the analysis and discussion of the data in order to answer our research problem concerning the limits and potentialities of the Lesson Study in the Initial Training of Mathematics Teachers.

Data analysis and discussion

Based on the typology of teaching knowledge proposed by Shulman (1986, 1987), we developed our categories of analysis. Thus, in the following topics we present the evidence of the knowledge developed by the pibidians, through the participation-action in the PIBID, by means of the Lesson Study.

Knowledge of the teaching content (specific)

The academics, when proposing the lesson to be developed for teaching equations of the second degree, believed to know the subject well, however, when asked by the teachers (researchers) what is an equation, they could not answer. In addition, they did not understand the relationship between equation and function, not knowing how to differentiate them. In this regard, we chose a representative narrative from one of the participants:

However, it was verified that there was no consolidation of the equation and function concepts, so the need to understand the historical development of function and equation was verified [...] With the intention of a real consolidation of the equation and function concepts there was an individual elaboration of an informal conceptualization of function and equation, therefore after several reflections, debates and researches together with the responsible teachers, the school's math teacher and PIBID students an informal definition of function and equation was elaborated. (A-7)¹⁵

Academic refers to the perception, by the PIBID group, of the need for a study using the History of Mathematics for the understanding and development of the concepts of function and equation. After this study and individual elaborations about these concepts, followed by socialization and reflections within/with the group, the following definition of function, equation, and equation of the second degree was collectively reached

- A function is a formation law that establishes a relationship, which associates to each element of a numerical set A, called domain, a single element of a numerical set B, called codomain. The formation law is an algebraic

¹⁵ To ensure the anonymity of the participants, the expression "A-number" is used to indicate the PIBID student.

expression formed by mathematical operations and that, by means of equality, relates two variables: independent (element of the domain) and dependent (element of the counter-domain). The Domain set provides the numbers for the substitution of the independent variable in the formation law, in which each value obtained in the substitution and in the development of this algebraic expression make up the Image set, this being a subset of the Contradomain.

- Equation is an equality between mathematical expressions, containing at least one algebraic expression. The algebraic expression is defined by mathematical operations, numbers and one or more unknowns. Unknowns are any symbol used to represent an initially unknown value.

- Second degree equation is an equality between mathematical expressions, containing at least one algebraic expression. The algebraic expression is defined by mathematical operations, numbers and one or more unknowns, the greatest exponent of which must be of degree two. Unknowns are any symbol used to represent an initially unknown value. In the second-degree equation up to two values satisfy the equality between the mathematical expressions.

As already observed by Vieira, Ponte and Mata-Pereira (2022) and Fernandez and Zilliox (2012), regarding the contribution of Lesson Study to the learning/deepening of the future teacher's mathematical knowledge, our students also signaled such learning. They would probably continue, if they did not participate in PIBID, and for some time, with a superficial and diffuse knowledge about the object of knowledge in question.

General pedagogical knowledge

The pedagogical knowledge cited by the students was many and diverse, both in the narratives and in the audio-recorded group discussions. Themes such as: a) the importance of 'arousing' the student's interest; b) the need to manage a class based on dialog and questioning by the teacher about the object of knowledge being discussed; c) stimulating student participation-action in the classroom; d) the organization and dynamics of the class held by the mathematics supervising teacher, a class developed by the PIBID group via Lesson Study; e) the importance of putting yourself in the student's shoes; f) the importance of contextualization to the teaching and learning process; g) about different means for teaching; among others, were identified. The following excerpts highlight this fact:

The teacher tried to arouse the interest of the students in solving the proposed exercise, there was a very nice interaction of the students present in the classroom [...]. (A-3)
The interaction occurred through dialogues and questions between students and teacher. (A-7)

I was very surprised how much the math teacher stimulated the participation of the students during the lesson, asking questions, suggesting reflections, giving hints so that they could arrive at the answer. (A-8)

The math teacher made the class extremely dynamic, where she constantly tried to ask the students questions to make them think about what was being worked on and participate in the class. (A-8)

Many students, including those from home, participated in the class. The "difficulty" for the teacher was to pay attention to the students who were at home and at school at the same time, and to adjust the camera so that everyone could be seen. (A-9)

[...] allowing the students to experience the classroom from the teacher's point of view, from the planning of the lesson to its execution, and this tends to lead to a more confident professional who is better prepared to face any adversity in the exercise of his or her function. (A-4)

We can start by contextualizing the teaching, at the time of the application of the problems. (A-5)

And as a future teacher, I could understand that there are many methods to teach this content, such as the one presented by Janice to the ninth-grade students (A-9).

Such knowledge, derived from research in Didactics, Psychology, Methodology, Sociology, etc., is important to future teachers, since the complexity of the teaching work requires, from the teacher, diverse knowledge beyond the specific, in our case, Mathematics. We emphasize that Lesson Study, by having the lesson as the main thread (its planning, realization and post-class analysis), ends up providing opportunities for problematization and reflection (NAKAMURA, 2019; PONTE; WAKE; QUARESMA, 2020) around this knowledge that is necessary for pedagogical practice, as well as for planning, since they are considered (or should be) in/during the preparation of the lesson.

Pedagogical content knowledge

Regarding pedagogical content knowledge, whose protagonism and elaboration is the teacher's (SHULMAN, 1986, 1987), the academics highlighted the following:

I would use an object that could represent how we refer to the area or give an example of the school sports field. (The academic refers to the problem situation 2 "A football field has an area equal to 10800 m² and its length is 30 meters greater than its width. What are the dimensions (length and width) of this field?", prepared by the PIBID group and which constituted the lesson applied by the supervising mathematics teacher). (A-2)

The first difficulty was in identifying the quantity of hot dogs (question 3) with the rereading of the problem situation and with the mediation of the teacher they identified as x , another difficulty was in establishing the relationship between the unit price of hot dogs and sandwiches (question 4), but through their attempts and the math teacher as " x " "the price of the sandwich is equal to the quantity of hot dog" they arrived at "the price of the sandwich is equal to the price of the hot dog". (The student refers to problem situation 1, "Peter bought 4 sandwiches at a certain price. He also bought a hot dog, which had the same unit price as the sandwich. The quantity of hot dogs bought was equal to the unit price of each sandwich. He paid two hundred reais bills and received

R\$8.00 in change. Let's analyze:", prepared by the PIBID group and which constituted the lesson applied by the supervising math teacher). (A-7)

This experience highlighted that introductory activities more linked to the everyday life of the child and guided by questions or with more visual and illustrative demonstrations (such as geometric) are very important for the best development of second-degree equations for elementary school students, and to support this process as an academic and future teacher, I will put this knowledge into practice, both the exercises and the search for content in the history of mathematics. (A-2)

[It was observed that problem solving allied to daily themes would be the best option to give meaning to the approached mathematical content, it was also taken into consideration the difficulty usually presented when solving a problem, in general, by the students, so it was decided to ask questions that directed the construction of the equation, where the answer to these questions would be the data collected in the problem. (A-5)

We can also cite the importance of everyday topics and this style of solution as a way to apply to mathematical problems that may present themselves in the school future of these students, because they can create their own auxiliary questionnaires to collect the information of the proposed problem. (A-5)

It can be noticed, in the narratives, the transformation via formulation and presentation of the content by the supervising mathematics teacher at the time of addressing the problem situations in the classroom with her ninth-grade students. The PIBID students - who observed the supervising math teacher's practice during the class - identified these transformations, either in the use of visual resources to support the beginning of the student's understanding of problem situation 2, or through the teacher's mediation with continuous and different explanations to allow the student to identify the unknown quantity of problem situation 1. It was also highlighted the importance of the use, by the math supervising teacher, of themes from everyday life in order to relate school mathematics to routine situations, in an approximate and necessary attempt to the understanding of the students.

With respect to knowledge of the curriculum, no evidence of curriculum development by the students of the PIBID was identified. We believe this is due to the fact that they did not study/research curricular aspects when studying the object of knowledge addressed in the lesson developed via Lesson Study.

Knowledge of the students and their characteristics

During the meetings, discussions and reflections held by the PIBID group, the academics highlighted the importance of paying attention to the students, their characteristics and needs in the process of teaching and learning mathematics. Seeing oneself as a teacher, an important

condition for Initial Training, was required from the students, when they elaborated the problem situations, they tried to anticipate the possible difficulties that ninth grade students would face when solving these problems, considering their characteristics, difficulties, etc. In one of the class observations made by the mathematics supervising teacher, the academics highlighted the following in relation to the difficulties of the ninth-grade students:

The teacher had to ask questions several times for the students to assimilate the steps of solving the exercise. I observed a difficulty on the part of the students in manipulating the formula when out of order. (Refers to the Problem 1 situation). (A-10)

The main difficulty was in relation to how to calculate the area of the rectangle, because in one of the classes, the students confused the formula for the area of the square with the formula for the area of the rectangle. (Refers to the Problem 2 situation). (A-6)

One of the difficulties I observed was just with the question of developing the exercise with the perfect square trinomial method and in why the square root in the quadratic formula has to have a plus or minus in front. (Refers to Problem situation 1). (A-2)

After the teacher explained the problem, I noticed that the students felt a little difficulty in organizing the necessary content to solve the problem. But this difficulty was dispersed when they were questioned with the elaborated questions besides the problem as an aid in solving it. (A-3)

During the group meetings, the PIBID students emphasized the importance of paying attention to these difficulties during the process of teaching and learning mathematics, which are inherent to the construction of mathematical concepts. Still on the characteristics of ninth grade students, many narratives highlighted the pandemic moment in which the PIBID was carried out, which resulted in different postures and characteristics of students who were present in person and remotely during the hybrid class developed by the math supervising teacher:

The online students, through the Meet platform, also participated in the explanations with suggestions for answers to the questions developed on the board by the teacher, only to a lesser degree than those present in class. (A-5)

The students participated a lot, but the students who were in the classroom, I noticed that the students who were at home watching the online class participated more when the students who were in class did not know how to answer some of the teacher's questions. At each question that was on the slide, the teacher asked the students and went back to the question so that they could identify the answer and, also, in the same question she asked several questions for the students to reflect and help them reach the expected answer. At each question from the teacher, the students interacted a lot by answering, but those who were in class with her were more active in participating, the students who studied from home seemed to me to participate much less. (A-8)

As Lesson Study is concerned with student learning, since its objective always aims at this end, it is essential to know the characteristics of the students, since these influence the process of mathematics teaching and learning. Still about the pandemic moment, the following topic will show how it impacted the lesson developed by the supervising math teacher.

Knowledge of educational contexts

Knowing the local reality and characteristics is necessary for the teacher's work, given the influence of these on daily life at school and in the classroom. As already mentioned, the PIBID, which is the training context in which the experience of Lesson Study was carried out, took place during the COVID-19 Pandemic. Thus, the students were unable to go to the field school and 'live' the school reality, as advocated by the PIBID. Even the observation of the class - which was conducted by the mathematics supervising teacher - by the students occurred remotely, via the Classroom platform. Thus, the narratives of the pibidians largely point to this pandemic context and its influence on the occurrence of the class:

The main difficulty was the lack of infrastructure. Despite the experience of the math teacher, the technical limitations imposed on her sometimes-created obstacles. (A-4)

In some moments, there were difficulties in communication and image transmission for the students who were online, because the Internet connection was bad. (A-6)

If the problem situations had been applied to face-to-face teaching, the teaching and learning process would have been more satisfactory, because at times the Internet signal was bad, which completely compromised the transmission of the class. In fact, at one point, one of the students said that he couldn't understand the content because the transmission crashed a lot. In addition, most of the students kept the cameras turned off, which made the pedagogical investigation more difficult. (A-6)

I noticed difficulties when doing multiplication $1.25 \times 1.25 = 1.5625$. Another difficulty is related to hybrid teaching: students in the classroom and students in the meeting, teacher Janice has to divide herself and usually cannot hear what the students in the meeting answer or ask. (A-7)

It is remarkable the consequences of the pandemic in the classroom, less participative students in the hybrid modality, the difficulties that the teacher faces for sharing knowledge with her students. (A-1)

Through this observation it was possible to notice that being a teacher is not an easy task, because in the school environment there is an encounter of several people, with different thoughts and ideas, and it is up to the teacher to make the articulation between students, social contexts, structural problems, knowledge among others in the classroom. (A-10)

The fact that the students pay attention to these contextual aspects - and this was largely made possible by the post-class analysis moment, which constitutes the third moment of the Lesson Study - ends up contributing to their education, as they begin to realize how complex the classroom is in which these contextual characteristics converge.

Knowledge of educational goals, purposes, and values

In relation to the last knowledge of the typology proposed by Shulman (1986, 1987), the knowledge of educational ends, purposes, and values, only in one narrative - presented below - we observed evidence of it:

Thus, this experience was valid because during initial training it allows us to have a vision of the school organization, what its goals are, and how it can impact the lives of students, as well as providing reading about the teaching methodologies used by the current teacher, starting the reflective construction of our own teaching practice. (A-10)

We believe that the low, we would even say inexpressive, occurrence of this knowledge is due to the fact that the lesson study carried out with the PIBID group was more concerned with the planning, execution and post-class analysis than with the specific historical-philosophical aspects and those articulated with the purposes, objectives and educational values.

So far, we have presented the potentialities - represented by this range of pedagogical knowledge indicated by the academics - of the theoretical-practical aspects of Lesson Study in the initial training of mathematics teachers.

Regarding the limitations of Lesson Study, given our context and the historical moment of its emergence, we believe that the discussions and reflections would have been enhanced if they had taken place in person. On several occasions, when the weekly meetings were held through the Microsoft Teams platform, the scholars had difficulty accessing and/or staying on the platform due to Internet connection problems. In addition to this connectivity issue, we also noticed that the students were sometimes dispersed, as maintaining attention on a computer screen is not an easy task, especially considering that many of them did not have adequate space in their homes to attend the meetings.

Another limitation was the difficulty in observing the solution of problem situations (1 and 2) by the ninth-grade students of the supervising math teacher. As mentioned above, the Pibidians observed the interaction between the teacher and her students from a distance, and some of these students were also present from a distance. Thus, the observation of the students'

solution of the mathematical tasks, an important moment in the lesson study, suffered considerable impact. However, even considering this difficulty, the data presented above indicate, within what was possible, the occurrence of this observation followed by reflection by the students of the PIBID.

Final considerations

The constitution of the teacher is a complex work that requires a long period of formation and that continues throughout the professional career. Initial training, considered as the first formal contact aimed at preparing teachers, must contribute to this constitution. In this perspective, the PIBID aims to contribute to this formation by integrating the university and the school of basic education, as well as its different actors (teachers and students of basic education, students and university teachers).

We believe that the implementation of the Lesson Study, during the PIBID, has contributed to the initial formation of our students. The diverse knowledge of teaching that they have learned, as well as the possibility of thinking (and acting) as a teacher when planning a lesson, in its various details and conditions (the complexity of the proposed mathematical activity, the anticipation of the student's thought-resolution, the organization of the didactic actions to be carried out, the time of the lesson, the lesson evaluation, etc.), have contributed to their education.

Thus, what we observed - when we carried out this formative experience during the PIBID, through Lesson Study - is in line with what Nascimento, Carvalho and Ramos (2022) point out when they indicate that Lesson Study is a collaborative and reflective formative context, important for the initial formation of mathematics teachers.

Finally, it is worth noting that the PIBID is an important project for the valorization of undergraduate courses and teaching, but this "model" of training is experienced only by some students of the undergraduate course. We understand that this was also a limiting factor of the proposal based on Lesson Study, since we did not reach all the students of the undergraduate mathematics course. Considering this fact and the importance of the process experienced by the students of PIBID, it is necessary to think of alternatives so that the Lesson Study can be incorporated as a proposal of the Undergraduate Course and/or as a proposal of a subject, such as the Supervised Internship subject.

Referências

- BALDIN, Y. Y. O Significado da introdução da Metodologia Japonesa de Lesson Study nos Cursos de Capacitação de Professores de Matemática no Brasil. *In: SIMPÓSIO BRASIL-JAPÃO*, 2009, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: Associação Brasil-Japão de Pesquisadores, 2009. p. 1-5. Disponível em: <http://japao.org.br/simposio2010/wpcontent/uploads/2010/PA027.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2020.
- BAUER, M. W.; GASKELL, G. **Pesquisa Qualitativa com Texto, Imagem e Som: um manual prático**. 13. ed., Petrópolis/RJ: Editora Vozes, 2015.
- BEZERRA, R. C. **Aprendizagens e Desenvolvimento Profissional de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental no contexto da Lesson Study**. 2017. 210 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Presidente Prudente, 2017.
- BEZERRA, R. C.; MORELATTI, M. R. M. Aprendizagens de Professores que Ensinam Matemática no contexto da Lesson Study. **Hipátia**, São Paulo, v. 5, n. 1, p. 72-85, 2020. Disponível em: <https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/1454>. Acesso em: 2 mar. 2022.
- BOAVIDA, A. M. R. **A argumentação em Matemática Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração**. 2005. 975 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 2005.
- BRASIL. Decreto n.º 7.219, de 24 de julho de 2010. **Dispõe sobre o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID e dá outras providências**. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/ato2007-2010/2010/decreto/d7219.htm. Acesso em: 23 fev. 2023.
- BRASIL. Portaria n.º 96, de 18 de julho de 2013. **Regulamenta o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID**. Disponível em: https://www.in.gov.br/materia//asset_publisher/Kujrw0TZC2Mb/content/id/30798135/do_1-2013-07-23-portaria-n-96-de-18de-julho-de-2013-30798127. Acesso em: 20 fev. 2023.
- BRASIL. Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID – Edital n.º 2/2020, de 03 de janeiro de 2020. **Seleciona IES para o desenvolvimento de projetos institucionais de iniciação à docência nos cursos de licenciatura, em regime de colaboração com as redes de ensino, no âmbito do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência - Pibid**. Disponível em: <https://www.gov.br/capes/pt-br/centrais-de-conteudo/06012019-edital-2-2020-pibid-pdf>. Acesso em: 20 fev. 2023.
- BURROUGHS, E. A.; LUEBECK, J. L. Pre-service teachers in mathematics *Lesson Study*. **The Montana Mathematics Enthusiast**, Montana, v. 7, n. 2-3, p. 391-400, 2010.
- COELHO, F. G. **A Metodologia Lesson Study na Formação de Professores: Uma Experiência com Licenciandos de Matemática**. 2014. 274 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro/RJ.

- CONCENTINO, J.; COSTA, J. A. A.; FERRUZZI, E. C.; WAIDEMAN, A. C.; CARGNIN, C. Encaminhamentos da Metodologia de Análise de Dados: Análise Textual Discursiva. *In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 14., 2017, Cascavel. **Anais [...]**. Cascavel: SBEM, 2017. p. 1-8.
- CRECCI, V.; PAULA, A. P. M.; FIORENTINI, D. Desenvolvimento profissional de uma professora dos anos iniciais que participa de um Lesson Study híbrido. **Educere et Educare**, Cascavel, v. 14, n. 32, p. 1-21, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.17648/educare.v14i32.22755>. Acesso em: 2 jul. 2021.
- ERICKSON, F. Qualitative methods in research on teaching. *In: WITTRUCK, M. C. (ed.). Handbook of research on teaching*. New York/NY: MacMillan, 1986. p. 119-161.
- ESTRELLA, S.; MENA-LORCA, A.; OLFOS, R. *Lesson Study* in Chile: a very promising but still uncertain path. *In: QUARESMA, M; WINSLØW, C.; CLIVAZ, S.; DA PONTE, J; NÍ SHÚILLEABHÁIN, A.; TAKAHASHI, A. (Eds.). Mathematics Lesson Study around the world: Theoretical and methodological issues*. Cham: Springer, 2018. p.105-123.
- FELIX, T. F. **Pesquisando a Melhoria de Aulas de Matemática Seguindo a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, com a Metodologia da Pesquisa de Aula (Lesson Study)**. 2010. 137 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas e Tecnologia) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.
- FERNÁNDEZ, M. L. Investigating how and what prospective teachers learn through microteaching *Lesson Study*. **Teaching and Teacher Education**, Cardiff, v. 26, n. 2, p. 351-362, 2010.
- FERNANDEZ, M. L.; ZILLIOX, J. Investigating approaches to *Lesson Study* in prospective mathematics teacher education. *In: HART, L. C.; ALSTON, A.; MURATA, A. (ed.). Lesson Study, research and practice in mathematics education*. Dordrecht: Springer, 2011. p. 85-102.
- FIORENTINI, D. *et al.* (Org.). **Cartografias do trabalho docente: professor(a)-pesquisador(a)**. Campinas: Mercado das Letras: Associação de Leitura do Brasil – ALB, 1998. 335 p.
- FIORENTINI, D.; RIBEIRO, C. M. S.; LOSANO, A. L.; CRECCI, V. M.; OLIVEIRA, T.; VIDAL, C. P. Estudo de uma experiência de Lesson Study Híbrido na formação docente em matemática: contribuições de/para uma didática em ação. *In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO*, 19., 2018, Salvador. **Anais [...]**. Salvador: UFBA, 2018. p. 1-38.
- FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 28. ed. São Paulo/BR: Paz e Terra, 2003.
- FUJII, T. *Lesson Study* and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. *In: QUARESMA, M.; WINSLØW, C; CLIVAZ, S.; PONTE, J. P.; SHÚILLEABHÁIN, A. N.; TAKAHASHI, A. (ed.). Mathematics Lesson Study around the world*. New York: Springer, 2018. p. 1-21.
- GARCÍA, C. M. **Formação de Professores: para uma mudança educativa**. Porto: Porto Editora, 1999. 271 p.

- GAUTHIER, C.; MARTINEAU, S.; DESBIENS, J.; MALO, A.; SIMARD, D. **Por uma teoria da pedagogia**: pesquisas contemporâneas sobre o saber docente. Tradução de Francisco Pereira de Lima. Ijuí/BRA: Editora UNIJUÍ, 1998.
- IMBERNÓN, F. **Formação docente e profissional**: formar-se para a mudança e a incerteza. São Paulo: Cortez, 2000.
- ISODA, M.; ARCAVI, A.; LORCA, A. M. (Ed.). **El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas**: su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes em el escenario global. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso, 2007.
- ISODA, M.; OLFOS, R. **El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases**. Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso. 2009.
- LÓPEZ, P.; ALSINA, Á. Creencias de los futuros maestros sobre la aptitud Matemática: consideraciones para promover procesos de cambio en la Formación Inicial. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 30, n. 56, p. 892-905, dez. 2016.
- LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação**: Abordagens Qualitativas. 6. ed. São Paulo: EPU, 1986.
- MACEDO, A. D. R. de; BELLEMAIN, P. M. B.; WINSLOW, C. Lesson Study with didactical engineering for student teachers in Brazil. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, [S. l.], v. 9, n. 2, p. 127-138, 2020.
- MERICHELLI, M. A. J.; CURI, E. Estudos de Aula (“Lesson Study”) como metodologia de formação de professores. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 7, n. 4, p. 15-27, nov. 2016.
- MINAYO, M. C. de S. **O Desafio do Conhecimento**: Pesquisa Qualitativa em Saúde. São Paulo/SP: Hucitec-Abrasco, 1992.
- MIZUKAMI, M. da G. N., *et al.* **Escola e Aprendizagem da Docência**: Processos de Investigação e Formação. São Carlos: EdUFSCar, 2006. 203 p.
- NAKAMURA, K. How lesson study helps student teachers learn how to teach mathematics through problem-solving: case study of a student teacher in Japan. In: HUANG, R.; TAKAHASHI, A.; PONTE, J. P. (ed.). **Theory and Practice of Lesson Study in Mathematics**: An International Perspective. Switzerland: Springer Nature Switzerland, 2019. p. 507-525.
- NASCIMENTO, A. M. P.; CARVALHO, E. F.; RAMOS, P. S. Estudio de aula en la formación inicial del profesorado en Matemáticas: creación de un tercer espacio de formación. **Paradigma**, Maracay, v. 43, n. 1, ene. 2022. Disponível em: <http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/1161>. Acesso em: 01 fev. 2023.
- PACHECO, J. A.; FLORES, M. A. **Formação e avaliação de professores**. Porto: Porto Editora, 1999.
- PERRENOUD, P. **Dez novas competências para ensinar**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.
- PIMENTA, S. G. (org.). **Saberes pedagógicos e atividade docente**. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2008.

- PINA NEVES, R. S.; FIORENTINI, D.; SILVA, J. M. P. Lesson Study Presencial e o Estágio Curricular Supervisionado em Matemática: Contribuições à Aprendizagem Docente. **Revista Paradigma**, Maracay, v. 43, n. 1, p. 409-442, jan. 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2022.p409-442.id1178>. Acesso em: 10 abr. 2022.
- PINA NEVES, R. S.; FIORENTINI, D. Aprendizagens de futuros professores de matemática em um estágio curricular supervisionado em processo de Lesson Study. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 14, n. 34, p. 1-30, 2021. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.46312/pem.v14i34.12676>. Acesso em: 2 jul. 2021.
- PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J.; BAPTISTA, M. O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 30, n. 56, p. 868-891, 2016.
- PONTE, J. P.; WAKE, G.; QUARESMA, M. *Lesson Study* as a learning context in mathematics education. In: LLOYD, G. M.; CHAPMAN, O. (ed.). **The international handbook of mathematics teacher education: Participants in mathematics teacher education**. Leiden: Brill/Sense, p. 103-126. 2020. v. 3.
- PORLÁN, R.; RIVERO, A. **El Conocimiento de los Profesores: Una Propuesta Formativa en el Área de Ciencias**. España: Díada Editora S. L, 1998.
- RICHIT, A; PONTE, J. P.; TOMKELSKI, M. Estudos de aula na formação de professores de matemática do ensino médio. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 100, n. 254, p. 54-81, 2019.
- SAKAY, L. **Análise das contribuições de uma pesquisa-ação de reeducação matemática para a formação de professoras dos anos iniciais**. 2007. 156 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Brasília, Brasília, 2007.
- SANDÍN ESTEBAN, M. P. **Pesquisa qualitativa em educação: fundamentos e tradições**. Porto Alegre: AMGH, 2010.
- SHULMAN, L. S. 'Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform'. **Harvard Educational Review**, Cambridge, v. 57. n. 1, p. 1-22, 1987.
- SHULMAN, L. S. Those Who understand: knowledge growth in teaching. **Education Researcher**, New York, v. 15, n. 2, , p. 4-14, 1986.
- SILVA, A. J. N. da; PASSOS, C. L. B. Impressões dos futuros professores quanto a alfabetização e o ensino de Matemática: uma análise de narrativas autobiográficas produzidas em diários reflexivos. In: **Encontro Nacional de Educação Matemática**, 12., 2016, São Paulo. Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo: Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul/SBEM, 2016. p. 1-12.
- SOTO GÓMEZ, E. PÉREZ GOMEZ, A. Lessons Studies: un viaje de ida y vuelta recreando el aprendizaje comprensivo. **Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado**. Zaragoza, v. 83, n. 29.2, p. 15-28, 2015.
- STIGLER, J. W.; HIEBERT, J. **The teaching gap**. New York: Free Press, 1999.

- TANCREDI, R. M. S. P. Políticas Públicas de Formação de professores: o PIBID em foco. **Revista Exitus**, Santarém, v. 3, n. 1, p. 13-31, jan./jul. 2013.
- TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2003.
- VIEIRA, Raquel; PONTE, João Pedro da; MATA-PEREIRA, Joana. Conhecimento matemático de futuros professores: aprendizados realizados num estudo de aula. **Bolema**, Rio Claro, v. 36, n.73, p. 822-843, ago. 2022. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/yVJ8FxZgbGXdmvJfYsYqYfx/?lang=pt>. Acesso em: 01 fev. 2023.
- WANDERLEY, R. A. J.; SOUZA, M. A. V. F. de. Lesson Study como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática sobre o conceito de volume. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 13, n. 33, p. 1-20, 2020.
- WHYTE, W. F. **Sociedade de esquina**: a estrutura social de uma área urbana pobre e degradada. Tradução de Maria Lúcia de Oliveira. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2005.

Autores

Renata Camacho Bezerra

renata.bezerra@unioeste.br

<https://orcid.org/0000-0002-4461-8473>

State University of Western Paraná (UNIOESTE)

Iguazu Falls, Brazil.

Richard Silva Caetano

richael.caetano@unioeste.br

<https://orcid.org/0000-0002-9644-3847>

State University of Western Paraná (UNIOESTE)

Iguazu Falls, Brazil.

Maria Raquel Miotto Morelatti

mraquel@fct.unesp.br

<https://orcid.org/0000-0001-5712-3237>

São Paulo State University "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP)

Presidente Prudente, Brazil.

Como citar o artigo:

BEZERRA, R. C., CAETANO, R. S., MORELATTI, M. R. M. The Lesson Study in the context of PIBID: challenges and possibilities for the initial teacher education of Brazilian Mathematics teachers. **Revista Paradigma**, Vol. XLIV, Edición Temática Estudio de Clases: Contribuciones de la educación japonesa en diferentes países, mayo de 2023 / 293 - 317.

DOI: <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p293-316.id1421>

Contributos do Contexto da Tarefa na Abordagem de Máximos e Mínimos em um Lesson Study em Cálculo

Adriana Richit

adrianarichit@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-0778-8198>

Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS)
Erechim, Brasil.

Luiz Augusto Richit

luizaugustorichit@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-3054-4933>

Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)
Porto Alegre, Brasil.

Andriceli Richter

andricelirichit@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-1578-2821>

Instituto Federal Catarinense (IFC)
Concórdia, Brasil.

Recibido: 07/02/2023 **Aceptado:** 17/04/2023

Resumo

A abordagem do Cálculo em cursos universitários, tais como a Licenciatura em Matemática, reveste-se de importância devido ao papel dessa componente curricular na formação dos futuros professores, assim como pelo fato de que os conceitos do Cálculo constituem as ferramentas matemáticas essenciais para a análise de fenômenos em distintos campos do conhecimento. A pesquisa orientou-se pela questão “De que forma o contexto que embasa a tarefa para a aula de investigação pode influenciar a interpretação e abordagem do objeto matemático abordado em lesson study”? A investigação, de natureza qualitativa e interpretativa, foi realizada em um lesson study sobre ‘Máximos e Mínimos em Cálculo’, ao longo de doze encontros semanais de duas horas. Envolveu oito professores de instituições de Ensino Superior, os quais se dedicam à formação de futuros professores de Matemática. A análise apontou influências em três perspectivas: interpretação da tarefa, mobilização de conceitos e representações e formulação de conclusões.

Palavras-chave: Ensino Superior. Lesson Study. Ensino de Cálculo. Máximos e Mínimos.

Aportes del Contexto de Tarea en el Abordaje de Máximos y Mínimos en un Estudio de Clase en Cálculo

Resumen

El abordaje del Cálculo en cursos universitarios, como la Licenciatura en Matemáticas, es de importancia por el papel de este componente curricular en la formación de los futuros docentes, así como por el hecho de que los conceptos del Cálculo constituyen las herramientas matemáticas esenciales para el análisis de fenómenos en diferentes campos del conocimiento. La investigación estuvo guiada por la pregunta “¿Cómo el contexto que sustenta la tarea para la

clase de investigación puede influir en la interpretación y abordaje del objeto matemático abordado en el estudio de clase”? La investigación, de carácter cualitativo e interpretativo, se llevó a cabo en un estudio de clase sobre ‘Máximos y Mínimos en Cálculo’, a lo largo de doce encuentros semanales de dos horas. Involucró a ocho profesores de instituciones de educación superior, quienes se dedican a formar a los futuros profesores de Matemáticas. El análisis mostró influencias en tres perspectivas: interpretación de tareas, movilización de conceptos y representaciones y formulación de conclusiones.

Palabras clave: Enseñanza superior. Estudio de clase. Enseñanza del Cálculo. Máximo y Mínimo.

Contributions of Task Context in Maximums and Minimums Approach in a Lesson Study of Calculus

Abstract

The approach of Calculus in university courses, such as courses in undergraduate education of future math teachers, is of importance due to the role of this curricular component in the pre-service teacher education, as well as the fact that the concepts of Calculus constitute the essential mathematical tools for the analysis of phenomena in different fields of knowledge. The research was guided by the question “How can the context that supports the task for the research lesson influence the interpretation and approach of the mathematical object addressed in the lesson study”? The investigation, of a qualitative and interpretative nature, was carried out in a lesson study on Maximums and Minimums in Calculus, over twelve weekly meetings. The lesson study involved eight professors from higher education institutions, who are dedicated to education of prospective mathematics teachers. The analysis highlighted influences in three perspectives: task interpretation, mobilization of concepts and representations, and formulation of conclusions.

Keywords: Higher education. Lesson Study. Calculus teaching. Maximums and Minimums.

Introducción

O Cálculo caracteriza-se pela formalização de conceitos e resultados relacionados às variações e mudanças de valores mediante incrementos/decrementos. Os estudantes são instruídos a representar, com rigor, ideias muitas vezes intuitivas (Moreno-Armella, 2021) e manipular matematicamente símbolos e significados que em parte são pioneiramente apresentados neste curso (Alvine, Judson, Schein y Yoshida, 2007). Essa apresentação é convencionalmente articulada por meio de representações gráficas e geométricas com o objetivo de oferecer recursos de interpretação e conectar esses conceitos e significados (Tallman, Reed, Oehrtman y Carlson, 2021; Larios, Páez y Moreno, 2011). Conceitos tais como derivada são aplicados mais tarde na resolução de problemas de maximização e minimização. Promover essa

experiência pode potencializar a construção de conhecimentos, corrobora a importância do estudo do Cálculo e atende a uma frequente solicitação dos alunos: a aplicação de conceitos.

Porém, a aprendizagem e as dificuldades dos alunos são temáticas recorrentemente discutidas no ensino de Cálculo, para as quais alternativas e abordagens são desenvolvidas e analisadas (Cury, 2004). Um exemplo de abordagem que tem se destacado por seu potencial para promover mudanças no ensino de Cálculo é o *lesson study* (Alvine et al., 2007; Becker, Ghenciu, Horak y Schroeder, 2008; Fajar, Harahap, Sukarsih, Rohaeni y Suhaedi, 2017; Lasut, 2013; Richit, Ponte y Richit, 2022), que caracteriza um dispositivo de desenvolvimento profissional, de natureza colaborativa e reflexiva, centrado na prática letiva (Lewis, 2002; Richit, Ponte y Tomasi, 2021), com potencial para favorecer a aprendizagem dos estudantes em Cálculo (Becker et al., 2008).

Entretanto, há poucos estudos que examinam o *lesson study* em disciplinas matemáticas no Ensino Superior. Uma revisão realizada por Utimura e Curi (2017) revelou que no Brasil as experiências conduzidas em *lesson study* ocorrem principalmente na educação básica, aspecto observado também no cenário internacional (Hervas, 2021; Richit, Ponte y Richit, 2022).

Para contribuir com as discussões sobre a dinamização e as possibilidades dessa abordagem no Ensino Superior, analisamos um *lesson study*, cuja aula de investigação foi promovida em uma turma de Cálculo do Curso de Licenciatura em Matemática. O tópico matemático selecionado pela equipe foi ‘Máximos e Mínimos’, um tópico do programa curricular de Cálculo do referido Curso, que foi abordado a partir de uma tarefa específica, cuidadosamente elaborada ao longo do *lesson study* para promover a investigação, a discussão entre pares e a explicitação das estratégias matemáticas mobilizadas pelos estudantes para resolvê-la. O contexto da tarefa, concebido como o universo conceitual relacionado a um campo da vida cotidiana ou da própria matemática (Ponte y Quaresma, 2012), foi o pastejo rotacionado de gado de leite, por ser uma atividade econômica característica da região de abrangência da Instituição em que a aula de investigação foi lecionada.

A pesquisa tem potencial de contribuir com as discussões sobre *lesson study* em Cálculo na medida em que pode sinalizar possibilidades de favorecer a abordagem de tópicos curriculares a partir de contextos ricos e instigantes. A resolução de tarefas investigativas, baseadas em contextos próximos das vivências dos estudantes, constitui-se em uma oportunidade para analisarem problemas e mobilizarem conhecimentos distintos.

1. Lesson Study e o Ensino Universitário de Cálculo

O lesson study é uma abordagem que envolve um pequeno grupo de professores trabalhando em torno de quatro ações: identificação de um problema de aprendizagem e formulação de objetivos para a aprendizagem dos alunos; trabalho preparatório e planejamento de uma aula para uma turma de alunos (a aula de investigação); lecionação desta aula com observação por uma equipe de professores e/ou pesquisadores; e reflexão sobre os aspectos observados pela equipe acerca das aprendizagens dos alunos (Lewis, 2002; Ponte, Quaresma, Mata-Pereira y Baptista, 2016; Richit y Ponte, 2017).

O lesson study surgiu no Japão no início do século XX, constituindo-se em um dos principais dispositivos de formação docente (Stigler y Hiebert, 2016; Richit y Tomkelski, 2020) e como uma forma de preparar os professores para melhorarem suas práticas (Isoda, 2007; Neves, Fiorentini y Silva, 2022). Essa abordagem tem interessado pesquisadores em vários domínios do conhecimento, os quais têm se dedicado a examiná-la, buscando explicitar suas possibilidades e contribuições para as aprendizagens e o desenvolvimento do professor, assim como para as aprendizagens dos alunos (Baldin y Felix, 2011; Isoda y Olfos, 2020; Richit, Ponte y Tomasi, 2021).

O lesson study envolve questões relacionadas aos objetivos de aprendizagem dos alunos e estratégias para os alcançar, assim como a definição da questão central da aula (Takahashi y McDougal, 2014), a concretização da aula de investigação (Fernandez, 2002) e a reflexão que segue esta aula (Richit, Hurtado y Silva, 2022). Uma importante etapa da aula de investigação é a discussão coletiva das resoluções da tarefa (Ponte et al., 2016; Richit, 2020), mediante a qual as ideias, conjecturas, conclusões e generalizações são debatidas (Canavarro, 2011) e as conclusões sistematizadas.

Relativamente ao ensino universitário do Cálculo, Alvarenga, Dorr e Vieira (2016) destacam que os conteúdos circunscritos por essa componente curricular, especialmente as funções, derivadas e integrais, constituem-se em ferramentas matemáticas essenciais para a análise de fenômenos da Física, Biologia, Economia, Matemática, Engenharias.

Diante das discussões sobre a necessidade de superar o ensino apoiado em técnicas convencionais de comunicação oral, predominante na Indonésia, Lasut (2013) investigou, a partir de um lesson study, os problemas de aprendizagem em Cálculo de estudantes do curso de

Matemática da Universidade do Estado de Manado. Como resultado aponta que o lesson study contribuiu para a aprendizagem de Cálculo, constituindo-se em uma alternativa para superar as práticas de ensino menos eficazes, promovendo mudanças no ensino (Lasut, 2013).

Na Universidade de Wisconsin, EUA, Becker et al. (2008) analisaram a dinamização de um lesson study em Cálculo, com foco no Teorema de Rolle e no Teorema do Valor Médio. Os autores descrevem o processo de lesson study, a aula de investigação, as observações da primeira rodada de ensino e possíveis revisões para a aula. Concluem que essa abordagem oferece oportunidade para os estudantes aprofundarem conceitos de Cálculo mediante situações de aprendizagem específicas.

Considerando as dificuldades dos estudantes universitários em compreender o conceito de integral, especialmente integral indefinida, Fajar et al. (2017) investigaram a aprendizagem de estudantes de um curso de Matemática de uma universidade indonésia. Concluíram que o lesson study oportunizou aos acadêmicos estudarem a Soma de Riemann, explorando-a a partir da abordagem geométrica, algébrica, tabular e gráfica (usando o Wolfram Mathworld). A abordagem concretizada representou uma mudança no ensino na medida em que a aula expositiva deu lugar para a abordagem orientada para a aprendizagem ativa dos estudantes. Porém, ressaltam que são necessários esforços para o desenvolvimento de métodos adequados às demandas dos alunos e às especificidades do curso (Fajar et al., 2017).

Portanto, a aprendizagem matemática precisa oportunizar aos estudantes trabalhar com tarefas relacionadas a contextos diversos – realísticos, de semi-realidade e matemáticos – a partir das quais eles têm a possibilidade de mobilizar e articular suas experiências em contextos da realidade e também experiências matemáticas prévias (Ponte y Quaresma, 2012). Nesta perspectiva, consideramos que o lesson study pode favorecer mudanças no ensino de Cálculo porque possibilita a preparação de tarefas instigantes, desafiadoras e próximas das vivências cotidianas dos estudantes.

2. Metodologia

Natureza e objetivo. A investigação, qualitativa e interpretativa (Erickson, 1986), dedica-se a investigar o modo pelo qual o contexto da tarefa pode influenciar a interpretação e abordagem do objeto matemático (Máximos e Mínimos) estudado em um lesson study. Examinamos uma tarefa específica, cuidadosamente elaborada para promover a investigação, a

discussão entre pares e a explicitação das estratégias matemáticas mobilizadas pelos estudantes para resolvê-la.

Participantes. A investigação foi conduzida em um lesson study que envolveu oito professores universitários (Alice, Amy, Catarina, Christopher, Esther, Estrela, Michel, Tatiana – nomes fictícios), docentes em universidades da região Sul do Brasil. Todos os professores possuem mais de dez anos de docência. A aula de investigação envolveu estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática.

Contexto. O lesson study, estruturado em doze encontros semanais de duas horas, dedicou-se ao aprofundamento de ‘Máximos e Mínimos’, um tópico de Cálculo. A aula de investigação foi realizada em uma turma de Cálculo, constituída de quinze estudantes, do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Catarinense (IFC), Concórdia. A aula de investigação, realizada e gravada em sala virtual Google Meet, foi voluntariamente lecionada por Amy e observada pelos demais participantes do lesson study. Após a introdução da tarefa, os estudantes foram encaminhados para subsalas virtuais que foram gravadas para subsidiar a reflexão. Cada sala foi observada, virtualmente, por dois participantes do lesson study (um com experiência em Educação Matemática e outro em Cálculo). Após o trabalho autônomo nas subsalas, os estudantes retornaram à sala virtual principal e Amy promoveu a discussão coletiva, auxiliada por Michel, concretizando a docência compartilhada (Richit, Ponte y Tomkelski, 2019).

Material empírico e aspectos éticos. O material empírico constitui-se das notas de campo dos pesquisadores e das transcrições das gravações das sessões. A investigação está em consonância com os critérios éticos de pesquisa, tendo sido aprovada em Comitê de Ética em Pesquisa (Parecer nº. 4.764.981, em 10 de junho de 2021).

Análise. A análise, qualitativa e interpretativa (Erickson, 1986), estabeleceu como unidades de referência os trechos do material empírico que indicavam influências do contexto da tarefa na interpretação do tópico ‘Máximos e Mínimos’. A partir das unidades de referência definimos as categorias de análise: interpretação da tarefa, mobilização de conceitos e representações e formulação de conclusões.

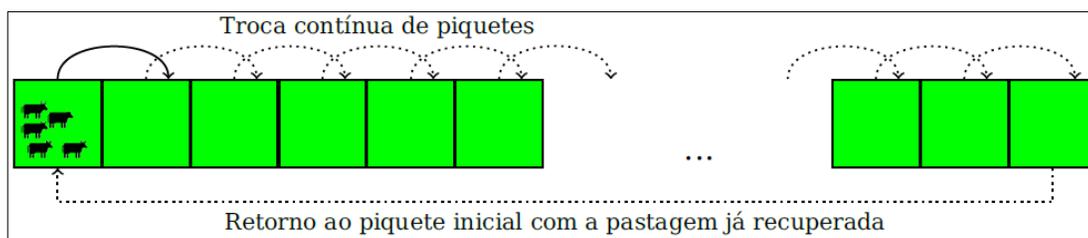
3. Dinamização do Lesson Study: aspectos balizadores e decisões

3.1. Delimitação do Contexto da Tarefa.

A escolha do contexto da tarefa caracterizou um processo cuidadosamente negociado e fundamentado, de modo que além dos interesses e dificuldades dos estudantes, considerou as características socioeconômicas da região. Ao citar as frequentes dificuldades dos estudantes no estudo de derivadas, Christopher e Michel destacaram que a resolução de problemas práticos é uma dificuldade recorrente nas disciplinas de Cálculo. Catarina corroborou esse aspecto e destacou que, contrapondo as abordagens algoritmizadas, “a resolução de problemas relacionados a temas cotidianos oportuniza aos estudantes compreenderem conceitos, explorarem processos de resolução diferentes e confrontá-los” (Notas de campo, junho de 2021).

Assim, para o 4º encontro do lesson study, dedicado à revisão do tópico, os professores Christopher e Michel prepararam e desenvolveram problemas relacionados às derivadas e aplicações. Mediante a discussão sobre as resoluções e do potencial das atividades para abordar tópicos de Cálculo, emergiram possibilidades de atividades e, subjacente a elas, contextos que poderiam embasar a tarefa, potencializar a comunicação das ideias matemáticas e favorecer a discussão coletiva (momento final da aula de investigação). A primeira atividade, compartilhada por Christopher, referia-se à minimização de material (arame) para cercar uma região retangular. A segunda atividade, elaborada por um participante, referia-se a um problema agrícola relativo à maximização da produção de cultivares. Assim, definiram que o contexto da tarefa envolveria a realidade estudantes, culminando no tema pastejo rotacionado de gado de leite. Desse modo, a segunda proposta foi adaptada a uma tarefa relacionada à minimização do comprimento do fio elétrico para a construção de um circuito de piquetes para pastejo de gado de leite (Figura 1).

Figura 1 - Ilustração para um sistema de pastejo rotacionado de gado de leite



Fonte: Os autores.

A relevância do contexto que embasou a tarefa foi destacada por uma estudante ao informar que “a maior bacia leiteira de Santa Catarina se concentra aqui no oeste e o nosso

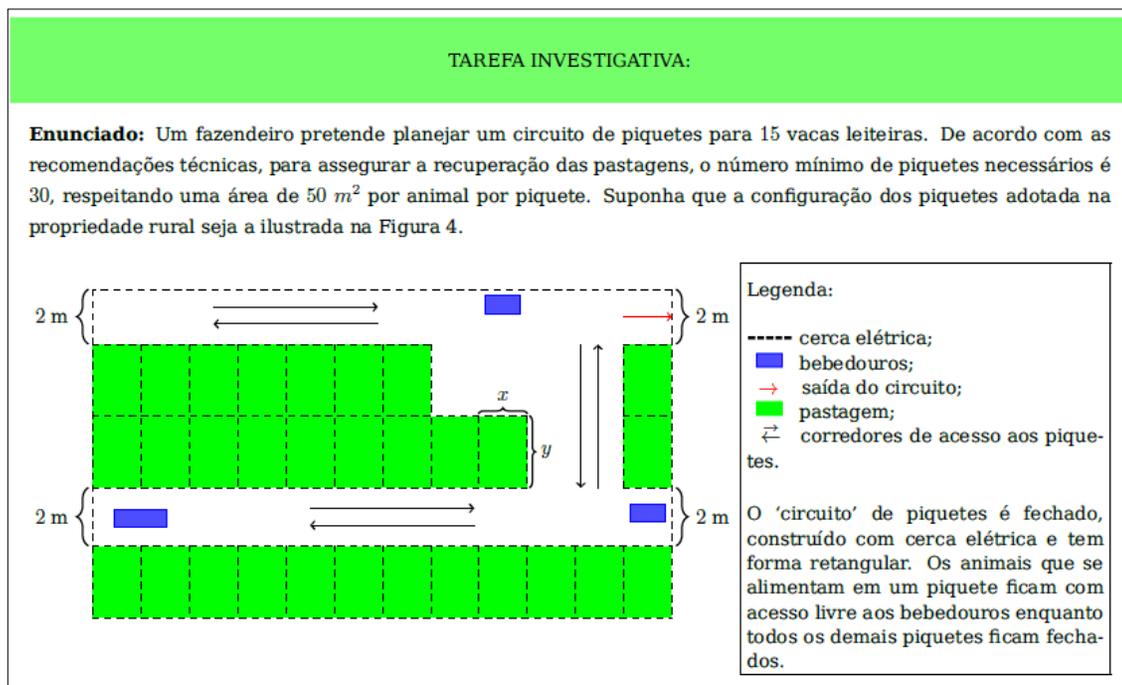
município (Concórdia- SC) é o primeiro em produção, a que gera mais leite ao estado” (Celine, aula de investigação, Julho de 2021).

3.2. A Tarefa Elaborada

Baseado no contexto ‘pastejo rotacionado de gado de leite’, o grupo trabalhou na elaboração de uma tarefa para abordar Máximos e Mínimos e a testou. Após a primeira testagem pela equipe de professores, a tarefa foi aprimorada e voluntariamente resolvida por dois estudantes universitários de outras instituições como pré-teste (Alvine et al., 2007). O pré-teste forneceu subsídios para a versão final da tarefa.

A tarefa, em sua versão final, foi estruturada em duas partes. A primeira consistia na apresentação do contexto da tarefa (enunciado), conforme figura a seguir, e a segunda apresentava as questões a serem resolvidas pelos estudantes (Apêndice 1).

Figura 2 – Enunciado da tarefa.



Fonte: Richit et al. (2021).

3.3. A Aula de Investigação

A aula foi organizada em quatro momentos: discussão sobre o contexto da tarefa; trabalho autônomo sobre a tarefa (discussão e resolução da tarefa nos subgrupos); discussão das resoluções (discussão coletiva); sistematização das aprendizagens (Canavarro, 2011; Richit, Tomkelski y Richit, 2021). Para o trabalho autônomo foram criadas quatro salas virtuais: Subsala Gauss; Subsala Cauchy; Subsala Riemann; Subsala Fermat. Os estudantes poderiam acessar qualquer uma das salas, porém, para evitar que algumas salas tivessem mais estudantes do que outras, definiu-se que o número máximo de integrantes seria cinco por grupo.

Problematização inicial sobre o Contexto da Tarefa. Na primeira parte da aula, realizada na sala principal, Amy promoveu uma discussão sobre o contexto da tarefa, abordando as variáveis envolvidas na composição de pastagens e piqueteamento para o pastejo rotacionado de gado de leite, assim como das normas técnicas que orientam essa atividade socioeconômica. Amy questionou os estudantes sobre o planejamento de piquetes para pastejo, visando à mobilização de conhecimentos relativos à Matemática e ao contexto da tarefa. Os estudantes contribuíram a partir das vivências pessoais, alguns pelo contexto familiar e outros pela formação escolar prévia (ensino médio técnico em agropecuária).

Dependendo do lugar onde você vai fazer o piquete, a própria formação do solo [relevo] vai interferir. Um piqueteamento em um morro, em que o terreno é ondulado, por mais que você queira tentar [fazê-lo] regular ele vai acabar saindo irregular. Você tem que trabalhar de uma maneira que fique uma área semelhante em todos os piquetes para você estar trabalhando com a mesma área de pastagem. [O tamanho dos piquetes] depende da quantidade de vacas que [serão manejadas], até a distância [percorrida pela] vaca até o piquete vai interferir na produção [de leite]. É bastante coisa para manter uma dieta balanceada para o gado de leite. Você precisa analisar a silagem, o pasto, analisar as vacas com uma equipe profissional e aí a gente faz uma dieta com proteína, ureia, sal, etc. [...]. Além disso, eles também recomendam que a vaca não deve estar muito gorda, considerar a distância que a vaca caminha até o pasto, a quantidade de água [que ela deve beber, etc.]” (Carla).

[Também se recomenda] que tenha um bom sombreamento no piquete, mas a água é melhor deixar no sol, porque a vaca não gosta de tomar água muito gelada, ela prefere a água um pouco mais quentinha (Camila).

Para uma vaca produzir um litro de leite, ela precisa ingerir em média de 6 a 10 litros de água [diariamente] (Theo).

Os estudantes também destacaram aspectos relacionados à pastagem, à água e aos materiais utilizados na construção dos piquetes.

[Para planejar os piquetes é importante observar] A quantidade de vacas e como está o pasto. Por exemplo, eu vou trabalhar com um tipo de pastagem de inverno ou da estação em que estamos [então tenho de analisar a] disponibilidade de água e como que você vai fazer para levar a água até aquele piquete. [...] Os materiais [usados] são: palanquinhos [de madeira para a cerca],

pio, aparelho de choque, roldana, o tempo que a pessoa gasta para ir lá e fazer o piquete, martelo, prego, marreta, a própria semente do pasto você poderia estar considerando, o adubo que você aplicou (**Carla**).

No manejo da pastagem [é importante permitir] a recuperação constante do capim por unidade de área, conservar a qualidade do solo, prover ao animal alimentação de qualidade e quantidade e evitar a degradação do pasto, não deixar o bovino de leite ou de corte pisotear muito ali no pasto e acabar prejudicando [o pasto...] (**Celine**).

É importante conhecer o tipo de material empregado (referindo-se as sementes da pastagem de azevém) se for um material novo saber se o material é diplóide, tetraplóide que seriam questões específicas da pastagem mesmo (característica morfogênética de cultivares de azevém muito empregados na região sul do Brasil) [...]. Normalmente o produtor já sabe, ele conhece a marca da semente, então ele já sabe que aquele material vai precisar de 20 dias, de 14 dias para crescimento, mas se não, é importante quando ele for comprar ele pedir quanto tempo (para crescimento) e que tipo de material é esse (**Theo**).

Aqui em casa nós medimos a distância entre os palanques para garantir espaço de passagem do trator para aplicação de adubo (**Celine**).

A discussão sobre o contexto propiciou a abordagem aprofundada e fundamentada sobre produção de leite e as normas técnicas relativas ao pastejo rotacionado de gado leiteiro mobilizou distintos conhecimentos da Matemática, tais como noções geométricas, algébricas e aritméticas. O contexto oportunizou a interpretação diferenciada da tarefa, bem como forneceu subsídios para a validação das respostas. Esse aspecto sinaliza que a abordagem de tópicos curriculares de Cálculo envolvendo o contexto dos estudantes tem potencial para mobilizar conhecimentos distintos, para além dos conceitos e operações matemáticas, contribuindo para o aprofundamento desses conhecimentos.

Trabalho Autônomo sobre a Tarefa. Ao acessar as subsalas, os estudantes receberam a tarefa. O trabalho nos grupos foi auxiliado por Amy, que visitava as subsalas para orientá-los.

Subsala Gauss. Vítor, Alan, Carla e Celine constituíram o grupo, que foi observado por Michel e Tatiana. A discussão em torno da tarefa lhes oportunizou mobilizar conhecimentos no domínio do Cálculo, da Geometria e sobre o pastejo rotacionado de gado leiteiro, culminando em uma interpretação contextualizada da tarefa. Por exemplo, na questão 1 (A área que cada piquete deve possuir nas condições dadas no enunciado) compreenderam que a “área do piquete é dada pelo número de vacas vezes a razão da área estabelecida para cada vaca” (Alan). Assim, multiplicaram o número de vacas manejadas pela área destinada para cada vaca no piquete ($15 \times 50 = 750 \text{ m}^2$), indicando a área mínima para cada piquete.

Além disso, mostraram-se familiarizados com a notação matemática das questões e a escrita algébrica das relações solicitadas. Por exemplo, para a questão 2 (Uma expressão que permite calcular o comprimento de fio necessário para cercar um piquete de medidas arbitrárias x e y) imediatamente escreveram a expressão $2x+2y$.

Para a questão 3 (Uma expressão que permite calcular o comprimento total de fio, em metros, necessário em função das medidas arbitrárias de cada piquete, para todo circuito), o grupo considerou que a medida solicitada deveria corresponder ao perímetro externo do circuito. A análise das resoluções aponta que o fato da tarefa mencionar que os piquetes eram retangulares e que o circuito completo também era retangular os levou a pensarem que se requeria avaliar apenas o contorno externo, para o qual escreveram a expressão para o comprimento total de fio ' $Pt = 2(12x)+2(4+3y) = 24x+6y+8$ m'. Na questão 4 (Uma expressão que permite determinar a área de apenas um piquete em função dos lados x e y) responderam $A = xy$.

Na questão 5 (O comprimento total de fio da questão 3 em função dos lados x ou y do piquete, mantendo a área estipulada na questão 1) os estudantes mobilizaram a relação $xy = 750$ para escrever x em função de y e, dessa forma, obter a função solicitada. A partir da relação $x = 750/y$ obtiveram a função ' $Pt = 2 \times 12(750/y) + 2(4 + 3y) = 24(750/y) + 6y + 8 = 18000/y + 6y + 8$ ', que correspondia ao solicitado na questão ('em função de um dos lados x ou y do piquete').

Na questão 6 os estudantes buscaram aplicar derivadas para resolvê-la, aspecto que sinaliza que o contexto da tarefa mobilizou experiências matemáticas prévias no Curso. Ao lerem a questão concluíram, imediatamente, que deveriam recorrer às ferramentas do Cálculo, afirmando: "Ah, é agora que a gente vai usar a derivada para resolver a questão" (Alan). Primeiramente, os estudantes recordaram que o perímetro de um retângulo é menor quando as medidas dos lados x e y são iguais, isto é, $x = y$. Assim, conjecturaram que a medida ideal dos lados dos piquetes poderia ser obtida pela expressão da área, assim representada: $x^2 = 750$, concluindo que $x = 27,7$ m correspondia à medida ideal para o lado do piquete. A seguir avaliaram o limite da função $xy = 750$ quando x tende a $27,7$ (aproximadamente) na intenção de resolver a tarefa a partir de conceitos estudados no Cálculo.

Subsala Cauchy. O grupo (Emily, Kate, Laila e Theo) foi observado por Catarina e Estrela. Inicialmente, discutiram o contexto da tarefa. Após lerem o enunciado, debruçaram-se na resolução das questões, obtendo 750 m² para questão 1. Na questão 2 exploraram

representações algébricas e formas de registrá-las, baseando-se em elementos extraídos do enunciado: ‘uma expressão’, ‘em função de’, ‘valores arbitrários’. Além disso, validaram o raciocínio anterior adotando valores numéricos para as duas medidas arbitrárias x e y ($x = 20$ m e $y = 37,5$ m), tais que o produto resultasse em 750 m², conforme solicitava a questão 1, embora não houvesse menção de restrição para área.

Na questão 3 consideraram multiplicar a medida do perímetro (obtida na questão 2) pelo número de piquetes indicado no enunciado (30). Um integrante argumentou: “Mas, se um piquete vai estar do lado do outro, ele não vai usar o mesmo fio?” [...]. “É isso? E naquele modelo [na figura da tarefa] tem 30 piquetes [porque alguns lados são comuns]” (Theo). Concluíram que a discrepância nos resultados decorria do fato de que alguns lados eram compartilhados entre piquetes. Essa conclusão foi corroborada por uma estudante ao contar novamente os piquetes e concluir: “É, tem 30 piquetes aqui” (Kate). Ao contabilizarem a quantidade de medidas x e y do circuito concluíram que o comprimento total de fio era dado por ‘ $35y+52x+8$ ’. Após retomarem a legenda da figura, identificando o equívoco em relação à quantidade de lados a serem considerados na contagem, formularam a expressão: $64x+35y+8$.

Na questão 4 escreveram $xy=750$. Na questão 5 consideraram calcular numericamente a quantidade total de fio para construir os piquetes a partir do total de medidas x e o total de medidas y separadamente. Na questão 6 tentaram encontrar expressões algébricas, embora deveriam determinar os valores numéricos de x e y que minimizassem a função obtida na questão 5.

Subsala Riemann. Ayla, Edu, Lia e Paola constituíram o grupo, que foi observado por Esther (um dos observadores ausentou-se). Os estudantes conversaram sobre o tema da tarefa e, após a leitura do enunciado, colocaram-se à responder as questões. Ao discutirem a questão 1, supuseram que além de “multiplicar ($15 \times 50 = 750$) deveriam dividir por 30 piquetes, obtendo o valor de 25 m² por piquete” (Lia).

Embora apresentassem dificuldade em explicar algumas resoluções, observamos que a estrutura e a sequência das questões os levaram a perceber erros cometidos em questões anteriores, tanto em relação ao contexto da tarefa como aos aspectos matemáticos. Por exemplo, após resolverem a questão 4 (Uma expressão que permite determinar a área de apenas um piquete em função dos lados x e y), que requeria a área, perceberam que haviam se equivocado na questão 2, para a qual haviam respondido $xy = 25$, corrigindo-a para $2x+2y$. Na questão 5

consideraram que era solicitado igualar à expressão da questão 3 (comprimento total de fio) à 750 m^2 , isolando uma das variáveis (y), para atender a indicação ‘em função de um dos lados x ou y do piquete’. O grupo não resolveu a questão 6 por ter acabado o tempo de trabalho autônomo sobre a tarefa.

Subsala Fermat. O grupo, observado por Alice e Natan, foi composto por Joe, Mary e Nick. Inicialmente os estudantes interpretaram as informações disponibilizadas no enunciado da tarefa. Nick, a partir da vivência familiar em pastejo rotacionado de gado de leite, explicou que “os animais ficam juntos no mesmo piquete e somente depois são alocados em outro piquete” (Nick). Essa observação ajudou-os a compreenderem a dinâmica do circuito e, assim, validarem o cálculo da área do piquete pela expressão $15 \times 50 = 750 \text{ m}^2$.

Para responder a questão 2 entenderam que era necessário considerar as medidas dos piquetes que restringiam a área a 750 m^2 . Embora inicialmente Nick argumentou que era necessário determinar “o comprimento do fio, que seria o perímetro do retângulo”, o grupo decidiu considerar o piquete retangular com dimensões 15×50 metros. A partir dessa hipótese Mary tentou construir um retângulo de medidas 5×10 metros para cada vaca e criar uma configuração de 15 deles (para as 15 vacas) com objetivo de determinar as dimensões numéricas do piquete. Nick argumentou: “Eu acho que seria semelhante ao resultado da área total [...] e as vacas podem estar espalhadas, então tu não precisa que cada vaca tenha uma região retangular exclusiva [em cada piquete. Elas podem ficar juntas em um piquete maior]”. Porém, retomaram a ideia de construir piquetes retangulares com dimensões 15×50 metros e Nick, mesmo que as tenha sugerido, comentou:

[...] fecharia a medida [da área] para o piquete, mas não sei se [faz sentido na] prática. Se [o piquete for um retângulo] muito estreito, [as vacas] vão ter que passar pela pastagem boa para se espalharem nessa pastagem e conseguirem se alimentar. Elas vão acabar pisando [na] pastagem, estragando boa parte dela. [...] Eu [acho que] seria melhor se [o formato de cada piquete] fosse quase um quadrado (**Nick**).

Então, Nick sugeriu $x = 25 \text{ m}$ como medida de um dos lados e obteve $y = 30 \text{ m}$ a partir da área 750 m^2 . Mediante essa sugestão e depois de calcular o perímetro para essas medidas, concluíram que com essas medidas “Economizaria fio. Olha, já podemos até dar ideia para pessoa que cria esse gado. Vai até economizar” (Mary).

Na questão 3 sugeriam multiplicar o perímetro obtido para questão anterior por 30. Mas, ao analisar a figura da tarefa comentaram: “vai ter piquete que vai dividir lado/cerca com outro piquete” (Mary) e “Isso é o mesmo que uma parede na tua casa, tu tem um cômodo e tu tens a

parede no cômodo, só que você tem outro cômodo que usa a mesma parede” (Nick). Assim, decidiram fazer a contagem de todas as medidas x e y , subdividindo o circuito em trechos (fileira de piquetes inferior, piquetes na lateral direita e a dupla fileira de piquetes adjacentes no interior do circuito). Ao final, obtiveram a expressão $52x + 35y + 8$, calculando a partir dela o valor numérico com as medidas $x = 25$ m e $y = 30$ m, totalizando 2358 m de fio.

Na questão 4 escreveram $xy = 750$. Na questão 5 concluíram que precisavam escrever uma expressão para estimar o total de medidas x e uma expressão para o total de y , igualando-as ao total numérico de x e y conforme as dimensões sugeridas ($x = 25$ m e $y = 30$ m).

Na questão 6 retomaram a discussão da questão 2, ressaltando as medidas que minimizam o perímetro do piquete. Embora não tenham discutido amplamente esse aspecto devido ao tempo do trabalho em grupo ter se esgotado, essa consideração pareceu estar baseada na hipótese de que minimizando o perímetro de um piquete, minimiza-se, por extensão, o total de fio do circuito. Ao final ponderaram que $x = 25$ m e $y = 30$ m era a melhor hipótese testada para a questão 6.

Discussão Coletiva. Após retornarem para a sala principal, foi realizada a discussão coletiva. Cada grupo compartilhava a tela com as resoluções e os colegas comentavam, destacando diferenças de interpretação, estratégias e conclusões. Os estudantes puderam confrontar formas de interpretar a tarefa, estratégias de representação e resolução de cada questão, bem como erros na manipulação dos objetos matemáticos mobilizados no processo.

Relativamente à primeira questão, embora algumas dificuldades de interpretação tenham sido observadas no trabalho autônomo, na apresentação os grupos apenas relataram que a resposta foi obtida pela multiplicação 15×50 . Na questão 2, o grupo Cauchy adotou valores para x e y , chegando a uma resposta numérica. Quando Amy questionou as respostas distintas, o grupo Gauss explicou que “O nosso grupo fez só $2x + 2y$. A gente usou só a medida x e y ” (Alan). Amy questionou-os sobre esse resultado e responderam: “Porque ele estava falando de modo arbitrário, aí a gente achou que era para utilizar só as medidas abstratas” (Alan).

A questão 3 suscitou a revisão das interpretações realizadas pelos grupos em face das respostas obtidas. Em especial, esteve associada à divergência entre a resposta do Grupo Gauss, que considerou apenas o contorno externo do circuito de piquetes para obter a expressão solicitada, e as respostas dos demais grupos. Nesse momento, os estudantes dialogaram até chegarem a uma compreensão partilhada de que a questão proposta se referia ao total de fio – o

que incluía o cercado externo e todos os cercados dos piquetes internos. A partir da discussão coletiva dessa questão os grupos concluíram, coletivamente, que a expressão correta era $64x+35y+8$.

Para a questão 4 foram identificadas duas resoluções diferentes. O grupo Gauss definiu a expressão $A = xy$, enquanto os demais escreveram $xy = 750$. Ao perceber essa diferença, uma integrante do Grupo Riemann comentou: “a gente tinha colocado 750 m^2 no lugar do A, ou seja $xy = 750$ ” (Lia). Na questão 5 o grupo Gauss explicou que “usou aquela fórmula do perímetro da questão 3, [...] Então a gente pode transformar o x em 750 sobre y e a gente colocou na nossa expressão que ficaria assim: $64(750/y) + 35y + 8$ (Alan)”.

Relativamente à questão 6, os grupos comentaram as interpretações realizadas e hipóteses que conseguiram formular. Nenhum grupo finalizou a questão, mas ideias intuitivas do problema foram apresentadas. Theo (Cauchy) compartilhou o esboço da resolução apresentado duas expressões para calcular x e y mínimos para o circuito total, sendo eles $x = 64(750/y)$ e $y = 750(35/x)$ em analogia à questão 5. Nesse caso, os valores adotados na questão 2 para as medidas serviriam para calcular o total numérico de x e y do circuito e deveriam ser o valor de “y” e “x” nos denominadores, justificando que “é tipo uma prova real” (Theo). Após a apresentação de Theo e as inferências de Amy sobre a possibilidade de existência de medidas mínimas, Alan acrescentou:

Eu quero é botar ponto de discussão porque a gente não conseguiu chegar exatamente numa expressão. [...] a gente tem que cada piquete tem uma área de 750 m^2 . [...] aí pede qual que seria a medida para o menor [comprimento total de fio] possível [...] aí a gente foi seguindo nessa linha de raciocínio e também usando a raiz quadrada de 750 para ver quais seriam os menores valores que a gente poderia alcançar das laterais x e y de forma que o perímetro total fosse o menor possível. Aí a gente tem inicialmente que a raiz quadrada de 750 seria $27,386$ etc., etc., etc. E a gente tem também que 25 m vezes 30 m (a melhor hipótese que eles testaram) é igual a 750 . E o $27,386$..., que é a raiz quadrada, se estabelece entre o 25 e o 30 (Alan).

Entusiasmado com as justificações dos colegas, Nick (Fermat), acrescentou as hipóteses que formularam:

Eu acho que vou seguir a mesma linha de raciocínio do Alan [...] A gente estava fazendo a 2, aí eu pensei em usar na base 15 m e na altura 50 m e a gente tinha calculado [o perímetro] e dado 130 m . Aí deu 110 m utilizando 25 m e 30 m . Assim, eu vi que quando x e y se aproximavam, vai ser menor o comprimento do fio (do piquete), então x e y teriam que estar bem próximos para que eu consiga um gasto de fio menor (Nick).

Essa estratégia foi considerada na questão 2 quando adotaram medidas numéricas $x = 25$ m e $y = 30$ m e, como consequência, na questão 6, supuseram que ao minimizar o perímetro do piquete, por extensão, minimizariam o comprimento total de fio do circuito de piquetes.

Assim, compreendemos que o contexto que embasou a tarefa, por abordar uma situação próxima da realidade dos estudantes, oportunizou aos grupos uma experiência de aprendizagem reflexiva e dialogada, mediante a qual negociaram interpretações do enunciado, definiram estratégias de resolução e formularam coletivamente conclusões. O contexto constituiu-se em ponto de partida para o trabalho dos grupos em torno de uma tarefa instigante, que os levou a realizarem aprendizagens para além do domínio da Matemática, mas relacionando-a.

4. Resultados e Discussão

Interpretação da tarefa. O tema pastejo rotacionado de gado de leite oportunizou aos estudantes explorarem o tópico Máximos e Mínimos em uma perspectiva em que a familiaridade com essa atividade socioeconômica favoreceu uma interpretação orgânica da tarefa. Ao resolverem a tarefa, os estudantes estavam atentos aos diversos aspectos matemáticos (Ponte y Quaresma, 2012; Canavarro, 2011; Richit, Tomkelski y Richit, 2021) relativos ao pastejo rotacionado de gado de leite, os quais poderiam influenciar a minimização do comprimento de fio do circuito de piquetes. Os conhecimentos prévios dos estudantes sobre essa atividade subsidiaram a interpretação da tarefa, propiciaram insights sobre a coerência das resoluções em face ao desafio proposto e embasaram a formulação de hipóteses e justificativas para as respostas.

A dinâmica da aula de investigação, organizada em quatro momentos, promoveu a interação entre pares (Canavarro, 2011; Ponte et al., 2016; Richit y Tomkelski, 2020) e favoreceu a discussão e a articulação de formas de interpretação da tarefa na busca por uma interpretação consensuada. A interpretação negociada no grupo permitiu-os definir e operacionalizar as variáveis envolvidas na tarefa, mobilizando conceitos e representações já adquiridos que os oportunizaram desenvolver novos conceitos (Lewis et al., 2012). Os estudantes analisavam as representações considerando o contexto, buscando padrões de correlação geométrica, que lhes forneceram recursos de interpretação e os permitiram conectar conceitos e significados (Tallman et al., 2021).

O contexto da tarefa constituiu-se em catalisador das vivências e conhecimentos dos estudantes, fomentando a participação, a discussão de argumentos para as conclusões, mesmo para aqueles que habitualmente não se sentem encorajados a interagir nas aulas de Cálculo, conforme mencionou Amy na reflexão sobre a aula. Favoreceu, portanto, a abordagem de ‘Máximos e Mínimos’, promovendo o envolvimento dos estudantes mediante um contexto de investigação favorável (Mariano et al., 2021) ao aprofundamento de conhecimentos, contribuindo para a aprendizagem nessa componente curricular (Becker et al., 2008; Fajar et al., 2017; Lasut, 2013).

A **mobilização de conceitos e representações** foi potencializada pelo contexto da tarefa nas quatro etapas da aula de investigação (Richit, Tomkelski y Richit, 2021). Mediante o objetivo de oportunizar aos estudantes um contexto de aprendizagem concreto, informações complementares e normas técnicas relacionadas à tarefa, assim como os termos relativos ao manejo de gado de leite (Junior et al., 2003) foram acuradamente fundamentados e instigantes para a abordagem de Máximos e Mínimos.

A tarefa, cuidadosamente desenhada para tratar uma questão de aprendizagem específica (Lewis et al., 2012) e promover a aprendizagem matemática (Ponte et al., 2016; Lasut, 2013) a partir de um contexto familiar aos estudantes e questões correlacionadas, visava conduzi-los à construção do objeto matemático (função a ser minimizada) de forma articulada e contextualizada. E a forma como articularam as informações relacionadas à tarefa e como desenvolveram as resoluções desvelam as distintas estratégias e representações mobilizadas no diálogo de interpretação-argumentação-contextualização.

A tarefa oportunizou aos estudantes mobilizarem e aprofundarem aspectos relativos à linguagem e notação matemática, assim como a escrita algébrica das relações solicitadas nas questões. Esse aspecto sinaliza que o lesson study favorece a abordagem de conceitos de Cálculo (Becker et al., 2008; Lasut, 2013) a partir da mobilização de recursos geométricos, algébricos, tabulares (Fajar et al., 2017) e aritméticos, assim como da manipulação de símbolos e significados que constituem esse curso (Alvine et al., 2007) devido, especialmente, ao contexto que embasou a tarefa.

Formulação de conclusões. O contexto da tarefa favoreceu a validação das resoluções e forneceu subsídios que os possibilitaram atribuir sentido às resoluções. Ao negociarem a interpretação da tarefa, os estudantes refletiam sobre a coerência das formas de interpretá-la e

das hipóteses formuladas para resolvê-la. A cada argumento e a cada nova hipótese, novos aspectos eram acrescentados às justificativas e argumentos, enriquecendo e aprofundando as conclusões.

A observação do trabalho nos grupos evidenciou que os estudantes discutem não apenas estratégias de resolução: eles negociam significados, produzem mais do que registram (Becker et al., 2008) e formulam mais conclusões do que aquelas que sistematizam nas fichas de trabalho. Ou seja, a observação do trabalho autônomo por dois professores (Matemática e Educação Matemática) e o acesso às fichas de trabalho dos estudantes e às gravações das subsalas nos permitiram observar como os estudantes constroem interpretações e formulam suas conclusões. Observamos que os grupos anteciparam aspectos relativos à minimização, design do circuito de piquetes para o manejo dos animais, elaborando inferências a partir das propriedades geométricas do piquete e a coerência dessas hipóteses com a realidade.

A tarefa favoreceu o confronto entre as variações das grandezas envolvidas na tarefa (Fajar et al., 2017) em uma perspectiva relacionada ao contexto da tarefa, assim como as divergências de resultados decorrentes delas. Este processo levou-os a compreenderem a relação entre as grandezas consideradas na tarefa e, especialmente, representarem, com rigor, ideias e modos de resolver ainda que intuitivos a priori (Moreno-Armella, 2021), os quais favoreceram a formulação de conclusões mais elaboradas. Na medida em que os grupos procuraram padrões a partir da figura do circuito de piquetes, como no caso da configuração de retângulos ‘unitários’ para cada animal para a taxa de lotação informada na tarefa, foram oportunizados a examinarem padrões aritméticos (3 dos 4 grupos) e algébricos (grupo Gauss). Esse processo favoreceu a negociação das resoluções e a formulação de conclusões.

A experiência favoreceu o desenvolvimento do conhecimento de Cálculo dos estudantes, contribuindo para a aprendizagem deles nessa componente curricular (Cury, 2004), especialmente por lhes oportunizar atribuírem significado às resoluções. Um exemplo é a correlação entre os valores das dimensões dos piquetes para melhor conservação da pastagem considerando-se a circulação dos animais e que também minimizam o perímetro, levando-os a observarem, mediante a atribuição de significados, que esse retângulo deveria ser mais próximo de um quadrado. Assim, o contexto favoreceu a abordagem de Máximos e Mínimos no lesson study ao potencializar a interpretação da tarefa e das questões que a estruturavam, fortalecendo a associação de conceitos de Cálculo e a mobilização de representações pictórica, aritmética,

geométrica e algébrica do objeto abordado. Estes aspectos evidenciam os contributos do contexto da tarefa, cuidadosamente elaborada para a aprendizagem de estudantes universitários (Alvine, et al., 2007; Becker et al., 2008; Lasut, 2013).

5. Conclusões

A análise da tarefa, concebida como um percurso para a realização de aprendizagens sobre Máximos e Mínimos em Cálculo, evidenciou que o contexto que a embasa pode favorecer a construção de conhecimentos e, portanto, a aprendizagem matemática, por oportunizar a mobilização de conceitos e representações, estimular a busca de relações entre representações e o escrutínio das resoluções em face ao contexto a que se relacionam. O tema da tarefa favoreceu mudanças na dinâmica da aula em Cálculo ao oportunizar aos estudantes compreenderem de maneira contextualizada as variáveis, os conceitos e as operações envolvidas. Além disso, potencializou o envolvimento dos estudantes na aula e favoreceu a investigação do tópico ‘Máximos e Mínimos’ a partir da mobilização das experiências familiares e/ou escolares progressas, favorecendo a compreensão orgânica e contextualizada do objeto matemático. Favoreceu, também, o protagonismo dos estudantes na construção de seus conhecimentos e na condução da aula a partir de discussões baseadas em seu trabalho autônomo nos grupos. Assim, eles dialogaram entre pares, partilhando e resolvendo dúvidas para formularem conclusões, deslocando o processo de ensino de Cálculo centrado no professor para um processo partilhado por estudantes e professor. Por fim, a tarefa constituiu-se como um dispositivo catalisador e revelador do processo matemático desenvolvido pelos estudantes, contribuindo para o trabalho do professor, aspecto esse pouco discutido na literatura.

Referências

- Alvarenga, K. B., Dorr, R. C., & Vieira, V. D. (2016). O ensino e a aprendizagem de cálculo diferencial e integral: características e interseções no centro-oeste brasileiro. *Revista Brasileira de Ensino Superior*, 4(2), 46-57.
- Alvine, A., Judson, T. W., Schein, M., & Yoshida, T. (2007). What graduate students (and the rest of us) can learn from lesson study. *College Teaching*, 55(3), 109-113. <https://doi.org/10.3200/CTCH.55.3.109-113>.

- Becker, J., Ghenciu, P., Horak, M., & Schroeder, H. (2008). A college lesson study in calculus, preliminary report. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(4), 491-503. <https://doi.org/10.1080/00207390701867463>.
- Cajkler, W., Wood, P., Norton, J., Pedder, D., & Xu, H. (2015). Teacher perspectives about lesson study in secondary school departments: a collaborative vehicle for professional learning and practice development. *Research Papers in Education*, 30(2), 192-213.
- Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação Matemática*, Lisboa, 11-17.
- Cury, H. N. (2004). *Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas*. EDIPUCRS.
- Fajar, M. Y., Harahap, E., Sukarsih, I., Rohaeni, O., & Suhaedi, D. (2017). *Implementation of Lesson Study on Integral Calculus Course*, 400-407.
- Hervas, G. (2021). Lesson study as a faculty development initiative in higher education: A systematic review. *AERA*, 7(1), 11-19. <https://doi.org/10.1177/2332858420982564>.
- Huang, R. & Shimizu, Y. (2016). Improving teaching, developing teachers and teacher educators, and linking theory and practice through lesson study in mathematics: an international perspective. *ZDM*, 48(4), 393-409. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0795-7>.
- Junior, M. G. B., Barioni, L. G., Vilela, L., & Barcellos, A. D. O. (2003). Área do piquete e taxa de lotação no pastejo rotacionado. *Embrapa Cerrados-Comunicado Técnico*. 1-8.
- Larios, V., Páez, R. E., & Moreno, H. (2021). Significados sobre la derivada evidenciados por alumnos de carreras de Ingeniería en una universidad mexicana. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, 20, 105-124. <https://doi.org/10.35763/aiem20.4002>.
- Lasut, M. (2013). Effect of implementation lesson study to improve students' learning achievement in Calculus I of mathematics department. *Journal of Education and Practice*, 4(20), 182-188.
- Lewis, C. (2002). *Lesson study: A handbook of teacher-led instructional change*. Philadelphia: Research for Better Schools.
- Mariano, D. L. F. (2021). Lesson Study: A Tool for an Improved Instructional Design in Teaching Integration by Parts. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 12(3), 3862-3869. <https://doi.org/10.17762/turcomat.v12i3.1675>.
- Moreno-Armella, L. (2021). The theory of calculus for calculus teachers. *ZDM*, 53(3), 621-633. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01222-9>.
- Neves, R. S. P., Fiorentini, D., & Silva, J. M. P. (2022). Lesson Study Presencial e o Estágio Curricular Supervisionado em Matemática: Contribuições à aprendizagem docente. *Paradigma (Maracay)*, 43, 409-442.
- Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2016). O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. *Bolema*, 30(56), 868-891.

- Richit, A & Ponte, J. P. (2017). La Colaboración Docente en Estudios de Clase en la Perspectiva de Profesores Participantes. *Paradigma (Maracay)*, 38(1), 330-352.
- Richit, A. (2020). Estudos de aula na perspectiva de professores formadores. *Revista Brasileira de Educação*, 25(2), 1-24. <https://doi.org/10.1590/s1413-24782020250044>
- Richit, A., & Tomkelski, M. L. (2020). Secondary School Mathematics Teachers' Professional Learning in a Lesson Study. *Acta Scientiae*, 22(3), 2-27.
- Richit, A., & Tomkelski, M. L. (2022). Meanings of mathematics teaching forged through reflection in a lesson study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(9), em2151. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12325>
- Richit, A., Hurtado, L. M. F., & Silva, I. B. (2022). Reflexão sobre a Docência em Matemática Mobilizada em Estudos de Aula. *ACTIO – Docência em Ciências*, 7(1), 01-24.
- Richit, A., Ponte, J. P. & Tomkelski, M. L. (2019). Estudos de aula na formação de professores de matemática do ensino médio. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, 100(254), 54-81.
- Richit, A., Ponte, J. P., & Richit, L. A. (2022). Conhecimento profissional de professores universitários em um estudo de aula em Cálculo. *PNA – Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 17(1), 89-116. <https://doi.org/10.30827/pna.v17i1.23931>
- Richit, A., Ponte, J. P., Tomasi, A.P. (2021). Aspects of Professional Collaboration in a Lesson Study. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(2), em0637. <https://doi.org/10.29333/iejme/10904>
- Richit, A., Tomkelski, M. L., & Richit, A. (2021) Compreensões sobre perímetro e área mobilizadas a partir da abordagem exploratória em um estudo de aula. *Acta Scientiae*, 23(5), 2-27.
- Richit, L. A., Richit, A., Richit, A., Teilor, B. A., Pedroso, C. A., Melo, M. V., Agranionih, N. T., Neves, R. B., & Zimer, T. (2021). O problema dos piquetes: material didático desenvolvido em um estudo de aula para investigação do tópico de máximos e mínimos em Cálculo. [The paddock problem: didactic material created in a Lesson Study to investigate the topic of maxima and minima in Calculus.] [Lesson, 2021, July 27]. *Zenodo*. <https://doi.org/10.5281/zenodo.5140590>.
- Tallman, M. A., Reed, Z., Oehrtman, M., & Carlson, M. P. (2021). What meanings are assessed in collegiate calculus in the United States? *ZDM*, 53(3), 577-589. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01212-3>.
- Utamura, G. Z., & Curi, E. (2017). Um mapeamento de trabalhos que utilizam o estudo de aula (lesson study) no Brasil e em Portugal. En FESPM - Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (pp. 11-19). Madrid, España: FESPM.

Apêndice 1

Tarefa criada para aula de investigação por Richit et al. (2021).

TAREFA INVESTIGATIVA:

Enunciado: Um fazendeiro pretende planejar um circuito de piquetes para 15 vacas leiteiras. De acordo com as recomendações técnicas, para assegurar a recuperação das pastagens, o número mínimo de piquetes necessários é 30, respeitando uma área de 50 m^2 por animal por piquete. Suponha que a configuração dos piquetes adotada na propriedade rural seja a ilustrada na Figura 4.

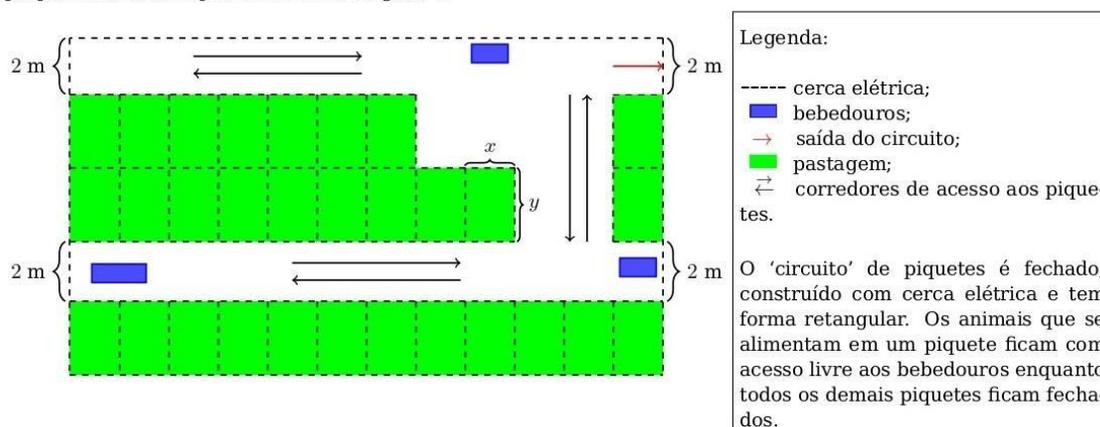


Figura 4: Esquema ilustrando o circuito com 30 piquetes.

Todos os piquetes são iguais e retangulares com medidas x e y em metros. Considere que o circuito de piquetes é construído com fios metálicos presos em palanques de madeira conforme exemplificado na Figura 1. Supondo que o terreno a ser utilizado para a pastagens é totalmente plano, que os piquetes são retangulares e que estejam organizados como mostra a Figura 4, determine:

1. A área que cada piquete deve possuir nas condições dadas pelo enunciado.
2. Uma expressão que permite calcular o comprimento de fio (perímetro) em metros necessário para cercar um piquete retangular de medidas arbitrárias x e y .
3. Uma expressão que permite calcular o comprimento total de fio (em metros) necessário em função das medidas arbitrárias de cada piquete, para todo o circuito apresentado na Figura 4.
4. Uma expressão que permite encontrar a área de apenas um piquete em função dos lados x e y .
5. O comprimento total de fio (item 3) em função de um dos lados x ou y do piquete, mantendo a área estipulada no item 1.
6. Quais as dimensões x e y que minimizam o comprimento total de fio e mantêm a área estipulada no item 1.

Autores

Adriana Richit

Licenciatura em Matemática (URI)
Mestrado em Educação Matemática (UNESP)
Doutorado em Educação Matemática (UNESP)
Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS
Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Tecnologias (GEPEM@T) -
Formação e desenvolvimento profissional de professores
adrianarichit@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-0778-8198>

Luiz Augusto Richit

Graduação em Engenharia Ambiental e Sanitária (UFFS)
Licenciatura em Matemática (UFRGS)
Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Tecnologias (GEPEM@T) -
Ensino e aprendizagem da Matemática
luizaugustorichit@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-3054-4933>

Andriceli Richter

Licenciatura em Matemática (URI)
Mestrado em Educação Matemática (UNESP)
Doutorado em Educação Matemática (UNESP)
Instituto Federal Catarinense - IFC
Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Tecnologias (GEPEM@T) -
Formação e desenvolvimento profissional de professores
andricelirichit@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-1578-2821>

Como citar o artigo:

RICHIT, A., RICHIT, L.A., RICHTER, A. Contributos do contexto da tarefa na abordagem de máximos e mínimos em um *lesson study* em cálculo. **Revista Paradigma**, Vol. XLIV, Edición Temática Estudio de Clases: Contribuciones de la educación japonesa en diferentes países, mayo de 2023 / 318 – 340. DOI: <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p317-339.id1422>

Del Lesson Studies al Lesson Study italiano: un Proceso de Transposición Cultural

Arzarello, Ferdinando

ferdinando.arzarello@unito.it

<https://orcid.org/0000-0002-0913-7500>

Department of Mathematics “G. Peano”; University of Torino; Torino, Italy

Bartolini Bussi, Maria Giuseppina

mariagiuseppina.bartolini@unimore.it

<https://orcid.org/0000-0002-3257-1348>

Department of Educational and Human Science; University of Modena e Reggio Emilia;

Modena, Italy

Funghi, Silvia

silvia.funghi@unito.it

<https://orcid.org/0000-0001-8549-8474>

Department of Mathematics “G. Peano”; University of Torino; Torino, Italy

Manolino, Carola

c.manolino@univda.it

<https://orcid.org/0000-0002-8711-4638>

Department of Social and Human Science; University of Valle d’Aosta; Aosta, Italy

Minisola, Riccardo

riccardo.minisola@unito.it

<https://orcid.org/0000-0002-1105-4843>

Department of Mathematics “G. Peano”; University of Torino; Torino, Italy

Ramploud, Alessandro

alessandro.ramploud@dm.unipi.it

<https://orcid.org/0000-0002-9161-4213>

Department of Mathematics; University of Pisa; Pisa, Italy

Received: 09/02/2023 **Accepted:** 03/03/2023

Resumen

En este artículo trazamos un recorrido que da cuenta del trabajo de Transposición del Lesson Study (LS) de la cultura oriental a la italiana a través de la perspectiva dada por el enfoque de la Transposición Cultural. En ella, el encuentro con una cultura diferente es visto como un medio capaz de suscitar en los docentes nuevas y más profundas reflexiones sobre sus propios hábitos y prácticas educativas. Llamamos al producto de este proceso el “Lesson Study Italiana” (ILS): no está establecido a priori, sino que depende de las solicitudes a los participantes que los investigadores, como formadores de docentes, eligieron implantar en él. En particular, presentamos 4 ejemplos de ILS llevados a cabo en diferentes años escolares (1, 5, 8, 9), para resaltar cómo cada equipo de LS respondió a estas solicitudes a través de sus elecciones de diseño sobre la Clase de Investigación y las reflexiones críticas de los diferentes participantes. En base a esta descripción, en las conclusiones esbozamos algunas características comunes y diferencias entre los ejemplos, con el fin de resaltar reflexiones más generales sobre las posibles formas de implementar LS en culturas distintas de las orientales.

Palabras clave: Lesson Study. Transposición cultural. Italia. China y Japón. Educación matemática.

From Lesson Studies to an Italian Lesson Study: a cultural transposition process

Abstract

In this article we trace a path that reports the work of Transposition of the Lesson Study (LS) from Eastern to Italian culture through the perspective given by the approach of Cultural Transposition. In it, the encounter with a culture different from one's own is seen as a means capable of raising new and deeper reflections by teachers on their own educational habits and practices. We call 'Italian Lesson Study' (ILS) the product of this process: it is not established a priori, but depends on the requests to participants that the researchers, as teacher educators, have chosen to graft into it. In particular, we present 4 examples of ILS realized in different school grades (1,5,8,9), to highlight how each LS team responded to these requests through their design choices concerning the research Lesson and the critical reflections of the different participants. Starting from this description, in the conclusions we outline some common features and differences among the examples in order to highlight more general reflections about the possible ways of implementing LS in cultures different from the Eastern ones.

Keywords: Lesson Study. Cultural Transposition. Italy. China and Japon. Mathematics Education.

Dos Lesson Studies ao Italian Lesson Study: um processo de transposição cultural

Resumo

Neste artigo traçamos um percurso que relata o trabalho de Transposição do Lesson Study (LS) da cultura oriental para a italiana através da perspectiva dada pela abordagem da Transposição Cultural. Nela, o encontro com uma cultura diferente é visto como um meio capaz de suscitar novas e mais profundas reflexões dos professores sobre seus próprios hábitos e práticas educativas. Chamamos de "Italian Lesson Study" (ILS) o produto desse processo: não é estabelecido *a priori*, mas depende das solicitações aos participantes que os pesquisadores, como formadores de professores, escolheram implantar nele. Em particular, apresentamos 4 exemplos de ILS realizados em diferentes anos escolares (1, 5, 8, 9), para destacar como cada equipe de LS respondeu a esses pedidos por meio de suas escolhas de design sobre a Aula de pesquisa e as reflexões críticas dos diferentes participantes. A partir dessa descrição, nas conclusões delineamos algumas características comuns e diferenças entre os exemplos, de forma a destacar reflexões mais gerais sobre as possíveis formas de implementação do LS em culturas diferentes das orientais.

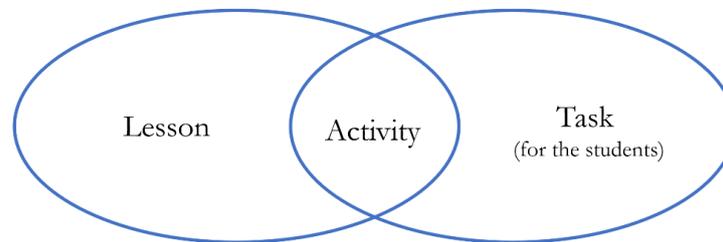
Palavras-chave: Lesson Study. Transposição cultural. Itália. China e Japão. Educação matemática.

The problem of "cultural implicit factors" in the transposition of the Lesson Study

Japanese and Chinese Lesson Study are fundamentally rooted in their culture of origin. In these contexts, the school has very specific structure and habits, often quite different from those of Western school systems. Specifically, as far as Italy is concerned, the main group of its specificities, compared with other countries' ones, particularly with those in Eastern countries, concerns the school organisation, as listed below:

1. The Italian Indicazioni Nazionali (National Guidelines – MIUR, 2012) indicate only long-term objectives (Minisola & Manolino, 2022), hence Italian teachers are not used to plan a lesson of limited time in detail.
2. The structure of the school day varies with the order of the school: a structure segmented into ‘lessons’ of 45-60 minutes dedicated to a single subject, different from the previous and the following lesson, is used in secondary schools, where each discipline or group of similar disciplines (e.g., Art; Mathematics and Physics; Music; History and Philosophy, etc.) is taught by a different teacher, but does not exist in primary school, where generally there is only one generalist teacher or at most two teachers per class. From an institutional point of view, the term ‘lesson hour’ is often accompanied by the locution ‘hourly unit’, ‘hour’, or ‘minimum hourly units’. On the other hand, in the daily life of teachers, this term can have a vaguer meaning, some of which overlaps with that of ‘activity’ (fig. 1).

Figure 1 - Partially overlapping meanings in Italian school terminology



Source: Elaboration by the authors

3. Freedom of teaching is enshrined in the Italian Constitution: each teacher can choose teaching methods and the order of contents to be presented; as well textbooks are chosen by the teacher according to those that (s)he thinks the best for her/his methods.
4. Inclusiveness in school is guaranteed by law: students with difficulties attend only regular schools and lessons, possibly with the help of a dedicated teacher (special schools have been abolished since many decades).
5. Teachers’ background varies: at primary school teachers have a pedagogical background; at secondary school mathematics is taught by teachers who have a master in a STEM discipline.
6. Teachers work mainly alone.
7. Teaching design is lax when not absent.
8. Teachers’ professional development courses are often theoretical and not centred on everyday teaching practices. Although it is sometimes delivered in the form of workshops, teacher education ultimately leaves it up to the teacher to work out how and when to implement teaching proposals in the classroom. Detailed and context-specific planning is always the responsibility of the individual teacher alone.

These features have deeply puzzled the Italian researchers¹⁶ in mathematics education (Mellone et al., 2021) who in their scientific activities have become in contact with the Lesson Study (herein after referred as LS). They seemed to be possible stumbling blocks for a suitable transposition of LS into the Italian schools. In particular, a reflection about this transposition was initiated by the first group of researchers who introduced LS in Italy since 2012, namely the team of M.G. Bartolini Bussi from Reggio Emilia (Bartolini Bussi et al., 2017; Ramploud et al., 2022), to which two other authors of this article belong from the beginning of their Italian LS project. Later, their experience inspired another team of researchers in Turin, three of whom are the other authors of this article (Minisola, 2016; Manolino, 2021). A joint experience so started (Arzarello et al., 2022), which is still continuing and essentially represents the core part of the LS activities in Italy, to which other small groups joined. This paper sketches the main ideas that motivated these experiences featuring, so to say, the Italian LS (ILS henceforth), and illustrates them through some concrete examples of LS experiences in the different school grades, coached by the authors in these last years.

Our approach to LS began participating as observers to public LS realised in Far East countries; starting from our observations, we successively tried to imagine how such a practice could be recontextualized within the Italian school context (see Bartolini Bussi, Sun & Ramploud, 2014; Mellone & Ramploud, 2015; Mellone, Ramploud & Carotenuto, 2021). Our encounter with the “foreign” teaching practice triggered a twofold process.

From the one side, we “recognised” in some components of Eastern LS aspects that were coherent with our experience and to our values as teacher educators: e.g., the need to elicit teachers’ reflective approach to teaching practice; as well what we call ‘didattica laboratoriale’ (laboratory teaching) practice. This practice consists of an elaboration of the notion of laboratory, which goes back to Emma Castelnuovo (2008) and was further developed in a professional development program for teachers, developed from 2001 to 2012 with the support of the Italian Ministry of Education and of the professional association of Italian Mathematicians (UMI). According to it (Arzarello et al., 2012), the mathematics

¹⁶ In this paper we distinguish between researchers in mathematics education, teacher educators and facilitators: the latter are those responsible for coordinating the work of the LA team; of course, a facilitator can be a researcher. We use also the term *didactician* to indicate the researcher as engaged in a professional development course for teachers, (following Jaworski & Potari, 2021). We prefer this term since in Italy, educator [*educatore*] is a professional figure that is different from the teacher, because his/her role is aimed to reduce the gap between students with special needs and the others; an educator [*educatore*] is not a discipline-expert but an expert in taking care of the human relationship with students (see Ramploud et al., 2021). In the following we will use the Italian word when we refer to this specific professional figure, in order to distinguish it from researchers in mathematics education, teacher educators and facilitators.

laboratory is not necessarily a physical place different from the classroom; instead, it is seen as a structured set of activities for the construction of meanings of mathematical objects. According to this view, the mathematics laboratory environment is in some way comparable to that of a Renaissance workshop, where apprentices learned by doing and seeing, communicating with each other and with teachers. With an evocative metaphor we can say that the classroom becomes like a polyphony performance in a concert hall (Bartolini Bussi, 1996), where the students are the musicians, the teacher is the conductor and the materials that are used are the musical instruments. The construction of meanings cannot reside solely in the instrument, nor can it emerge solely from the interaction between student and instrument. Meaning lies in the purposes for which the tool is used, in the plans that are made for using the tool; moreover, the appropriation of meaning also requires individual reflection on the objects of study and the proposed activities.

Another feature of the ‘didattica laboratoriale’, which we found coherent with the Eastern LS, was the fact that in its development teachers had to keep a logbook, where they reported with some detail the design of their activities in the classroom, what had happened during their concrete development with students, and their comments about the problems they had encountered in it. Of course, the logbook is not the same as the documentation in the LS but surely has some affinity with it, so that – we as researchers thought – it could be an aspect of the ‘didattica laboratoriale’ which could improve an easier transposition of the LS into the Italian schools.

From the other side, reasoning by contrast about Eastern LS, we also recognized conflicting aspects with respect to our school culture: e.g., focus on short-term goals, detailed lesson planning, teamwork, teacher education through participation in real lessons. A small survey we developed in 2019 with some teachers confirmed that these can be real discordant features in Italian teachers. The data from this experiment highlighted the aforementioned issue on the meanings of the terms “lesson” and “activity”, suggesting an overlap in the meaning of the two terms (see fig. 1). After this, we organized two surveys with different teachers: one with teachers participating in a professional development project of the Department of Mathematics at the University of Turin (44 responses), and another with mathematics teachers at a technical institute and scientific high school in Turin (27 responses). The answers confirmed that, even for in-service secondary school teachers, the meaning of the term “lesson” is not shared with researchers: the majority of the teachers in fact “quite agree” or “very much agree” with the statement “a lesson can occupy several hours spread over several days” (64%) and “completely disagree” or “quite disagree” with

the statement “a lesson is something that is articulated in the hours I have in a specific class on a specific day” (70%). This cultural fact is something to be considered when transposing Lesson Study in the Italian context (and which may prove problematic in other contexts as well). Especially as, in the Japanese and Chinese Lesson Study, the word “lesson” assumes a very specific connotation, being a well-defined didactic research object, and which is therefore well “circumscribed” in space and time (the ‘research lesson’¹⁷ takes place in a very specific class and time). In the Italian context the “lesson” has no well-defined time boundaries and may last much more than one hour. These conflicting aspects of Eastern LS with respect to our teachers’ habits, from our viewpoint as teacher educators constituted excellent “triggers” for teacher education from a perspective of “empowerment” of teachers’ critical thinking. Indeed, they allowed us to discuss with teachers’ issues concerning the usefulness of a detailed lesson planning, the possible advantages in scaffolding long-term goals into short-term ones, or in increasing the occasions for a collaborative lesson design in their activities. This “empowerment” was important to us as teacher educators in our context, because of teachers’ freedom of teaching established by the Italian Constitution. Some of these aspects had also emerged as needs in previous teachers’ professional learning courses: the teachers themselves, emphasizing the purely theoretical nature of these courses, complained about a lack of reflection on daily teaching practices (as also outlined in the 2018 OECD Teaching and Learning International Survey – OECD, 2020). LS somehow seemed to provide an overall context for working on all these aspects simultaneously. This made LS an extremely interesting teacher education practice for us. However, already from the first experiments, it became evident for us the need to consider LS’s cultural situatedness to redefine its purposes and to discuss a suitable “operating space” to act within the Italian cultural context.

Indeed, reflecting on the potential of LS observed in Far East countries, our idea was not that of comparing different cultures “translating” teaching practices, textbooks, etc. from one culture to another, but that of attempting to highlight differences. In fact, these differences should be those bringing out the possible *unthought* of our own culture – we have to be aware that this process concerns *our* culture, our way of living, our perspectives on the world – prompting us to look at ourselves in a new way. In fact, our work is inspired by the reflection of F. Jullien (2006) who writes that “it is not a matter of comparative philosophy,

¹⁷ From here on, we refer to the lesson co-planned, implemented and discussed by the LS teams within the Lesson Study context as the “research lesson”.

of putting different conceptions in parallel, but of a philosophical dialogue where each thought, in meeting the other, questions its own unthought” (p. 8). Therefore, we gave a particular attention to the peculiar features of Italian school listed above (Bartolini Bussi & Martignone, 2013) to find a suitable way of implementing the LS. This process is called *Cultural Transposition* (CT), which provides a perspective whereby it is possible to “import” foreign teaching practices, using them consistently with the new context, but retaining some of their conflictual aspects with the new cultural context (Ramploud et al., 2022). CT means not to “perform a comparative study or a slavish import-export of mathematics education methodologies and tools between different countries, but rather to open a dialogue between two different cultures in which every thought, meeting the other culture, questions its own unthought” (Mellone et al., 2021, p. 382). Its aim is to exploit the cultural conflictual aspects to trigger teachers’ questioning about their own teaching practices and educational intentionality (for more details see Mellone et al., 2019). We emphasize that in a CT process the choice of conflictual aspects to be retained is not given *a-priori*. Those described in this paper are our choices, based on our goals as teacher educators. Others may make different choices and obtain different “products”. In our case, CT process was related to specific choices regarding the structure of the Lesson Plan to be used, the length of the lesson to be planned, and specific requests to be fulfilled by participating teachers during the various phases of LS: the “product” of this CT process at the Italian level was the ILS. For the aim of this paper, and in order to provide the reader with the interpretative keys to better grasp the necessary cultural transposition from LS to ILS (for more on LS Cultural Transposition, see Ramploud et al., 2022), in Table 1 we present two columns: “*Requests*” (left column) and “*Rationale*” (right column). With the expression “*Requests*” we mean those elements that, as didacticians, we identified as necessary to construct LS coherently with the Italian didactic culture; therefore, we requested the teachers participating to ILS experiments to pay specific attention to these elements (this is why we chose to call them “requests”). With the expression “*Rationale*” we indicate the motivations and intentionalities that guided the identification of each “Request”.

Table 1 - Requests characterising ILS and related rationale

<i>Requests</i>	<i>Rationale</i>
[1] Request for lesson structured with a part dedicated to student’s hands-on activities to solve a given task, followed by class discussion	Italian tradition of research on the ‘didattica laboratoriale’, where there is a specific attention to the use of instruments and to the mathematical discussion (problem solving

[2] Request for particular attention to the choice of tasks and materials provided to students.	is coupled with a collective discussion on the mathematical content).
[3] Request for particular attention to the choice of lesson short-term objectives to be achieved within a single lesson.	The Italian Indicazioni Nazionali indicate only long-term objectives; Italian teachers are not used to plan a limited time lesson in detail.
[4] Request for teachers' explicit reflection on educational intentionality underpinning their choices for lesson design.	Freedom of teaching enshrined in Italian constitution: each teacher can choose teaching methods and the order of contents to be presented, so that it was useful for us as teacher educators to make those choices explicit to teachers.
[5] Request for the analysis of the classroom context.	Italian school inclusiveness ¹⁸ and Italian teachers' freedom of teaching.
[6] Request for structuring the observation process.	Research in the field of pedagogy in Italian context highlighting the need for teachers to learn how to conduct a systematic observation (Braga & Tosi, 1998; Cardarello, 2016).

Source: Elaboration by the authors

Starting from these requests we describe four paradigmatic ILS examples: in order to illustrate how each LS team can choose to answer to these requests, in the description of each example we indicate, for design choices and for critical reflections raised by the participants, the request they refer to. These four examples are singular experiences of LS, without referring to cycles of LS's, except the small reference in the fourth example. Cycles are present in our experiences, but to analyse them we have used a wider frame, whose illustration is beyond the aim of this paper. The interested reader can see Arzarello et al. (2022) for this analysis. We hope that these examples can inspire the Brazilian researchers and teachers to elaborate their own experiences with LS, not translating them passively into their schools but using them to 'bring out the unthought of their own cultures', as it has been the case for us.

¹⁸ Italian school is "inclusive", in the perspective that there are not special schools for students with disabilities or special needs. Therefore, at every school level, the same class can include children with learning difficulties, with physical and mental disabilities, children that are not Italian speakers, and so on.

First example: LS on difference (1st grade)

Context: This LS was developed in a 1st grade class (second half of the school year). It was composed of 18 students, one of whom with visual impairment.

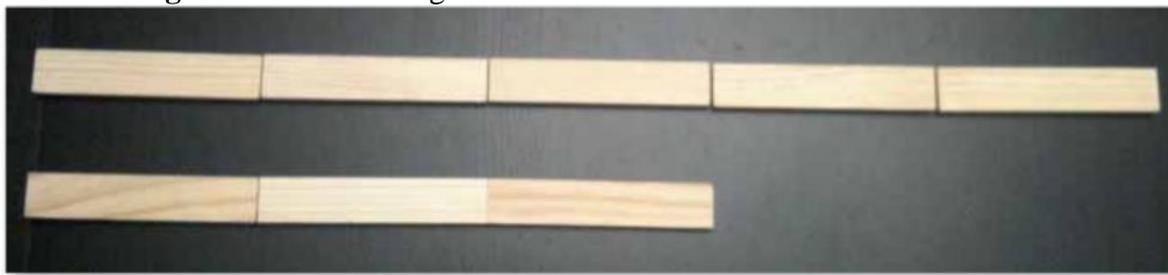
LS team: The team was composed by 6 primary school teachers, 2 *educatori*, and 2 didacticians. Among them, 5 teachers were observers, 1 *educatore* filmed, the other *educatore* co-conducted the research lesson with the pilot teacher (by ‘pilot teacher’ we mean the teacher who conducts the research lesson); the *educatore* had already known the class in previous lessons.

A priori analysis

Aim: The aim of the research lesson was introducing students to difference. The pilot teacher was interested in providing students the opportunity to face and solve a problematic situation not only by subtraction but also by strategies exploiting addition (e.g., counting on strategies) or other possibilities (request [4] in Table 1). Teacher, in particular, knew ongoing studies on Chinese didactic practices, as one problem multiple solution tasks (Bartolini Bussi et al., 2014; Venkat et al., 2018).

Main idea: The research lesson design was developed around the core idea of providing to each child a set of KAPLA®s greater than 10 and asking them how they could “make equal” two rows of KAPLA®s¹⁹ like in fig. 2 (request [2]).

Figure 2 - Initial configuration of KAPLA® rows shown to the class



Source: Picture taken by the authors

The LS team came to choose this particular task through a discussion highlighting the complexity of a-priori task analysis for teachers (requests [2] and [3]). The participants discussed a lot before finding a “good” question, since in the beginning all the proposed task formulations seemed not really opening to multiple solution, but indicating instead a

¹⁹ It is a set of wood rectangles having all the same dimensions (see: https://www.kaplaplanks.co.uk/the-kapla-game_i13.html). These wood rectangles can be coloured or not. In our case, see Figure 2, we used the non-coloured set.

sort of “preferred” strategy (for instance, teachers argued that the question “How many KAPLA®s of difference there are between the two rows?” could suggest mainly subtractive strategies rather than additive strategies), creating a sort of “hierarchy” between “right” strategies and “wrong” ones. Eventually, a participant formulated the task in this way: «*In my opinion, the way to make them give more solutions is asking “how would you make these two rows equal?”. In this way we could get as answers either taking away 3 from the upper row, or adding 3 to the lower one...*». This formulation was recognized by all the team as a real multiple solution problem, so it was chosen as the definite task formulation. It is noteworthy that this discussion allowed this teacher to better analyse the possible task formulations in the light of the intentionality at stake, emphasizing the importance of the *a-priori* analysis to elicit teachers’ reflection on their own intentionality (request [4]). Moreover, this choice was aligned with the pilot teacher’s aim to propose a task involving both additive and subtractive solution strategies (requests [2] and [4]). The team expected for the “difference” between the two rows of KAPLA®s to emerge through (at least) three possible solutions:

1. Removing a certain amount of KAPLA®s (at least, 2 from the longer row);
2. Adding a certain amount of KAPLA®s (at least, 2 to the shorter row);
3. Distributing a certain amount KAPLA®s between the two rows (at a minimum, move 1 KAPLA® from the longer row and place it in the shorter row).

After this manipulation with KAPLA®s, the team chose to ask the same question but using a representation of rows of rectangles drawn on paper (see fig. 3). The team argued that the introduction of this different material (paper) could allow students to use different solving strategies with respect to the previous manipulation, i.e. cutting the paper or drawing on it. This change of materials was aimed at highlighting the possibility of multiple solutions among different students, and the possibility for each student to make different choices in relation to different materials (request [2]).

Figure 3 - Representation on paper given to students in the second part of the activity



Source: Elaboration by the LS team

This manipulation with materials was planned to be organized as a small-group work, even if each child was given his own material. At the end of this part, the team planned to

implement a whole-class discussion about different groups' strategies (request [1]), focused especially on students' argumentation in the two cases. The conclusion of the research lesson was planned to be dedicated to a summary by the pilot teacher of the different solving strategies, aimed at pointing out the possibility of having different alternatives for solving a single problem (requests [4] and [3]), but above all at introducing a first possible formalization with symbolic language, such as: $5-2=3$ or $5-4=3-2$ for subtractive strategies; $3+2=5$ or $5+1=3+3$ for additive ones; $5-1=3+1$ for distributive ones.

Description of the ILS

To collect data about the research lesson development, the team decided to film the lesson placing a camera in a classroom corner, and collecting the 5 observer teachers' field notes (request [6]). The team chose to begin the lesson projecting the photo reported in fig. 2 on the multimedia whiteboard of the classroom, dividing students into 2 groups of 5 and 2 groups of 4, and giving to each child 12 KAPLA®s. To facilitate the work for the visually impaired student, the team chose to cover his desk with a black sheet of paper, to make it easier for him to see the light-coloured KAPLA®s (request [5]). First, the students were asked to reproduce the projected configuration with KAPLA®s; then, the pilot teacher posed the problem of how to make the two rows of KAPLA®s equal (request [2], task). The *educatore*, for this part of the lesson, was going around the class helping students and making questions aimed at supporting students' reasoning on the task. As anticipated by the team in *a priori* lesson analysis, the task allowed for multiple solutions to emerge within the same group. For instance, of two girls that worked on the same desk, one added 2 KAPLA®s to the shorter row, obtaining two rows of 5 KAPLA®s each, while the other one removed a KAPLA® from the longer row and moved it to the shorter one, obtaining two rows of 4 KAPLA®s each. Then, the pilot teacher proposed to change the material, namely, to work on the representation reported in fig. 3. Each student was given a sheet with this representation. Introducing a different material, students came often up with different solution strategies with respect to what they did with KAPLA®s, even though the two tasks were very similar. Data collected by observers on the work on paper of the same girls mentioned previously revealed that neither of them repeated the strategy used with KAPLA®s: both, in this case, chose to cut the 2 rectangles in the longer row in order to make two rows of 3 rectangles each.

At the end of this small group activity, the teacher dedicated some time to the discussion of solving strategies (request [1]), paying particular attention to students' argumentations. Then the teacher summarised students' different solving strategies, pointing out the possibility of having different alternatives for a single problem (request [4]). This recapitulation of different solutions showed the possibility of exposing students to a situation where the individuation of the "difference" could be related not only to a subtraction process, but also to strategies such as counting on or moving an element from the longer row to the shorter one. Moreover, this part of the lesson was dedicated to introducing an initial formalisation of subtractive, additive or "distributive" solving strategies, through the operations of addition and subtraction: e.g., $5-2=3$ (subtractive strategy); $3+5=2$ (additive strategy); $5-1=3+1$ (distributive strategy).

Once the video recordings were shared and watched by participants, they met to discuss and analyse the research lesson. The aim was individuating the strengths and the critical points of the design and identifying crucial points for the future development of class activities. In the discussion, the following crucial reflections emerged:

1. *Issues of time and of rigid lesson schedule.* Some participants pointed out that in Chinese LS (for example the one described in ICMI study 23), students' work on the proposed tasks is really fast with respect to Italian students' times. The observers suggested to consider reducing the number of proposed tasks in one lesson, to obtain a more profitable time organization (request [3]). These reflections led the team to emphasise the strategic importance of *a priori* analysis, retained very important to adequately implement the lesson as planned (request [3]).
2. *Importance of a-priori lesson analysis to choose materials* (request [2]). The participants realised to have paid so much attention to the analysis of KAPLA®, but to have underestimated the importance of other tools – for instance, the role of the multimedia whiteboard, which was fundamental for tracking recapitulations and argumentations, was considered at first only as part of the classroom setting (request [2]). However, the shift from using KAPLA® to using rectangles representation on paper was retained effective in making each student experience different solution strategies to similar tasks (request [4]).
3. *Students' group work.* This aspect proved to be directly related to the analysis of materials. In fact, giving to each student their own individual set of KAPLA® and their own rectangle representation did not support group work: most students solved the problem individually, and students' interaction was mainly aimed at borrowing ideas, not at a real collaboration in the solving process (request [1]).

Concerning the importance of time, the team highlighted that also the interaction between the adults involved in the experimentation was conditioned by strict timings and by the (perceived) need to accomplish the initial plan. In particular, the pilot teacher emphasised

that, in her opinion, the crucial part of the research lesson was reached in the end, when children's attention was already waning (request [1], overall design of the research lesson structure). This ILS, nevertheless, seemed to the participants a satisfying first attempt, because there were not many downtimes, and the proposed tasks attracted the attention and interest of the entire class. From this perspective, the participation in the activity of all children, even those with particular difficulties, showed that ILS is compatible with an inclusive school (request [5]), as long as the designed task sequence can be adjusted according to students' different times. The most difficult point seemed to be the discussion part, where the teacher can have difficulties in respecting planned timings, because it was difficult for the team to anticipate students' answers and the length or the richness of their argumentations. Therefore, at the end of the discussion meeting, the team identified two possible CT of LS to be chosen in a *priori* analysis: 1) one leaving more space to the discussion with students, aimed at raising important reflections and observations to be further developed in the following activities, less focused on formalization; 2) one focusing more on the core mathematical knowledge formalization. In this second case, the task should be chosen carefully to allow a less extended class discussion and more time for formalization (request [3]).

Second example: LS on calculators (5th grade)

Context: This LS was developed in a 5th grade class of 16 students, some with disabilities or learning disorders, of a school following the "No Schoolbag" model (see Schiedi, 2021). Students were used to work in small groups and in pairs (it is a typical feature of the "No Schoolbag" model: the class setting is with tables for 4/5 people, not individual desks). The LS was carried out in November 2021.

LS team: The team consisted of 5 primary school teachers, 1 didactician and 1 master's student in mathematics in the role of facilitator. Three out of the five teachers were working in grade-5 classes that year. A support teacher of one of the children with mathematical learning difficulties was also present in the classroom during the research lesson (request [5]), albeit not being part of the team.

A priori analysis

Aim: The research lesson stemmed from the teachers' reflection about some educational goals to be reached at the end of 5th grade, as indicated into the Italian *Indicazioni Nazionali*

(MIUR, 2012), emphasizing that “The conscious and motivated use of calculators and computers should be encouraged appropriately from the earliest years of primary school, for instance to check the correctness of mental and written calculations and to explore the world of numbers” (p. 60, our translation). The aim of the research lesson was to overcome the prejudice, widely spread among both students and parents, that the calculator should not be used in mathematics education because it facilitates calculations too much. The research lesson was intended to make students realise that the use of calculator not only allows to find the results of operations, as they commonly believe, but that it can enable them to reflect on their way of calculating, facilitating metacognitive reflection.

Main idea: The belief about the detrimental influence of the use of calculators on students’ mathematics learning is not completely without foundation, but the team wanted to provide an example of lesson where the use of calculators cannot exempt students from activating their reasoning to solve the task at stake. In particular, the team thought that asking students to perform, for instance, a division without the use of the division button (i.e., “:”) could completely change students’ beliefs about calculation. Indeed, in this case, in order to find the result of the division, students needed to activate competences related to the different meanings of division, knowledge of the properties of operations and knowledge of our positional and decimal number system.

Description of the ILS

To collect useful data to analyse and discuss the development of the research lesson, the team decided that the researcher would have filmed the lesson with the tablet camera while observing one of the groups. The other groups of students would have been observed by the other team members, taking notes on the spot (request [6]).

In the teachers’ view, a work on the use of calculator could not be reduced to just a one-hour lesson, hence the Lesson Study was part of a broader teaching programme (request [3]). The research lesson was preceded by some activities aimed at making students familiarise with the use of the calculator and the main functions of the buttons. In the research lesson the focus was on two activities inspired by “Matematica 2001” (a compendium of innovative teaching activities and assessment proposals edited by the UMI – Arzarello et al., 2012). The following are the proposed activities with related tasks and educational intentions (request [4]).

table (on the right in fig. 4), the “see” column was proposed already filled in and the students had to fill in the “type” one. In this way, the team aimed to test whether the students were able to go backwards, following the correlation between sequence of typed buttons and performed operation (request [3]).

The second activity was called “The mischievous calculator”. It required performing operations, but for each task the use of the button for the operation at stake was hindered: in this way students must find alternative strategies to compute the considered operation (request [2], task). The 3 proposed tasks were:

1. $47 \cdot 3$ (use of “ \cdot ” button hindered). With this task, the team expected students to implement different strategies: using repeated additions, eventually with the commutative property of the addition and some factor decompositions.
2. $47+7$ (use of “ $+$ ” button hindered). With this task, the teachers meant to explore the students’ competence in applying the properties of addition. They purposely chose to include the digit 7 in both addends to see whether the children used the same strategy for both numbers or they reasoned differently about the two numbers (request [3]).
3. $250:5$ (use of “ $:$ ” button hindered). The teachers were aware that this prompt was considerably more difficult than the previous two. The team chose not to use division giving non-zero remainder, because they had agreed that this prompt would be an opportunity for further exploration with the calculator (request [3]). The choice of numbers was designed to ensure an easy mental computation.

Students then were asked to write down their reasoning, to choose one spokesperson per group to explain it to the rest of the class, and to justify the solution strategy (request [1]). Figures 5, 6 and 7 show different solutions provided by students’ groups to solve the second activity.

Figure 5 - First task solutions.

$$40+40+40=120 \quad 7+7+7=21 \quad 120+21=141$$

$$47+47+47=141$$

Figure 6 - Second task solution

$$46+8=54 \quad 45+2+5+2=54 \quad 46+8=54 \quad 48-1=47-47+5+2=54$$

Figure 7 - Third task solutions (one group did not respond to this task)

$$250-200=50 \quad 25+20=50 \quad 250-200=50 \quad 250-50-50-50-50=50$$

Source: Pictures taken by the LS team

To conclude the research lesson, students were asked to answer the following question: “What did we learn today?” (request [3], as the team used this expedient to verify the goals of the lesson). The students’ answers can be summarized as follows:

- “There are different ways to get a result; there is not just one solution”;
- “I learned how to find different calculation strategies”;
- “I learned to use the calculator better and I realized that it can be useful to me only if I know what to do”;
- “I discovered that there are multiple methods for each calculation”;
- “I learned how to use the calculator to do calculations without using certain buttons.”

As soon as the lesson ended, the team met to discuss and analyse the research lesson. Several teaching ideas emerged from the discussion. Teachers said they would like to work on them in the future.

Firstly, the teachers reported that a group of students had difficulties with the first activity: they could not complete the second table (on the right in fig. 4). The researcher thus drew attention to the teachers’ habit of proposing to the students’ activities that do not involve backward processes. The researcher encouraged teachers to propose also tasks on backward reasoning. Examples are the “fill in the blanks” such as: ‘...+45= 78’, where students cannot simply apply a known procedure to solve the task but have to reason about the missing quantity to get to 78 starting from 45.

Later, the teachers analysed the second activity and realised that in the planning stage they had not accurately defined where and how students should report the work done in groups, hindering the efficacy of class discussion (request [1]). The spokesperson of the first group wrote the group’s reasoning in the centre of the whiteboard, forcing subsequent speakers to erase it in order to have space for writing their solutions. The teachers argued that, during class discussion, it would be better to divide the board *a priori* into four parts to allow each spokesperson to have their own space to write. Also, having all four solutions written on the board at the same time would have allowed the class to compare them to find similarities and differences (request [2], materials). A second issue emerged regarding the way solution strategies were shared in the class. Each group sequentially presented the reasoning carried out for the three tasks in the second activity, and then passed the turn to the next group. According to the teachers, it was complicated for the pupils to simultaneously follow the strategies applied on the three different problems. The teachers said that it would have been more productive to first reason about the strategies implemented by all four groups

on the first task (47×3 , use of “*” button hindered), then on the second ($47 + 7$, use of “+” button hindered) and finally on the third ($250 : 5$, use of “:” button hindered). The teachers then realized the excessive difficulty of this third task. During the research lesson, cognitive conflict emerged due to the presence of too many “5s” within this calculation: the 5 in the dividend (250), the 5 as divisor, and the 5 in the result (50). The students were confused, no longer understanding whether they were talking about the dividend, the divisor, or the result. During the discussion meeting, the teachers realised that in the planning phase they had not paid enough attention to the numbers to be included in the division; if they had chosen a division with all the digits different from each other, the children probably would not have encountered this difficulty (request [2], task). The students probably still would not have been successful in solving the task, given its high difficulty, but they would not have encountered the cognitive obstacle due to the presence of too many equal digits (request [2], task). The teachers also admitted that they had underestimated, or rather disregarded, the fact that this last task would not have allowed the children to visualise the result of the computation, albeit performed in a different manner. The meaning of the division conveyed by this task was in fact that of “by emptying” and not that of “inverse operation of multiplication”, since the last interpretation would have been possible only by knowing in advance the result of the calculation.

The discussion among teachers about students’ difficulties, moreover, highlighted the need to work differently on the properties of operations, which are often presented by teachers in a procedural way without a genuine reflection on their meaning. Internalising the properties of operations is also useful for speeding up mental calculation (request [4]).

Finally, among the team’s reflections that emerged from observers’ note and students’ protocols (see figs. 5, 6 and 7, where students probably used the sign “=” with a procedural meaning) there was the need to work on the meaning of the “=” sign, even before introducing operations in class. Teachers realised that they had not invested enough in getting students to internalise its relational meaning. The discussion highlighted that in Italy, in the team’s view, mathematics teaching in the early years makes students accustomed to writings like $a + b = c$, where the “=” sign is preceded by whatever operation and followed only by its result, and an easily engendered misconception is that it has a left-to-right reading order. The goal that has emerged from the team is to accustom students to other writings, such as $c = a + b$ or $c + d = a + b$, from the early years of primary school (request [4]).

Concerning team’s professional development, teachers acknowledged that LS allowed them first and foremost to develop strong reflection on their mathematical content

knowledge. Teachers attested that they were not used to discuss about mathematical meanings and contents actually brought (contextualized) into the classroom (requests [1] and [4]). Secondly, in their words, LS allowed teachers to experience “a joint and co-responsible planning”, where they could first-hand experience what it means to plan in detail. Indeed, the pilot teacher said: “Slowly I “got into the mood” of LS when I realized that I could not make some choices on my own. Many things I mistakenly thought I could decide on my own (student group settings, whether observers can intervene, the role of support teachers – request [5], related to teaching freedom), or improvise them (in what words to present the activities to the students), and instead we have to agree and especially justify them – i.e., declare our educational intentions – together” (request [4]). Finally, from further reflection on their experience, the participants retained extremely useful the role of observers (multiple observation – request [6]) during the research lesson. They decided to revise the way of administering the school-assessment tests by hypothesizing the possibility of the presence of observers, in order to detect not only the correctness of the results, but also the processes enacted by the students.

Third example: LS on problem decoding and solving (8th grade)

Context: This LS was developed in a grade-8 class. It was composed of 17 students, 10 boys and 7 girls, five of whom certified with Mathematics Learning Disabilities (MLD). The class in general is described by the two class teachers (two out of four in the team) as low-medium level. The teachers indicate only three students as high level in mathematics. The LS was carried out in December 2021, which, in Italy, corresponds to the end of the first half of the school year.

LS team: The LS team was composed by 4 teachers and 1 didactician and facilitator. All four teachers taught science and mathematics. Two of them worked in the class where the research lesson was implemented, and one of them was the pilot teacher.

A priori analysis

Aim: The aim of the research lesson – as quoted literally from Lesson Plan – was “to make you [the students] translate the text of a problem into a universal language, the language of Mathematics, that can be understood by anyone (even a foreigner), without having to go back to the original text. Try to avoid using vocabulary, prepositions, verbs, but only a mathematical language that can be understood even by those who do not speak your language” (request [2]). Therefore, the final purpose was to help students reflect on their

own communication and interpretative skills, among peers, in decoding and solving mathematical problems (requests [3] and [4]).

Main idea: The research lesson was part of an introduction to literal calculations contextualised in consolidation of problem solving, text comprehension and problem decoding in Euclidean geometry and algebra (request [3]) in a mathematics laboratory setting (request [1]). The team proposed this activity to observe the students dealing with their competence in understanding, decoding and coding a text of a problem, recognising these competences as critical. Students' manipulation of (pre-)algebraic symbolism often remains anchored to algorithmic 'as-told-by-the-teacher' and meaningless resolution procedures (request [4]).

Description of the ILS

The prerequisites for the research lesson are students' knowledge of the concepts of (1) perimeter and surface area of plane figures, (2) the Pythagorean theorem and (3) basic hints of literal calculations with integer coefficients. The teachers are also aware that, when solving problems (request [1]), Italian students are accustomed to extrapolating the data and explaining the process in the "classical" schematic formulation (with the following key words, identifying the steps of the process): (identify the) *data* - (produce a) *drawing* - (identify the) *question* / *find* (the equation) *and solve* (it) / (identify the) *unknown* followed by (report the) *solution and* (write the) *answer*.

Since the students in this class were not accustomed to working with peers, efforts were made to encourage group work and cooperative learning (requests [1] and [5]). In particular, some didactic activities were carried out prior to the research lesson: group activities on geometric problems and lessons on introducing literal calculations with integer numbers. Following the research lesson, throughout the course of the year, activities similar to the one carried out in the research lesson, with problems on solid geometry, on the circle and algebra with the literal calculations and equations, are planned in the class teaching plan (request [3]).

For the research lesson, the class was divided into groups of 3 students each. Each group is assigned one of the 7 problems prepared in advance by the team (see Table 2 – request [2], task). The problems were invented from scratch by the teachers and designed as "basic", "intermediate" and "advanced" for the different levels of the students (requests [2] and [5]). One group of students will have to work to pass on to another group all the

information needed to solve the assigned problem, using only mathematical language (request [2]).

Table 2 - The 7 problems for the research lesson

Geometric content	
BASIC	Roberto and Elena compete in a race around a rectangular field measuring 40m * 30m. Starting from one corner, they have to reach the opposite corner. Roberto runs along the edge of the field, while Elena runs along the diagonal of the field. How many metres does Elena run?
INTERMEDIATE	Roberto and Elena compete in a running race around a rectangular field measuring 40m X 30m. Starting from one corner, they have to reach the opposite corner. Roberto runs along the edge of the field, while Elena runs along the diagonal of the field. How many extra metres does Roberto have to run?
ADVANCED	At the entrance to a playground, a rectangular flowerbed of dimensions 8 m and 6 m has been created. Inside the flowerbed is placed a clock inscribed in a rhombus, the latter constructed by joining the midpoints of the sides of the rectangle. How much could the diameter of the clock measure?
Algebraic content	
BASIC	In the 3B classroom there are 16 desks and 20 chairs. For an activity, 5 desks and 7 chairs are taken to the basement (where unused furnitures are). At the end of the activity, 7 desks and 4 chairs are returned to 3B. How many desks and chairs are there now in 3B?
INTERMEDIATE	In the 3B classroom there are 16 desks and 20 chairs. For an activity, 5 desks and 7 chairs are taken to the basement. At the end of the activity, 7 desks and 4 chairs are returned to 3B. How many desks and chairs are there now in 3B? How many tennis balls would be needed to silence the chairs in the classroom?
ADVANCED	In the 3B classroom there are 16 desks and 20 chairs. For an activity, 5 desks and 7 chairs are taken to the basement. At the end of the activity, 7 desks and 4 chairs are returned to 3B. How many desks and chairs are there now in 3B? How many tennis balls would be needed to silence the chairs and desks in the classroom? What needs to be done to return to the initial situation?
Extra problem for groups finishing before the set time	
INTERMEDIATE	Marco wants to prepare a chocolate cake for his birthday. The recipe says that 600 g of chocolate is needed. In the supermarket they sell chocolate bars of 250 g each. If each bar consists of 10 squares, how many squares of chocolate does Marco need to make the cake?

Source: Elaboration by the LS team; Translation by the authors

In a second phase of the research lesson, the receiving group will have to solve the problem using only the information provided (i.e., they will not be able to read the original text of the problem – request [2]). After solving the problem, each group returns the solved problem to the sender group.

In the third phase, the two groups come together to discuss the strategies used to translate the problem and understand the data (request [2]). Between phases 1 and 2, the decoded problem can be returned to the sender if it is not understandable and solvable; the first group is not necessarily required to solve the problem, but only to encode the text (request [2]).

For the concluding phase, a large-group discussion on the activity was planned (request [1]) in order to make explicit the teachers' aim for the activity: i.e., to focus on the decoding and formalisation part, rather than on the problem-solving part (request [3]). However, this phase has never been carried out, due to lack of time.

In order to collect useful data to analyse and discuss the development of the research lesson, the team decided to film the lesson through a tablet camera held by the didactician, and to collect the notes taken on the spot by the 3 observer teachers present in the classroom (request [6]).

The discussion meeting was held the week following the research lesson. The team met again after watching the video recording. After the pilot teacher's account of first impressions, it is from the videos that the discussion arose.

For reasons of space, we report here only one example of a reflection made from a video excerpt. It was chosen because it is particularly significant to the aim of the research lesson: it concerns students' pre-algebraic competence and their spontaneous meta-reflective ability.

M.: So we know that the triangle “times” the circle...

B.: equals...

M.: ...it would have been 4 times 17, right?

M: Ok.

S: So let’s try to do that.

M.: Ah, I used your [calculator], sorry. 4 times 17.

S.: and M.: 68.

S.: But what is 68? [pause] Squares... well, triangle plus circle.

B.: Triangle and circle.

M.: Eh, we have to check...

M.: It will be... it’s possible that it’s like a, I don’t know, $2ab$ squared...

S.: Ah.

M.: either a calculation or a literal thing.

S.: In my opinion, yes.

M.: 68.... So let’s put...

S.: ...triangle and circle.

M.: triangle-circle.

M.: Then we have... circle plus square. Well, we haven’t made the squares yet.

M.: A square must be equal to... 16

S.: ok, um... minus 5... [M repeats and types]

S.: plus 7. [M repeats and types]

M.: And comes 18.

S.: 18 plus 17.

M.: In my opinion I wrote it wrong... Or maybe I made a mistake: you told me to do “less” and I put “plus”.

B.: No, 18 is right. 18 is right!

M.: Is 18 right? Okay! So I wrote right.

S.: So the square...

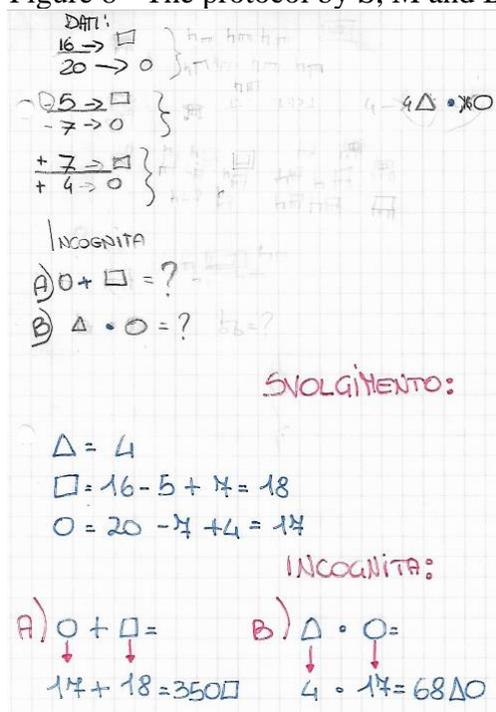
M.: 18... therefore we have the circle... So, it will then be... circle plus square...

M.: which is equal to... The square did we say 18... and 17?

S.: yyyesss...

M.: So it’s 35 circle-squares...

Figure 8 - The protocol by S, M and B.



Source: Picture taken by the authors

The previous is an excerpt from one of the student groups' discussions, while reflecting on the coded text of the intermediate level algebraic content problem. The group consists of two students considered low level (S and M; M also has MLD-certification) and one middle level (B) (request [5]). Fig. 8 shows the protocol of this group: the first part (in black) shows the coded text sent by the counterpart sending-group, and the second part (in blue and red) shows the solution proposed by the observed group (receiving-group), according to their interpretation of the problem.

This excerpt was particularly interesting because we can see the students group wondering how to determine the result of their "triangles times circles" calculation. They knew that they had to determine 68 with a label, and that this had to have something to do with circles and triangles. It occurred to M that it could be like $2ab$ squared, as in the computation of the double product of the "binomial square". She meant that, as in the literal calculation in the case of a product (2 "times" a "times" $b = 2ab$), here too the literal part of 68 must be added and, in this case, it is "4 triangles times 17 circles = 68 triangles-circles". However, the same process was repeated by the students in the case of the sum of circles and squares, heedless of the difference in literal calculation between sum and multiplication. Moreover, this determination would be nonsense if contextualised in the problem-situation of chairs to be soundproofed with tennis balls. For the LS team, having been unable to realise the mathematical discussion, the challenge of using this students' 'misconception' to address the meaning of the literal calculus persisted (request [4]). What do you obtain by multiplying 4 tennis balls (triangles), i.e. one for each chair leg, by the number of chairs (circles); and then what are those 68 objects you get and how are they determined. Or what it means to add desks and chairs together, as well as what it means to add $17a$ and $18b$.

The teachers realised that, without LS, i.e. without this detailed observation of the videos (request [6]) in which the students discuss, this opportunity would have been lost. Literal calculation would have been taught as a set of procedures, unrelated to the students' experience (requests [1] and [2]). After this analysis, the pilot teacher instead said that she would start from this group misconception to address the issue within the class (request [4]).

Fourth example: LS on origami geometry (9th grade)

The results of the surveys mentioned in the Introduction were particularly taken into consideration when preparing a professional development meeting with the teachers participating in the professional development course there referred to. As didacticians, we

explicated the meaning of the term “lesson” within LS and ILS (in the researchers’ notes to the presentation we read “LESSON as something that takes place in a specific place and time frame”), we recalled the ministerial meaning given to the term “lesson” (as a 1-hour segment), specified at several points that the research lesson would take one hour, and that teachers would have to design a one-hour lesson.

Context: This LS was developed in a grade-9 class, composed of 28 students, two of them with MLD. Only few pupils are considered “high achievers”. The class is used to work in a mathematics laboratory setting.

LS team: The team consisted of 4 teachers of a scientific-oriented high school with 18 to 35 years of teaching experience. None had experience as researcher or teacher educator. The other team member was a PhD Student, the didactician. The teachers declared that this was their first time collaborating with others to plan something other than the curriculum for the year, which is decided during a meeting of all mathematics teachers of the school at the beginning of the school year. One of them said, “I feel positive about knowing others’ experiences, but I also feel some apprehension when they share methodologies without a tradition”.

A priori analysis

Aim: The teachers planned an activity for 9th grade on synthetic Geometry, with triangles as main topic. Their main aim was to develop students’ abilities around discussion, conjecture, argumentation and proof (request [4]).

Main idea: The main point of the activity is to have the students fold a squared piece of paper following a set of instructions to obtain a triangle (Figure 9), and use geometry rules to classify it according to the angles or sides (request [2], task). Citing the Lesson Plan: “folding paper to create figures is a laboratory of intuitive geometry; the students are active on different levels, in a stimulating context to experience and discover mathematical objects. Moreover, paper folding has high learning potential, as it involves visual, manual and thought capabilities; finally, it is accessible and allows one to focus on concepts” (request [2], materials).

Figure 9 - Instructions from the video



Source: Snapshots from the video

The activity is divided into three 1-hour lessons (request [3]): in the first one, the “axioms of origami geometry” are introduced, simple loci are constructed (e.g., axis, bisector); in the second one, the students work in small groups to fold the aforementioned squared piece of paper, classify the obtained triangle and discuss their results with the whole class (request [2], task); in the third lesson, students use GeoGebra to reproduce the folding. The second lesson (i.e., the research lesson) was to “have the students come up with conjectures (whether correct or incorrect) and propose arguments to validate them” (request [3]); the teachers decided to observe “the dynamics of homogenous groups, which for us is an unusual setting” and “the ability of selected students to expose and discuss their hypotheses” (request [6]). In the first 10 minutes, the teacher provided the students with the piece of paper, and instructed the students on the folding. To facilitate the students, a video – showing the folding process (Figure 9) – was shown on the multimedia whiteboard of the classroom for the first 30 minutes of the lesson (request [2], materials). The students had 20 minutes to work in groups, solve the task and justify their solution. Then, each group was supposed to briefly share and justify their results (10 minutes overall), followed by 10 minutes of whole-classroom discussion of the results (request [1]). As the sharing took more than 10 minutes, the whole-classroom discussion did not take place.

Description of the ILS

The LS cycle took place over four meetings (at least 2 hours each) of the whole team (audio-recorded), plus the research lesson. The first meeting was to share more insights on LS; the second to decide the long-term goals of the LS and define the teaching activity; the third to plan the research lesson; the fourth to discuss the research lesson. Between the second and third meeting, and the third meeting and the research lesson, two undocumented meetings happened between teachers only, in which they defined details of the teaching activity.

Before the first meeting, the teachers emailed to the didactician a document with questions about LS, discussed during the first meeting. The main theme was “time”, in particular the time dedicated to the research lesson: “[we] are used to planning lessons of four or five hours. In one hour, it is not possible to get interesting results with the students (request [3]). What if this hour does not go as planned?”. During the meeting, a teacher commented: “I know that my lesson will take six hours, and I know the goal of those six hours, but I do not know – explicitly – what is the aim of each of those six hours” (requests [3] and [4]). The didactician noticed that the term “lesson” still had different meaning for him and the teachers. So he provided two reasons to justify the choice of the “1-hour research lesson”: by stressing the distinction between “*activity planning* [...] something teachers are used to” and “*lesson planning* [...] something new which could shed light on some aspect of their work that they did not reflect about”; and by practical reasons (e.g.: “a 1-hour lesson is easier to prepare [...] it is easier to keep the focus on our goals”; or “we want to share our work with other teachers, it is good to also have a standard format”).

We can notice that the teachers adopted the shared language. In the second meeting, they noticed that “achieving our goal in one lesson, even in one activity, is impossible. For now, we should assess their argumentation abilities” (request [3]). To this goal, the didactician suggested three different tasks: folding a triangle and categorising it; understanding if cutting a straw in three pieces always gives a triangle; folding a parabola to understand its properties. The teachers mainly discussed the first and third tasks. Finally, they chose the first one to hold the research lesson with grade-9 pupils. The pilot teacher was also chosen. With no further input from the didactician, they structured the activity over three lessons, and the pilot teacher had a focal role in choosing this structure. The goal of the first lesson was “to prepare the setting in which they will work and get them used to manipulating the paper”, while the goal of the third lesson was “to institutionalize the discussions and knowledge from the second lesson” (request [3]). Doing so, they showed that the difference between “activity” and “lesson” was clearer than before.

During the third meeting, the teachers’ worries about the time available for the research lesson emerged again. The pilot teacher seemed the most worried: “one hour is not enough [...] we are not ready [...] we should move the date further”. This brought some tension in the team, as the date for the research lesson had been decided in the first meeting, and the other members had accommodated their schedule accordingly. Even so, the planning went smoothly: the teachers focused on planning the lesson and the task according to the *Indicazioni Nazionali* (only slightly referenced in the previous meetings), reading them

several times during the planning. In particular, the *Indicazioni Nazionali* recommends that the students: “know how to support their argument and can listen to and critically evaluate the others’ arguments; acquire logical rigour when reasoning, identifying problems and finding possible solutions”. Therefore, the goal of the lesson was established as “to have the students come up with conjectures (whether correct or incorrect) and propose arguments to validate them” (request [3]). The teachers noticed that the activity fit well with another recommendation in the *Indicazioni Nazionali*: “the Euclidean approach will not be treated as merely axiomatic”. It was also decided, following a suggestion from the didactician, to organize the pupils in homogenous-by-level groups. The teachers were not used to this way of grouping, as they thought that the low-level ones would have felt uncomfortable due to their inability to contribute to the knowledge. After some discussion, they decided to test the setting (request [4]). The pilot teacher was especially worried about the two students with MLD, and proposed to focus on their performance during the lesson (request [5]). The goal of the observation was twofold: “the dynamics of homogenous groups” and “the ability of selected students to expose and discuss their hypotheses” (request [5] and [6]).

The fourth and final meeting was the same day of the research lesson. It lasted two hours and thirty minutes: two hours to discuss the lesson and thirty minutes to share impressions on LS. The meeting began with an exposition from the pilot teacher, then the team discussed in no particular order. Concerning the goals of the lesson, all teachers considered them only partially achieved: all the students were, in fact, able to produce some level of argumentation and expose to the classroom, but they were not able to listen to others’ arguments. The pilot teacher was surprised by the attitude of the students when presenting their argumentation: they were speaking to the teacher, not to their peers. They concluded that these students probably believed that every exposition to the classroom was, in fact, an oral test from the teacher (request [4] and [5]). The pilot teacher noted that he usually collects ideas from the pupils without focusing on “who contributes”, so the pupils are also not used to being all in charge of contributing (request [4]). Concerning the goals of the observation, the teachers were surprised by the performance of the homogenous groups: the pilot teacher noted that “the low-level students could not contribute much when presenting to the whole class, but they were all very focused inside the group while, usually, they lose focus after few minutes”; he also noted that “she [a girl who had problems integrating into the class] was able to take the lead of her [high-level] group, I think that she felt proud of being part of that group”; finally, he was surprised that the two middle-level groups were able to provide the more complete answers to the task, whether the high-level group could not. He

said that this kind of grouping allowed “some usually-hidden dynamics to emerge” and that “I found out some possibilities for working in the classroom that I had forgotten about, or maybe failed me in the past and I decided that they would never work” (request [4] and [5]). The team agreed with him, albeit one teacher said: “Homogenous groups probably would not work with my pupils” (request [5]).

Finally, when discussing LS, all the teachers were impressed by the results of the collaboration: “I loved these moments where we meet and share different experiences”, “it is more productive”, “we do not usually think about such short-term goals, but they are also very important”. On this point, the teachers discussed that “we unconsciously know which are the goals of the lesson, but if we make them explicit they also feel more real, so we think about them more carefully” (request [3]). They also discussed the difficulties that they had in predicting students’ reactions: “I think every teacher believes that they will be able to answer whatever question comes from the students, while they are not”. Another teacher commented, “I particularly fail to predict the ‘silly’ questions, so I do not know how to react”. The main issue, however, was time management, on different levels: the teachers noted that LS cycles should be planned at the beginning of the school year so that it can be better implemented (e.g., more time to articulate the topic in more detail, over the course of more lessons); they also thought that one hour for the research lesson is not enough, using the word “cage” to refer to how they felt in this regard.

Conclusions

In this paper we have given four examples from all the different school levels (grades 1 and 5 for primary school, grade 8 for lower secondary school and grade 9 for upper secondary school) that we think emblematic of what happens when the Italian teachers are introduced to LS as a tool for teacher education. They concretely illustrate some typical issues that teachers could face in such a teacher education process and that are at the basis of our (Italian) team theoretical elaboration of LS²⁰. Our activities with teachers brought us, as didacticians, to work with the notion of Cultural Transposition (CT) in order to elaborate what we called ILS (Italian Lesson Study). As pointed out in the Introduction, CT allows to use foreign teaching practices into a different cultural school context, using them consistently but also dialectically retaining some of the related conflictual aspects. In this process, the didacticians are responsible for facilitating the teachers’ work on the specific

²⁰ As highlighted above, apart some rare singular activities, e.g., that of R. Capone (Capone et al., in print), who however work with us on LS, our research team is the only one working systematically in Italy on LS.

identified conflictual aspects, but the validity of such a teacher education process consists in the general chosen design of our experiments: it is a feasible scientific and ethical approach that allows to develop an Italian effective way to LS. In fact, it avoids improvised or not shared changes and it can represent a real improvement of teachers' professional development, with stable effects on their didactical practices and beliefs. In this final section we sketch a compact picture of some of the results got through our 4 examples using the analysis tools we introduced above, namely the list of the 8 *cultural implicit factors* in the transposition of the Lesson Study, and the *Requests* used to analyse the design choices and the related activities.

First, we reconsider the conflictual elements pointed out in the *cultural implicit factors*' list. We have verified that these elements are active in the CT process, and we now distinguish two levels²¹ among them: (i) a *general background* level, that is a context that influence general didactical attitudes and beliefs of teachers with respect to their mathematical teaching activities when working on LS (factors 1, 3, 4 and 5); (ii) a *specific foreground* level, consequence of the previous one, which determines the effective teachers' practices in their activities during the ILS cycles (factors 2, 6, 7 and 8). It is within this second level that we have observed the main changes in teachers' practical and theoretical approach to their mathematics teaching and professionalism, when in interaction with the LS. On the other hand, with regard to the background level, it is where teachers gain awareness with respect to their practices. For example, the *Indicazioni Nazionali* (factor 1) do not prescribe that teachers develop detailed didactical plans, and the constitutionalized freedom of teaching (factor 3) make it so that the Ministry does not provides a pre-organised succession of contents to be taught nor indications of educational choices; adding to this, the habit in the school is that mathematics teachers of a school meet a couple of times during the year to elaborate the general content of their courses, listing only the main mathematical topics to teach without entering into many didactical details (factors 2, 6 and 7). This causes teachers to experience loneliness in planning their teaching and to perceive lax design as an expression of their professionalism, a proficiency in accommodating to situations. As said above, the combination of these factors resulted in the *requests* we identified as necessary to construct LS coherently with the Italian didactic culture: indeed, in this context, requests 2,

²¹ This framework could be properly described within Chevallard's Anthropological Theory of Didactics (Bosch & Gascón, 2006; Arzarello et al., 2014), distinguishing between the logos and the praxis in teachers' meta-didactical praxeologies, articulated at different levels of didactical co-determination (Chevallard, 2002). It is beyond the descriptive aim of this paper to elaborate this theoretical analysis.

3 and 4 become matter of elaboration of new meanings (which we have tried to describe in detail in each example, both in terms of mathematical and pedagogical knowledge). Despite the tensions that they bring in the teachers' minds, they positively induce teachers to discover 'unthought' parts of their work. What at the beginning appears as an initial 'misunderstanding', with time is elaborated in a positive mood, possibly because of the discussion in the group, or with a proper approach from the didactician and/or the facilitator.

Before sketching some more specific comment on the four groups' examples, it is now important to add some observations on the 6 requests (Table 1). Some very simple statistical elaborations allow a finer within- and between-comparative analysis of the requests (r[n]) with respect to the school grade (labelled here as GR, and numbered according to school grade).

Table 3 - percentages of requests (r[n]), normalised to the grade (a) or to the request (b)

	r[1]	r[2]	r[3]	r[4]	r[5]	r[6]	
GR 1	16	28	20	24	8	4	10
GR 5	12	31	19	19	12	8	10
GR 8	20	28	16	16	12	8	10
GR 9	4	15	31	23	19	8	10
	13	25	22	21	13	7	
	r[1]	r[2]	r[3]	r[4]	r[5]	r[6]	
GR 1	36	32	26	32	17	17	25
GR 5	27	36	26	26	25	33	25
GR 8	27	14	5	11	17	17	25
GR 9	9	18	42	32	42	33	25
	10	10	10	10	10	10	
	0	0	0	0	0	0	

Source: Elaboration by the authors

Table 4 - Pearson's correlation coefficient between requests

	r[1]	r[2]	r[3]	r[4]	r[5]	r[6]
r[1]	1,0	0,7	0,9	0,6	0,8	0,2
r[2]	0	3	6	6	1	9

r[-	-	-	-
2]	1,0	0,8	0,5	0,8	0,1
r[0	9	0	4	9
3]		1,0	0,7	0,8	0,1
r[0	0	4	9
4]			1,0	0,2	0,5
r[0	1	2
5]				1,0	0,6
r[0	6
6]					1,0
					0

Source: Elaboration by the authors

Table 3a indicates the percentages of Requests used in each analysis, (horizontally) normalised with respect to each grade, with the percentage of incidence of each request in all grades out of the total number of requests (last row in blue). Table 3b, instead, contains the same data, but (vertically) normalised with respect to each Request: they show (last column in blue – percentage of incidence) that the four descriptions share a common analysis modality with respect to the different Requests used in it. Table 4 contains the correlations between the Requests presence with respect to the different groups (i.e., derived from the columns of Table 3a). A positive correlation ($r_{1\#2}, r_{3\#4}, r_{3\#5}$) indicates some probable complementary affinity between them: for example, the attention to hands-on activities (request [1]) can imply a corresponding attention to the use of materials (request [2]); as well, it is easy that requests concerning a lesson short term objectives (request [3]) are related with teacher’s reflection on educational intentionality (request [4]) and the analysis of the classroom context (request [5]). On the contrary, negative values ($r_{1\#3}, r_{1\#4}, r_{1\#5}, r_{2\#3}, r_{1\#4}, r_{2\#5}, r_{4\#6}$) show that these requests are relatively independent from each other: e.g., the consideration of hands-on activities (request [1]) may pose different problems, i.e. concerning content features, from those put forward by requests concerning the classroom context (request [5]), for example from the point of view of inclusiveness.

After this cross-comparative analysis between the factors and the requests used in our analysis, which sketches the validity and limits of our lens, let us now come to some of the main specific ILS features, which this lens has allowed us to focus in the four examples of the study:

- In GR1, perceived differences with respect to the Eastern LS experiences produce a constructive CT. Teachers’ reflection on Chinese children behaviour generates a specific attention on the sequence of tasks in an inclusive perspective: the difficulties of managing the discussion bring to double possibilities of designing a research lesson;

- In GR5, the stimulus to a bigger co-responsibility in planning and an intense attention to cooperative interactions produces a new sensitivity to the importance of small details in the design and explication of educational intentionalities, which was missing before, thus generating also a change in teachers' mathematical content knowledge.
- In GR8, a fresh attention to the usefulness of observation modalities in the classroom, in particular of students' group work, can be observed: the focus on mathematical content explodes in the fine observation of a few seconds of dialogue between students and their textual signs, this suggests the need for a new observational posture to teachers.
- In GR9 the decision to work with 'groups of levels' generated a higher attention to an unusual activation of observation practices in the class and to a similarly unusual collaborative spirit of co-working among teachers.
- The issue of inclusivity was an unexpected element particularly in GR9, where teaching design is not often linked to the classroom context. The GR9 LS team found 'unthought' results from the group-levels: contrary to their expectations, low achievers showed quite good productions, while the best results were got by middle level achievers, since the high-level ones did not perform as teachers expected. All these aspects contributed to the 'unthought' phenomenon hinted above: it appeared in different groups and generated processes of change in teachers' beliefs and practices.
- A main issue of perplexity in many teams concerned the time, which deeply contrasted with the beliefs and practices of most groups. A typical comment, depicting the initial scepticism shared by all groups on the actual feasibility of LS, is the quoted comments of GR9 teachers: "[we] are used to planning lessons of four or five hours. In one hour, it is not possible to get interesting results with the students". In the final comments they wrote that the issue of time in LS represented a 'cage' for them. In this sense, it remains for them one of the most delicate issues not completely solved in the CT. This creates in particular a remarkable difference between secondary school, especially its higher years, and primary school, where this issue triggered productive reflections about the issue of time in teaching (Arzarello et al., 2022). In any case, it remains an open question for researchers. From current investigations it seems that, in higher secondary school, starting the LS design from a main focus on the specific mathematics topics can help in developing an approach to the 'time issue' that seems an effective CT of the way ILS can structure the design of tasks according to a shorter time structured model.

Other aspects we observed were induced by a common mood of perceiving the experience with LS as something of unknown and possibly even mysterious. For these reasons all the groups strongly concentrated on the mathematical content to choose for the LS design: all of them considered it something very important, on whose didactical approach they thought to have a good knowledge and strong beliefs and possibly could produce innovative aspects (in particular with respect to requests [1] and [2]) without entering too

much into the ‘unknown’ territory of the LS, but elaborating the same a coherent task design. Because of that, the groups generally decided to design tasks, where a possible innovative mathematical content was embedded in new practices. In a sense, the confidence with the mathematical content and the hands-on designed activities allowed the teachers to consider with an open and curious mind the unusual aspects of their didactical activities. These first produced (for them) surprising positive experiences, then a reconsideration of the unusual teaching experiences, and in the end, sometimes, changes in the teaching practices with the consequent elaboration of a fresh terminology (‘lesson’, ‘observation’, ‘co-design’).

Concluding this summary of the ILS with lights and shadows we point out that to deepen the analysis of the CT processes in ILS we think it will be productive to enlarge the analysis developed in Arzarello et al. (2022) through the hybridization construct, also elaborating an investigation focusing on the dynamics of background and foreground cultural implicit factors through the Chevallard’s lens of the levels of co-determination (Chevallard, 2002). As pointed out by Winsløw (2011), they can be useful for considering the institutional levels beyond the classroom: from the curricular materials and regulations, to school pedagogy and policies, as well as wider cultural conditions that surround the school and its students. This is the natural landscape, where ILS can be better understood and properly defined.

References

- Arzarello et al. (Eds.). (2012). **m@t.abel: Mathematics for students on the threshold of the third millennium**. INDIRE/ANSAS.
- Arzarello, F., Funghi, S., Manolino, C., Ramploud, A., & Bartolini Bussi, M. G. (2022). Networking Hybridizations within the Semiosphere: a research trajectory for the Cultural Transposition of the Chinese Lesson Study within a Western context. **International Journal for Lesson & Learning Studies**, 11(4), 331–343.
- Arzarello, F., Robutti, O., Sabena, C., Cusi, A., Garuti, R., Malara, N., & Martignone, F. (2014). Meta-Didactical Transposition: A Theoretical Model for Teacher Education Programmes. In A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Eds.), **The Mathematics Teacher in the Digital Era** (Vol. 2, pp. 347–372). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4638-1_15
- Bartolini Bussi, M. G. (1996). Mathematical discussion and perspective drawing in primary school: To Giovanni Prodi on occasion of his 70th birthday. **Educational Studies in Mathematics**, 31(1–2), 11–41.
- Bartolini Bussi, M. G., & Martignone, F. (2013). Cultural issues in the communication of research on mathematics education. **For the Learning of Mathematics**, 33(1), 2–8.

- Bartolini Bussi, M. G., Sun, X., & Ramploud, A. (2014). A dialogue between cultures about task design for primary school. In C. Margolinas (Ed.), **Proceedings of the ICMI Study 22** (pp. 549–558). Oxford.
- Bartolini Bussi, M. G., Bertolini, C., Ramploud, A., & Sun, X. (2017). Cultural transposition of Chinese lesson study to Italy: An exploratory study on fractions in a fourth-grade classroom. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, 6(4), 380–395.
- Bosch, M., & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. **ICMI Bulletin**, 58, 51–65.
- Braga, P., & Tosi, P. (1998). L'osservazione. In S. Mantovani (Ed.), **La ricerca sul campo in educazione. I metodi qualitativi**. Milano: Bruno Mondadori.
- Capone, R., Adesso, M. G., Manolino, C., Minisola, R., Robutti, O. (in print). Culturally Crafted Lesson Study to Improve Teachers' Professional Development in Mathematics: A Case Study in Italian Secondary School. **Journal of Mathematics Teacher Education**.
- Cardarello, R. (2016). L'osservazione in classe. In Ufficio scolastico regionale (Ed.), **Essere docenti in Emilia Romagna 2015-16** (pp. 51–55). Napoli: Tecnodid.
- Castelnuovo, E. (2008). **L'officina matematica**. Edizione La Meridiana, Molfetta.
- Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie & regulation. In J. L. Dorier (Ed.), **Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques** (pp. 41–56). La Pensée Sauvage.
- Jaworski, B., & Potari, D. (2021). Implementation of a developmental model of teachers' and didacticians' learning through inquiry: Design, operationalisation and outcomes. **ZDM**, 53(5), 1073–1084. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01290-x>
- Jullien, F. (2006). **Si parler va sans dire. Du logos et d'autres ressources**. Paris: Edition du Seuil.
- Manolino, C. (2021). The Semiosphere lens to look at Lesson Study practices in their cultural context: A case study. In M. Inprasitha, N. Changsri, & N. Boonsena (Eds.), **Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** (pp. 263–272).
- Mellone, M., & Ramploud, A. (2015). Additive structure: An educational experience of cultural transposition. In Sun X., Kaur B. and Novotná N. (Eds.), **Proceedings of the ICMI Study 23** (pp. 567– 574). China, Macau: University of Macau.
- Mellone, M., Ramploud, A., Di Paola, B., & Martignone, F. (2019). Cultural transposition: Italian didactic experiences inspired by Chinese and Russian perspectives on whole number arithmetic. **ZDM**, 51, 199–212.
- Mellone, M., Ramploud, A., & Carotenuto, G. (2021). An experience of cultural transposition of the El'konin-Davydov curriculum. **Educational Studies in Mathematics**, 106, 379–396.
- Minisola, R. (2016). **Insegnanti di Matematica che lavorano in collaborazione: panoramica internazionale e contesto italiano** [Master's dissertation]. University of Turin.
- Minisola, R., & Manolino, C. (2022). Teachers' professional development: a cultural matter. How to describe cultural contexts? In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti

- (Eds.), **Proceedings of the Twelfth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME12)**. (pp. 3650–3657). ERME / Free University of Bozen-Bolzano.
- MIUR (2012).
http://www.comune.torino.it/centromultimediale/01c_I_documenti_pedagogici/documenti_Nazionali_pdf/2012_Indicazioni_Curricolo_Sc_Inf.pdf
- OECD (2020), **TALIS 2018 Results (Volume II): Teachers and School Leaders as Valued Professionals**, TALIS. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/19cf08df-en>.
- Ramploud, A., Funghi, S., & Bartolini Bussi, M. G. (2022). Chinese lesson study: critical aspects of transfer from China to Italy. **International Journal for Lesson & Learning Studies**, 11(2), 147–160. ISSN: 2046-8253, <https://doi.org/10.1108/IJLLS-04-2021-0031>
- Schiedi, A. (2021). The Montessori theory in the “No Schoolbag” model. Formativity of materials and of the educational environment. **Ricerche Di Pedagogia e Didattica. Journal of Theories and Research in Education**, 93-104 Pages. <https://doi.org/10.6092/ISSN.1970-2221/12199>
- Venkat, H., Beckmann, S., Larsson, K., Xin, Y. P., Ramploud, A., & Chen, L. (2018). Connecting Whole Number Arithmetic Foundations to Other Parts of Mathematics: Structure and Structuring Activity. In M. G. Bartolini Bussi & X. H. Sun (Eds.), **Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades** (pp. 299–324). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-63555-2_13
- Winsløw, C. (2010). Anthropological theory of didactic phenomena: Some examples and principles of its use in the study of mathematics education. In M. Bosch, J. Gascón, A. R. Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage, & M. Larguier (Eds.), **Un panorama de la TAD** (pp. 117–140). Centre de Recerca Matemàtica.

Autores

Ferdinando Arzarello

Laurea in Matematica at Turin University
Specialisation in Logic at Amsterdam University
Emeritus professor at Department of Mathematics, Turin University
Mathematics Education Research Group in Turin University
ferdinando.arzarello@unito.it
<https://orcid.org/0000-0002-0913-7500>

Maria Giuseppina Bartolini Bussi

Master Diploma (Laurea) in Mathematics at the University of Milan
(Retired professor at) Department of Education and Human Science, Modena-Reggio Emilia University
Mathematics Education Research Group in Modena-Reggio Emilia University
Lesson Study; teacher education
mariagiuseppina.bartolini@unimore.it
<https://orcid.org/0000-0002-3257-1348>

Silvia Funghi

Bachelor in Mathematics, University of Pisa
Master in Mathematics, University of Pisa
Ph.D. in Humanities - Didactics of Mathematics, University of Modena and Reggio Emilia
Work institution: Department of Mathematics, University of Turin
“S. Polin” Laboratory for research on assistive technologies for teaching-learning of STEM disciplines; affective and cultural aspects in mathematics education
silvia.funghi@unito.it
<https://orcid.org/0000-0001-8549-8474>

Carola Manolino

Bachelor in Mathematics, University of Turin
Master in Mathematics, University of Turin
PhD in Pure and Applied Mathematics, University of Turin
Work institution: University of Turin
“S. Polin” Laboratory for research on assistive technologies for teaching-learning of STEM disciplines; Mathematics Education Research Group in Turin University
Mathematics and Visually Impairment; Lesson Study; semiotics; teacher education
c.manolino@univda.it
<https://orcid.org/0000-0002-8711-4638>

Riccardo Minisola

Bachelor in Mathematics, University of Cagliari
Master in Mathematics, University of Turin
PhD Student in Pure and Applied Mathematics, University of Turin
Work institution: University of Turin
Mathematics Education Research Group in Turin University; Lesson Study; teacher education
riccardo.minisola@unito.it
<https://orcid.org/0000-0002-1105-4843>

Alessandro Ramploud

Master in Philosophy, University of Bologna
PhD in Humanities - Didactics of Mathematics, University of Modena and Reggio Emilia
Work institution: Department of Mathematics, University of Pisa
Center of Advanced Research on Mathematics Education CARME;
Cultural Transposition
alessandro.ramploud@dm.unipi.it
<https://orcid.org/0000-0002-9161-4213>

How to cite the article:

ARZARELLO, F., BARTOLINI BUSSI, M. G. B., FUNGHI, S., MANOLINO, C., MINISOLA, R., RAMPLOUD, A. From Lesson Studies to an Italian Lesson Study: a cultural transposition process. **Revista Paradigma**, Vol. XLIV, Edición Temática Estudio de Clases: Contribuciones de la educación japonesa en diferentes países, mayo de 2023 / 341 – 377. DOI: <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p340-375.id1423>

Uso de los Criterios de Idoneidad Didáctica y la metodología Lesson Study en la formación del profesorado de matemáticas en España y Ecuador

Vicenç Font

vfont@ub.edu

<https://orcid.org/0000-0003-1405-0458>

Universitat de Barcelona (UB)

Barcelona, España.

Eulalia Calle

eulalia.calle@ucuenca.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0001-9526-8832>

Universidad de Cuenca (UC)

Cuenca, Ecuador.

Adriana Breda

adriana.breda@ub.edu

<https://orcid.org/0000-0002-7764-0511>

Universitat de Barcelona (UB)

Barcelona, España.

Recibido: 21/02/2023 **Aceptado:** 18/03/2023

Resumen

La literatura sobre la formación de profesores ha puesto de manifiesto la importancia de desarrollar su reflexión sobre la práctica. El objetivo de este documento es explicar el uso de la herramienta Criterios de Idoneidad Didáctica y la metodología Lesson Study en la formación del profesorado de matemáticas en España y el Ecuador. En este documento, primero, se explica brevemente, como referente teórico, estos constructos; después se explica la estructura de los ciclos formativos implementados en programas de formación del profesorado para el aprendizaje y uso de los Criterios de Idoneidad Didáctica para organizar la reflexión del profesorado sobre su práctica en España y en el Ecuador. A continuación, se explica la estructura de los ciclos formativos implementados en programas de formación del profesorado que combinan los Criterios de Idoneidad Didáctica con el Lesson Study. Por último, el documento termina con unas consideraciones sobre la evolución de este constructo.

Palabras-clave: Lesson Study; Criterios de Idoneidad Didáctica; Ciclos Formativos, Ecuador; España.

Use of the Didactic Suitability Criteria and Lesson Study methodology in mathematics teacher training in Spain and Ecuador.

Abstract

The literature on teacher education has highlighted the importance of developing teacher reflection on practice. The objective of this paper is to explain the use of the Didactic Suitability Criteria tool and the Lesson Study methodology in mathematics teacher education in Spain and Ecuador. In this paper, first, we briefly explain, as a theoretical reference, these constructs; then we explain the structure of the training cycles implemented in teacher training programs for the learning and use of the Didactic Suitability Criteria to organize teachers' reflection on their practice in Spain and Ecuador. Next, the structure of the training cycles implemented in teacher

training programs that combine the Didactic Suitability Criteria with the Lesson Study is explained. Finally, the paper concludes with some considerations on the evolution of this construct.

Keywords: Lesson Study; Didactic Suitability Criteria; Training Cycles; Ecuador; Spain.

Utilização dos Critérios de Adequação Didática e da metodologia Lesson Study na formação de professores de matemática na Espanha e no Equador.

Resumo

A literatura sobre formação de professores tem destacado a importância de desenvolver a reflexão dos professores sobre a prática. O objetivo deste trabalho é explicar o uso da ferramenta Critérios de Adequação Didática e a metodologia Lesson Study na formação de professores de matemática na Espanha e no Equador. Neste artigo, primeiro explicamos brevemente, como referencial teórico, estas duas abordagens; depois explicamos a estrutura dos ciclos de formação implementados nos programas de formação docente que visam a aprendizagem e utilização dos Critérios de Adequação Didática para organizar a reflexão dos professores sobre sua prática na Espanha e no Equador. Em seguida, explicamos a estrutura dos ciclos formativos implementados nos programas de formação de professores que combinam os Critérios de Adequação Didática com o Lesson Study. Finalmente, o documento finaliza com algumas considerações sobre a evolução deste construto.

Palavras-chave: Lesson Study; Critérios de Adequação Didática; Ciclos de formação; Equador; Espanha.

Introducción

En Educación Matemática existen varios modelos teóricos que caracterizan los conocimientos y competencias que debería tener un profesor de matemáticas para realizar su tarea docente (entre otros, Blömeke, 2017; Carrillo-Yañez et al., 2018; Godino et al., 2017; Hill et al., 2008). En estos modelos, la reflexión sobre la práctica, entendida como la capacidad del docente para describir e identificar, explicar y valorar factores claves que afectan a los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como tomar decisiones basadas en tales reflexiones, suele considerarse esencial para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza.

Desarrollar la reflexión del profesorado requiere adoptar marcos conceptuales y metodológicos que permitan afrontar este objetivo como son, por ejemplo, el Lesson Study (Hart et al., 2011), Concept Study (Davis, 2008), Professional Noticing (Mason, 2002) o la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica propuesta desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino et al., 2017). En el marco del EOS, la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica se desarrolla mediante el aprendizaje y el uso de la

herramienta Criterios de Idoneidad Didáctica (CID), la cual se enseña en los programas de formación del profesorado.

Si bien la metodología Lesson Study (LS) no tiene su origen ni en España ni en Latinoamérica, sí que ha impactado en esta comunidad, la cual con sus investigaciones ha contribuido al desarrollo de esta metodología. El LS ha sido reconocido como una potente estrategia para el aprendizaje de los docentes. En particular, se observa un crecimiento del número de manuscritos en revistas y libros publicados en los últimos 25 años en torno a la LS como estrategia en la formación inicial y continua de los docentes.

En el Ecuador se han implementado experiencias de formación de profesores con la metodología de la Lesson Study con vista a la profesionalización docente, por un lado, identificando las preocupaciones que presentan los docentes en el contexto de la educación virtual (Sumba Arévalo, 2022) y, por otro, fomentando el fortalecimiento de la praxis (Ibarra y García, 2019). Además, en el ámbito del LS se ha trabajado en la elaboración de una estrategia didáctica para el fortalecimiento de las habilidades virtuales en el Centro de Apoyo San Vicente de la Universidad Nacional de Educación (Sarmiento Berrezueta et al., 2021).

En España, en la línea de otras investigaciones en diferentes países, se ha combinado la metodología LS como continente, envoltorio o infraestructura - ya que se considera, de acuerdo con Elliott (2012), que se trata de una metodología muy general y con un bajo nivel teórico - con el uso de constructos de algún modelo teórico que serían el contenido. Por ejemplo, Lendínez et al, 2023 combinan el LS con la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) y Hummes (2022) con el EOS, en particular con el constructo CID.

En diferentes investigaciones (Font et al., 2021) sobre los conocimientos y competencias del profesorado de matemáticas se ha comprobado el siguiente fenómeno (*):

- El profesorado de matemáticas utiliza ciertos criterios sobre cómo deben implementarse las clases para que éstas sean de calidad, cada vez mejores, etc. (criterios que orientan la práctica)
- Estos criterios son similares, incluso cuando los profesores son de distintos países, culturas, religiones, nivel educativo, etc. (gozan de un cierto consenso en una parte importante de la comunidad de educación matemática).
- Estos criterios están relacionados con las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas (por tanto, tienen relación con los resultados y constructos teóricos generados en el área de la Didáctica de las Matemáticas).

Se trata de tendencias sobre las que hay amplio consenso en el área de la Educación Matemática. Entre otras, tendencia a la presentación de matemáticas contextualizadas; tendencia de tipo metodológico hacia una enseñanza-aprendizaje activa (constructivista); tendencia a la incorporación de las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs); tendencia a dar importancia a la enseñanza de los procesos matemáticos; tendencia a considerar que Saber Matemáticas implica ser competente en su aplicación a contextos extramatemáticos; tendencia a aceptar el principio de Equidad en la Educación Matemática Obligatoria, etc.

Desde la Educación Matemática, diferentes autores han realizados intentos para recopilar criterios para orientar la práctica del profesor para que ésta sea de calidad, óptima, etc. (Hill et al., 2008; Charalambous y Praetorius, 2018; Praetorius y Charalambous, 2018; Prediger et al., 2022). Se trata de una recopilación de criterios que gozan de un amplio consenso en el área de la Educación Matemática. Uno de los enfoques teóricos que ha trabajado en esta línea es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS), descrito en Godino, Batanero y Font (2007 y 2019), desarrollando la noción de idoneidad didáctica.

En este documento, después de esta introducción, se explica brevemente el constructo teórico Criterios de Idoneidad Didáctica y la metodología Lesson Study. Después se explica la estructura de los ciclos formativos implementados en programas de formación del profesorado para el aprendizaje y uso de los Criterios de Idoneidad Didáctica para organizar la reflexión del profesorado sobre su práctica en España y en el Ecuador. A continuación, se explica la estructura de los ciclos formativos implementados en programas de formación del profesorado que combinan los Criterios de Idoneidad Didáctica con el Lesson Study, según que los participantes conozcan o no los CID. Por último, el documento termina con unas consideraciones sobre la evolución de este constructo.

1. Marco Teórico

En esta sección se explican los dos referentes teóricos de este documento.

1.1 Criterios de Idoneidad Didáctica

En el sistema teórico que configura el EOS se ha incluido la noción de idoneidad didáctica como criterio sistémico de optimización de un proceso de instrucción matemática. Se define como el grado en que dicho proceso (o una parte de este) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados

personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno).

Se trata de un constructo multidimensional que se descompone en seis criterios parciales de idoneidad didáctica (CID) (Breda, 2020; Breda et al., 2017): 1) criterio de idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas “buenas matemáticas”; 2) criterio de idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar; 3) criterio de idoneidad interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos; 4) criterio de idoneidad de medios, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción; 5) criterio de idoneidad emocional, para valorar la implicación (intereses y motivaciones) de los alumnos durante el proceso de instrucción; y, 6) criterio de idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, entre otros.

Los CID para ser operativos se concretan en componentes e indicadores observables que permitan evaluar el grado de idoneidad de cada dimensión del proceso de enseñanza y aprendizaje. Se trata de generar una rúbrica (con criterios, componentes e indicadores) para ayudar a los profesores en la valoración de su práctica y guiar su rediseño, pero que es muy diferente a las guías docentes cuyo propósito es ayudar a los maestros a dar forma a la instrucción y guiar su acción y toma de decisiones (Remillard, 2018), en particular es muy diferente a las guías docentes para el profesor que acompañan a los libros de texto.

Por ejemplo, para la emergencia del componente “Muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar”, primero se remarca que actualmente hay una tendencia a considerar que saber matemáticas incluye la competencia para aplicarlas a situaciones de la vida real, y que dicha tendencia, en algunos países, se ha concretado en el diseño de currículos basados en competencias. Se hace hincapié en que la idea de competencia en el fondo pone de relieve que las matemáticas que se enseñan han de ser útiles para resolver problemas en diferentes contextos. Dado que cada problema exige poner en funcionamiento un tipo de significado parcial del objeto matemático diferente, la otra cara de la moneda de la

competencia en el uso de este objeto matemático es la enseñanza de sus diferentes significados. Se trata de pasar de un punto de vista ingenuo y optimista, que presupone que el alumno fácilmente realizará la transferencia del conocimiento matemático generado en un solo contexto a otros contextos nuevos y diferentes, a otro punto de vista más prudente en el que, si bien se considera que la posibilidad de transferencia creativa se puede dar, se asume que, sin un trabajo sobre una muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar y la articulación y conexión de los componentes de dicha complejidad, es difícil que se pueda aplicar el objeto matemático a diferentes contextos (Calle et al.; 2021; Calle et al., 2022; Calle et al., 2023; Font et al., 2017b).

De esta manera, cada CID se va desglosando en componentes (Cuadro 1) e indicadores (ver Breda et al., 2017), lo cual hace posible que este constructo sea aplicable para valorar la idoneidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Sánchez, Font y Breda, 2022; Godino, 2013).

Cuadro 1 – Componentes de los Criterios de Idoneidad Didáctica

Criterio	Componentes
Epistémico	<ul style="list-style-type: none"> • Errores; ambigüedades; riqueza de procesos; representatividad de la complejidad del objeto matemático.
Cognitivo	<ul style="list-style-type: none"> • Conocimientos previos; Adaptación curricular a las diferencias individuales; Aprendizaje; Alta demanda cognitiva.
Interaccional	<ul style="list-style-type: none"> • Interacción docente - estudiante; Interacción de estudiantes; Autonomía; Evaluación formativa.
Mediacional	<ul style="list-style-type: none"> • Recursos materiales; N.º de estudiantes, distribución y condiciones de aula; tiempo.
Afectivo	<ul style="list-style-type: none"> • Intereses y necesidades; Actitudes; Emociones.
Ecológico	<ul style="list-style-type: none"> • Adaptación del currículo; Conexiones intra e interdisciplinarias; Utilidad sociolaboral; Innovación didáctica.

Fuente: Morales-López y Font (2019).

En diferentes investigaciones (por ejemplo, Breda, 2020) el fenómeno (*), comentado en la introducción se ha refinado de la siguiente manera (fenómeno **):

- El profesorado de matemáticas utiliza ciertos criterios sobre cómo deben implementarse las clases para que éstas sean de calidad, cada vez mejores, etc. (*criterios que orientan la práctica*)
- Estos criterios son similares, incluso cuando los profesores son de distintos países, culturas, religiones, nivel educativo, etc. (*gozan de un cierto consenso en una parte importante de la comunidad matemática*).
- Estos criterios están relacionados con las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas (*por tanto, tienen relación con los resultados y constructos teóricos generados en el área de la Educación Matemática*).
- Estos criterios se pueden reinterpretar en términos de los CID (criterios, componentes e indicadores).

El motivo por el cual los criterios de idoneidad didáctica se infieren en el discurso de los profesores, cuando estos tienen que justificar que sus propuestas representaban una mejora, sin haberseles enseñado el uso de esta herramienta para guiar su reflexión, se puede explicar por los orígenes del constructo ya que estos criterios, sus componentes e indicadores se han seleccionado a partir de la condición de que debían de contar con un cierto consenso en el área de la Educación Matemática, aunque fuese local. Por tanto, una explicación plausible de que los criterios que se puedan inferir en el discurso del profesor se puedan reinterpretar en términos de los CID es que reflejan consensos sobre cómo debe ser una buena enseñanza de las matemáticas ampliamente asumidos en la comunidad de educadores matemáticos; y es plausible pensar que el uso implícito que hace el profesor de ellos se debe a su formación y experiencia previa, la cual le hace partícipe de dichos consensos. Ahora bien, otra explicación también plausible es que el profesor que utiliza estos criterios, al no haber participado en el proceso de generación de los consensos que los soportan, los asuma simplemente porque se le presentan como algo naturalizado e incuestionable.

Tanto los componentes como los indicadores de los CID se han confeccionado teniendo en cuenta las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas, los principios del NCTM (2000) y los resultados de la investigación en el área de la Educación Matemática que cuentan con un amplio consenso en la comunidad; por ejemplo, para la idoneidad epistémica se ha tenido en cuenta el siguiente resultado de la investigación en Educación Matemática: los objetos matemáticos emergen de las prácticas, lo cual conlleva su complejidad. De este resultado se deriva un componente (representatividad de la complejidad de la noción que se va a enseñar) cuyo objetivo es que se tenga en cuenta la complejidad matemática del objeto a enseñar como

una orientación que los profesores deben seguir en el diseño y rediseño de las secuencias didácticas.

Los criterios de idoneidad se consideran como normas que son principios, en lugar de normas que son reglas. Es decir, los criterios de idoneidad si bien son normas, no son reglas que operan de la manera todo o nada (se aplican o no se aplican, se siguen o no se siguen). En el caso de un conflicto entre dos reglas, la colisión se suele resolver de diferentes maneras: mediante una nueva regla que da preferencia a la regla dictada por la autoridad más superior, a la regla dictada más recientemente o alguna otra. En contraste, los principios tienen un aspecto de peso o importancia que las reglas no tienen, de modo que los conflictos entre principios se resuelven por *peso*. Dicho de otra manera, los criterios de idoneidad, en tanto que principios, no son binarios, son graduales. Por tanto, el mayor peso dado a algunos principios en función del contexto inclina las decisiones en una dirección; ahora bien, los principios con menor peso sobreviven intactos aun cuando no prevalezcan, lo cual permite darles más peso en un rediseño del proceso de enseñanza y aprendizaje de cara a una implementación futura más equilibrada. Es decir, la aplicación, priorización, relegación etc., de dichos criterios depende del contexto institucional en el que se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje, y del criterio pedagógico y didáctico del profesor que los debe tener en cuenta. De esta manera, la idoneidad se puede entender como la calidad relativizada y condicionada por el contexto y el juicio del profesor.

El hecho de que suceda el fenómeno (***) es la base para el diseño de los ciclos formativos que pretenden enseñar el uso de los CID. Estos ciclos se basan en la suposición de que los CID funcionan como regularidades en el discurso de los profesores, cuando tienen que diseñar o bien valorar secuencias didácticas orientadas a la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, incluso sin haberse enseñado a los futuros profesores el uso de esta herramienta para guiar su reflexión. Por tanto, se supone que, en las fases iniciales de estos dispositivos formativos, los participantes formulan y usan de manera implícita algunos indicadores y componentes de los CID. En la sección siguientes se explican brevemente algunos de estos ciclos.

1.2 Lesson Study

El LS surgió en Japón como una metodología de trabajo docente apoyada en actitudes investigativas y prácticas colaborativas entre profesores, que, al mismo tiempo, busca mejorar

el aprendizaje de los estudiantes, la mejora de la práctica docente y el desarrollo profesional de los profesores. Consiste básicamente en el diseño colaborativo y detallado de una clase, de su implementación y observación directa en el aula, y de un análisis conjunto posterior (Fernández y Yoshida, 2004; Hart et al., 2011).

La idea es que un grupo de profesores y especialistas si reúne con una problemática en común sobre el aprendizaje de sus alumnos, planeen una lección para que los alumnos aprendan, y, por último, examinen y discutan lo que ellos observan en dicha implementación. A través de múltiples interacciones de este proceso, los profesores tienen muchas oportunidades para discutir el aprendizaje de los alumnos y cómo la enseñanza incide sobre dicho aprendizaje.

De la revisión de la literatura se infiere que existen diferentes modelos de ciclos de LS. Un ciclo realizado en Japón, por ejemplo, considera las siguientes etapas:

- 1) Planificación de la clase: un grupo de profesores elige los temas a desarrollar; establece los objetivos para los aprendizajes y el desarrollo de los alumnos; elige el material didáctico; y apunta las expectativas sobre posibles respuestas y el comportamiento de los estudiantes frente a las cuestiones propuestas.
- 2) Realización y observación de la clase: un profesor comparte su clase mientras los demás observan y registran el proceso de enseñanza y aprendizaje. La participación de los otros miembros del grupo es activa en cada etapa de resolución de las cuestiones propuestas, desde la comprensión del problema, el establecimiento de estrategias y análisis de la resolución, estimulando el cuestionamiento y el descubrimiento de los estudiantes.
- 3) Reflexión conjunta sobre los datos registrados: después de la clase, los profesores (observados y observadores) se reúnen para evaluar los procesos de enseñanza observados, reflexionando sobre las actitudes y aprendizajes de los alumnos y del profesor durante la clase. El grupo hace un análisis de la clase, teniendo en cuenta sus perspectivas, tanto de enseñanza y del área en sí.
- 4) Rediseño: a partir de las discusiones realizadas en la etapa anterior el plan de clase es reestructurado. Se aplica en otra clase y se inicia un nuevo ciclo.

Para cada etapa del ciclo, existen algunos criterios que deben ser considerados para que se lleve a cabo el desarrollo de un ciclo completo de LS (Hurd y Lewis, 2011; Lim-Ratnam, 2013).

2. Ciclos formativos para la enseñanza y el uso de los CID en España y en el Ecuador

Hemos encontrado el uso de los CID en diferentes investigaciones en las que 1) no hay una intención de enseñar esta noción a los profesores para organizar la reflexión sobre su práctica, sólo se usa como herramienta analítica para categorizar los datos de la investigación (Moreira, Gusmão y Font, 2018; Morales y Font, 2019; Breda, 2020); y 2) como contenido a explicar para organizar la reflexión del profesor sobre su propia práctica, con el objetivo de desarrollar la competencia de valoración de la idoneidad didáctica, en diferentes grados y postgrados. Por ejemplo, en Beltrán y Giacomone (2018) se describe el diseño, implementación y evaluación de una intervención formativa en un curso virtual de posgrado de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada orientado al desarrollo profesional de investigadores y profesores. El objetivo del diseño era iniciar a los participantes en el desarrollo de la competencia de reflexión sobre la práctica docente, aplicando la noción de idoneidad didáctica como herramienta teórica y metodológica.

En este trabajo comentaremos brevemente algunos de estos ciclos formativos: un máster de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en España y un máster de formación de profesores de secundaria en servicio en Ecuador.

En el Máster de Formación del Profesorado de Secundaria de Ecuador (especialidad de Matemáticas) impartido conjuntamente por la Universidad de Barcelona (2015-2016) y la Universidad Nacional de Educación de Ecuador (edición 2017-2018), el uso de los criterios de idoneidad didáctica ha tenido un papel relevante, ya que son un contenido a enseñar con el objetivo de que sean usados como pauta para organizar la propia práctica. El ciclo formativo implementado es una adaptación de otro ciclo formativo implementado por primera vez, como se documenta en Rubio (2012), con profesores en formación del Máster de Formación de Profesores de Secundaria de Matemáticas de la Universitat de Barcelona y después rediseñado para la formación de futuros profesores de primaria de Chile, tal como se explica en Seckel (2016). Dicho ciclo se distribuye en dos asignaturas: Innovación e investigación sobre la propia práctica y Trabajo Fin de Máster (TFM), de acuerdo con la siguiente secuencia:

- a) Análisis de casos (sin teoría). Se propone a los alumnos la lectura y análisis de episodios de clase para que hagan un análisis a partir de sus conocimientos previos.
- b) Emergencia de los tipos de análisis didácticos propuestos por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticos (EOS). La puesta en común de los análisis realizada por los diferentes grupos permite observar como

el gran grupo contempla los diferentes tipos de análisis didácticos propuestos por el EOS, aunque cada grupo sólo contemple alguno de ellos.

- c) Tendencias en la enseñanza de las matemáticas. El episodio analizado se ha seleccionado de manera que los asistentes apliquen de manera implícita alguna de las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas. Seguidamente se hace observar a los asistentes que han utilizado esta tendencia de manera implícita. A continuación, el profesor hace un resumen de las principales tendencias en la enseñanza de las matemáticas.
- d) Teoría (criterios de idoneidad). Se explican elementos teóricos a los alumnos, en concreto se les explican los CID propuestos en el EOS (epistémico, cognitivo, interaccional, mediacional, afectivo y ecológico).
- e) Lectura y comentario de partes de algunos TFM de cursos anteriores, en los que los futuros profesores de cursos anteriores utilizaron los CID para valorar la unidad didáctica que implementaron.

En las asignaturas de Prácticas y Trabajo Final de Máster los alumnos utilizarán los CID para valorar su propia práctica, en concreto la secuencia de tareas que han diseñado e implementado. Tienen que hacer un rediseño y mejorar algunos de los aspectos que la valoración realizada indica que se deben y pueden mejorar.

En estos dos programas de formación se han diseñado e implementado ciclos formativos en la formación inicial y continua del profesorado de matemáticas para el aprendizaje y uso de los CID como herramienta para guiar la reflexión del profesorado en el diseño y en el rediseño de secuencias didácticas (Alcaraz et al., 2022; Esqué y Breda, 2021; Font et al., 2017a; Ledezma et al., 2021; Calle et al., 2023); este uso ha conllevado una simplificación de los indicadores y componentes de los CID para su adaptación a procesos de formación, esta propuesta simplificada es la que se ha explicado en la sección 1.1 de este documento.

En el Ecuador también hay que resaltar la investigación descrita en Calle (2023) sobre el desarrollo de ciclos formativos para el aprendizaje y uso del componente “Muestra representativa de la complejidad del objeto matemático a enseñar” en la formación inicial de profesores de secundaria de matemáticas en el Ecuador.

3. Uso combinado del Lesson Study y los Criterios de Idoneidad Didáctica para desarrollar la reflexión del profesor

El diseño de los ciclos formativos que pretenden enseñar el uso de los CID se basa en la suposición de que los CID funcionan como regularidades en el discurso de los profesores,

cuando estos tienen que diseñar y/o valorar secuencias didácticas orientadas a la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, incluso sin haberse enseñado a los futuros profesores el uso de esta herramienta para guiar su reflexión. Por tanto, se supone que, en las fases iniciales de estos ciclos formativos, los participantes formulan y usan de manera implícita algunos indicadores y componentes de los CID. Esta suposición ha funcionado como una regularidad en las diversas experiencias realizadas para enseñar los CID, pero en ellas se ha hecho evidente que esta fase inicial de reflexión no pautada es relativamente corta y que sería conveniente que fuese más amplia. Por otra parte, la metodología de los Lesson Study (LS), en cierta manera, se puede considerar como una fase de reflexión poco pautada y muy amplia que está orientada a la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por tanto, es de esperar que, en la fase de planificación, en la de observación, en la de reflexión y en la de rediseño orientada a la mejora, los participantes usen de manera implícita muchos de los indicadores y componentes de los CID para hacer valoraciones positivas de algunos aspectos de la experiencia realizada. Por tanto, en una experiencia de LS van a surgir consensos implícitos entre los participantes sobre aspectos que se valoran positivamente, los cuales se pueden reinterpretar en términos de indicadores y componentes de los CID, tal como se evidencia en Hummes et al. (2022a; 2022b).

Dicho de otra manera, la metodología LS se puede convertir en un tipo de dispositivo de formación que favorece que algunos de los indicadores y componentes de los CID surjan como consensos de la reflexión del grupo de profesores, lo cual da pie a la ampliación del LS con un ciclo formativo que introduzca los indicadores, componentes y Criterios de Idoneidad Didáctica (tal como se hace en las experiencias de formación comentadas anteriormente).

Los dispositivos formativos que pretenden enseñar los CID también parten de la suposición de que éstos pueden ser enseñados como herramienta para organizar la reflexión del profesor y, por tanto, la mayor parte del ciclo formativo se dedica a implementar un proceso de enseñanza y aprendizaje de estas nociones con los participantes. En cambio, en los LS no se realiza este proceso de generación de una pauta organizada en criterios, componentes e indicadores como herramienta para organizar la reflexión. Por tanto, si la metodología LS puede ser muy útil para mejorar la fase inicial de la metodología de enseñanza de los CID, esta última puede ser una ampliación de la metodología LS para generar una pauta para organizar la reflexión del profesor.

En Hummes et al. (2019) y Hummes (2022) se analiza en qué medida un ciclo formativo basado en el LS y los CID promueve la reflexión de profesores de matemáticas en ejercicio sobre el diseño, implementación, evaluación y rediseño de secuencias de tareas. En particular, se buscaba desarrollar la competencia de valoración de la idoneidad didáctica. Para ello, se diseñó e implementó un ciclo formativo que combinaba ambas metodologías. La estructura del ciclo formativo que permite combinar el LS con los CID es la siguiente: 1) Primera etapa: Lesson Study; 2) Segunda etapa: Hacer observar a los participantes que en la fase del LS han usado de manera explícita o implícita algunos de los componentes e indicadores de los CID; 3) Tercera etapa: Enseñanza de los CID y 4) Cuarta etapa: Uso de los CID como herramienta metodológica que permite organizar y mejorar la reflexión realizada en la fase del LS, lo cual repercute en mejores propuestas de rediseño de la secuencia de tareas confeccionada en el LS.

Una propuesta diferente a la se acaba de comentar es la que realiza un LS con profesores o futuros profesores que ya conocen los CID (Ledezma et al., 2022; Sol et al., en prensa). Por ejemplo, en Sol et al. (en prensa), en el marco de una experiencia de LS de este tipo, en la que los participantes conocen y utilizan el constructo CID en las diferentes fases del ciclo de LS (cada una constituida por diferentes sesiones), los profesores utilizan los CID para diseñar la unidad didáctica sobre funciones. Por ejemplo, en la revisión del currículo, el criterio epistémico se usa al analizar los procesos contemplados en el libro de texto; el cognitivo, para definir los conocimientos previos que se evaluarían en el examen diagnóstico; el criterio afectivo, para evitar el rechazo de los alumnos a las matemáticas al resolver los problemas; el criterio interaccional para considerar el tipo de interacción que se da en la clase, etc.

En este tipo de LS se puede investigar el papel que juegan los CID en la argumentación práctica del profesor para justificar realizar una acción (o no). Es decir, es un dispositivo adecuado para analizar el uso de los CID en la argumentación práctica que sustenta los acuerdos que surgen en la sesión en la cual se seleccionaron los problemas para la introducción del objeto matemático a enseñar. Para ello, primero se identifican episodios de argumentación práctica (Lewiński, 2018) en la discusión del grupo, y, luego, se analizan utilizando el modelo ideal considerado en Pragma-dialéctica (Eemeren & Grootendorst, 2003) y el modelo de Toulmin (2003) como referencia teórica.

4. Consideraciones finales

La herramienta CID ha evolucionado por diferentes fases hasta convertirse en una herramienta muy potente para analizar y desarrollar la reflexión del profesorado sobre su propia práctica, cuando esta se orienta a la mejora del proceso de instrucción. En una primera fase aparece como una propuesta teórica en el marco del EOS (Godino et al., 2007; Breda et al., 2018), en una segunda fase, en varias investigaciones se usan de los CID como categorías a priori para inferir criterios que orientan la práctica del profesor. En una tercera fase se diseñan e implementan ciclos formativos en la formación inicial y continua del profesorado de matemáticas para el aprendizaje y uso de los CID como herramienta para guiar la reflexión del profesorado en el diseño y en el rediseño de secuencias didácticas (Alcaraz et al., Esqué y Breda, 2021; Font et al., 2017a; Ledezma et al., 2021; Calle et al. 2023), y en esta fase surge la propuesta de ciclos formativos que combinan los CID con el LS. En una cuarta fase, diferentes investigadores se sitúan como observadores externos e intentan evaluar/medir la idoneidad de un proceso de instrucción (entendido en sentido amplio, es decir incluye los libros de texto como procesos de instrucción hipotéticos) que no ha sido impartido por ellos (por ejemplo, García-Marimón et al. 2021). En una quinta etapa interesa analizar el papel que juegan los CID en la argumentación práctica del profesor para justificar realizar una acción (o no) (Ledezma et al., 2022; Sol et al., en prensa), siendo los ciclos formativos que combinan los CID y el LS un marco privilegiado para ello.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por “FEDER Una manera de hacer Europa”.

Referencias

Alcaraz, D., Breda, A. y Sala, G. (2022). Valoração de uma unidade didática sobre sistemas de equações lineares: um trabalho de reflexão sistematizada sobre a própria prática. En Emanuella Silveira Vasconcelos; João Francisco Staffa da Costa; Valderez Marina do Rosário Lima. (Org.). **O entrelaçar das pesquisas com as práticas pedagógicas: notas sobre o ensino de Ciências da Natureza e da Matemática na Educação Básica** (pp. 261-281). Porto Alegre: EDIPUCRS.

- Beltrán-Pellicer, P. & Giacomone, B. (2018). Desarrollando la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica en un curso de postgrado mediante la discusión de una experiencia de enseñanza. **REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education**, 7(2), 111-133. <http://hipatiapress.com/hpjournals/index.php/redimat/article/view/2516/pdf>
- Blömeke, S. (2017). Modelling teachers' professional competence as a multi-dimensional construct, in Guerriero, S. (ed.), **Pedagogical Knowledge and the Changing Nature of the Teaching Profession**, OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/9789264270695-7-en>.
- Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. **Bolema**, 34(66), 69-88. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04>
- Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. R., (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica, **Bolema**, 32(60), 255-278. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- Breda, A., Pino-Fan, L. R., y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, 13(6), 1893-1918. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a>
- Calle, E. C. (2023). **Reflexión en la formación de profesores de matemáticas de Ecuador sobre la complejidad de los objetos matemáticos a enseñar** (Tesis doctoral no publicada). Universitat de Barcelona, España.
- Calle, E. C., Breda, A., y Font, V. (2021). Reflection on the complexity of mathematical items in initial teacher education. **Journal of Higher Education Theory and Practice**, 21, 197-214. <https://doi.org/10.33423/jhetp.v21i13.4801>
- Calle, E., Breda, A., y Font, V. (2022). La complejidad de la noción a enseñar en la valoración de la práctica preprofesional de futuros profesores de matemáticas ecuatorianos. **Journal of Research in Mathematics Education**, 11(3), 218-249. <https://doi.org/10.17583/redimat.10986>
- Calle, E., Breda, A. y Font, V. (2023). Significados parciales del teorema de Pitágoras usados por profesores en la creación de tareas en el marco de un programa de formación continua, **Uniciencia**, 37(1), 1-23. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1>
- Charalambous, C. Y., y Praetorius, A. K. (2018). Studying instructional quality in mathematics through different lenses: In search of common ground. **ZDM Mathematics Education**, 50(3), 355-366.
- Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>

- Davis, B. (2008). Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study. **Mathematics Teaching in the Middle School (NCTM)**, 14(2), 86-91.
- Elliott, J. (2012). Developing a science of teaching through lesson study. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, 1(2), 108-125. <https://doi.org/10.1108/20468251211224163>
- Eemeren, F., y Grootendorst, R. (2003). **A Systematic Theory of Argumentation: The pragma-dialectical approach**. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511616389>
- Esqué, D. y Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad utilizando la herramienta idoneidad didáctica. **Uniciencia**, 35(1), 38-54. <https://doi.org/10.15359/ru.35-1.3>
- Fernández, C., & Yoshida, M. (2004). **Lesson study: a Japanese approach to improving mathematics teaching and learning**. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Font, V., Breda, A., Diez-Palomar, J. y Seckel, M. J. (2021). Un currículum por competencias en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En M. A. Campos Hernández. (Ed.). **Representaciones, conocimientos y prácticas curriculares en Educación Matemática (237-271)**. Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).
- Font, V., Breda, A. y Pino-Fan, L. (2017). Análisis didáctico en un trabajo de fin de máster de un futuro profesor. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.). **Investigación en Educación Matemática XXI** (pp. 247-256). Zaragoza: SEIEM.
- Font, V., Breda, A., y Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuándo estos se aplican a distintos contextos. **Revista brasileira de ensino de ciência e tecnologia**, 10(2), 1-23. <https://doi.org/10.3895/rbect.v10n2.5981>
- García-Marimón, O., Morales-Maure, L., Diez-Palomar, J. y Durán-González, R. E. (2021). Evaluación de secuencias de aprendizaje de matemáticas usando la herramienta de los Criterios de Idoneidad Didáctica. **Bolema** 35(70), 1047-1072. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a23>
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, 11, 111-132.
- Godino, J. D., Batanero, C, y Font, V. (2019), The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics, **For the Learning of Mathematics**, 39(1), 38-43.
- Godino, J. D., Batanero, C, y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education, **ZDM. The International Journal on Mathematics Education**, 39(1), 127-135.

- Godino, J. D.; Giacomone, B.; Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. **Bolema**, **31**(57), 90-113.
- Hart, L. C., Alston, A. S. y Murata, A. (Eds). (2011). **Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education: Learning Together**. Dordrecht, Países Bajos: Springer.
- Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. **Cognition and Instruction**, **26**(4), 430–511.
- Hummes. (2022). **Uso combinado del Lesson Study y de los Criterios de Idoneidad Didáctica para el desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores de matemáticas**. (Tesis doctoral no publicada). Universitat de Barcelona, España.
- Hummes, V., Breda, A. y Font, V. (2022a). El desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores de matemáticas: una mirada desde el Lesson Study y los criterios de idoneidad didáctica. En J. G. Lugo-Armenta, L. R. Pino-Fan, M. Pochulu, y W. F. Castro (Eds.). **Enfoque onto-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: Investigaciones y desarrollos en América Latina** (pp. 221-241). Osorno: Ulagos.
- Hummes, V., Breda, A. y Font, V. (2022b). Critérios de adequação didática implícitos na reflexão de professores quando planejam, implementam e redesenham uma aula em uma experiência de **Lesson Study**. En. A. Richit, J, P. da Ponte, E. S. Gómez (Eds), **Lesson Study na formação inicial e continuada de professores** (53-88). São Paulo: Livraria da Física.
- Hummes, V. B., Font, V., Breda, A. (2019). Uso Combinado del Estudio de Clases y la Idoneidad Didáctica para el Desarrollo de la Reflexión sobre la Propia Práctica en la Formación de Profesores de Matemáticas. **Acta Scientiae**, **21**(1), 64-82. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss1id4968>
- Hurd, J. y Lewis, C. (2011). **Lesson Study Step by Step: How Teacher Learning Communities Improve Instruction**. EUA: Heinemann Educational Books.
- Ibarra, S. D. M., y García, Y. A. M. (2019). La metodología de la Lesson Study en el proceso enseñanza aprendizaje universitario. Una experiencia en el Centro de Apoyo San Vicente UNAE-Manabí. **Mamakuna**, **11**, 28-35.
- Ledezma, C., Sala, G., Breda, A. y Sánchez, A. (2021). Analysis of a preservice teacher's reflection on the role of mathematical modelling in his master's thesis. En M. Inprasitha, N. Changsri y N. Boonsena (Eds.), **Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** (Vol. 3, pp. 195-204). PME.
- Ledezma, C., Sol, T., Sala-Sebastià, G., y Font, V. (2022). Knowledge and Beliefs on Mathematical Modelling Inferred in the Argumentation of a Prospective Teacher When Reflecting on the Incorporation of This Process in His Lessons. **Mathematics**, **10**(18), 3339. <https://doi.org/10.3390/math10183339>

- Lendínez, E., García, F. J. y Lerma, A. (2020). Propuesta de un proceso de estudio de clases para la formación inicial del profesorado de Educación Infantil desde el paradigma del cuestionamiento del mundo. **Educação Matemática Pesquisa**, **22**(4), 694-710
- Lewiński, M. (2018). Practical argumentation in the making: Discursive construction of reasons for action. In S. Oswald, T. Herman, & J. Jacquin (Eds.) **Argumentation and language: Linguistic, cognitive and discursive explorations** (pp. 219–241). Argumentation Library, vol 32. Springer, Cham https://doi.org/10.1007/978-3-319-73972-4_10
- Lim-Ratnam, C. (2013). Lesson Study Step by Step: How Teacher Learning Communities Improve Instruction. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, **2**(3), 304-306.
- Mason, J. (2002). **Researching your own practice. The discipline of noticing**. London: Routledge-Falmer.
- Morales-López, Y. y Font, V. (2019). Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. **Educação e Pesquisa**, **45**, 1-20. <http://www.scielo.br/pdf/ep/v45/1517-9702-ep-45-e189468.pdf>
- Morales-Maure, L. (2019). **Competencia de Análisis e Intervención Didáctica del Docente de Primaria en Panamá** (Tesis doctoral no publicada). Universitat de Barcelona, España.
- Morales-Maure, L., Durán-González, R., Pérez-Maya, C., y Bustamante, M. (2019). Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza de la matemática desde la idoneidad didáctica. Experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. **Inclusiones**, **6**(2), 142-162.
- Moreira, C. B., Gusmão, T. C. R. S., y Font, V. (2018). Tarefas Matemáticas para o Desenvolvimento da Percepção de Espaço na Educação Infantil: potencialidades e limites. **Bolema**, **32**(60), 231-254.
- NCTM. (2000). **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: NCTM
- Praetorius, A. K. y Charalambous, C.Y. (2018). Classroom observation frameworks for studying instructional quality: looking back and looking forward. **ZDM Mathematics Education**, **50**, 535–553. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0946-0>
- Prediger, S., Götze, D., Holzäpfel, L., Rösken-Winter, B., y Selter, C. (2022) Five principles for high-quality mathematics teaching: Combining normative, epistemological, empirical, and pragmatic perspectives for specifying the content of professional development. **Frontiers in Education**, **7**, 969212. <https://doi.org/10.3389/ feduc.2022.969212>
- Remillard, J. T. (2018). Examining teachers' interactions with curriculum resource to uncover pedagogical design capacity. En L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat, y J. Visnovska (Eds.), **Research on mathematics textbooks and teachers' resources** (pp. 69-88). Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4_4
- Rubio, N. (2012). **Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemático**. (Tesis doctoral no publicada). Universitat de Barcelona, España.

- Sánchez, A., Font, V. y Breda, A. (2022). Significance of creativity and its development in mathematics classes for preservice teachers' creativity. **Mathematics Education Research Journal**, **34**, 863–885, <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00367-w>
- Sarmiento Berrezueta, S. M., García Gallegos, K. H., & Pozo Domínguez, O. E. (2021). Implementación de la metodología Lesson Study en el centro de apoyo San Vicente de Ecuador. **Revista Universidad y Sociedad**, **13**(5), 376-388.
- Seckel, M. J. (2016). **Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática** (Tesis doctoral no publicada). Universitat de Barcelona, España.
- Sol, T., Breda, A., Sánchez, A., Sala-Sebastià, G. y Font, V. (en prensa). Criterios de idoneidad didáctica en la argumentación práctica docente al seleccionar problemas para introducir el concepto de función. **Investigación en Educación Matemática XXVI**.
- Sumba Arévalo, V. M. (2022). La Formación de docentes en ejercicio a través de la Lesson Study: preocupaciones en una realidad compleja. **Praxis educativa**, **26**(1), 175-175.
- Toulmin, S. (2003). **The uses of argument** (2nd ed.). Cambridge University Press. (Original work published 1954).

Autores

Vicenç Font

Licenciatura en Ciencias (Sección Matemáticas), Universitat Autònoma de Barcelona
Grado de Licenciatura, Universitat Autònoma de Barcelona
Doctorado en Filosofía y Ciencias de la Educación, Universitat de Barcelona
Profesor Titular en la Universitat de Barcelona
Didáctica de las matemáticas y formación del profesorado en STEM e
interdisciplinariedad (2021 SGR 00360).
Línea de investigación en formación de profesorado
vfont@ub.edu
<https://orcid.org/0000-0003-1405-0458>

Eulalia Calle

Licenciatura en Matemáticas y Física por la Universidad de Cuenca.
Maestría en Didáctica y Currículo para la Educación Superior por la Universidad Técnica de
Ambato.
Maestría en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Cuenca.
Doctorado en Didáctica de las Ciencias, las Lenguas, las Artes y las Humanidades por la
Universitat de Barcelona.
Profesora e investigadora en la Universidad de Cuenca.
Línea de investigación en formación de profesorado.
eulalia.calle@ucuenca.edu.ec
<https://orcid.org/0000-0001-9526-8832>

Adriana Breda

Licenciatura en Matemáticas y Ciencias Actuariales por la Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
Maestría en Educación en Ciencias y Matemáticas por la Pontificia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.
Doctorado en Educación en Ciencias y Matemáticas por la Pontificia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.
Profesora e investigadora en la Universitat de Barcelona Didáctica de las matemáticas y formación del profesorado en STEM e interdisciplinariedad (2021 SGR 00360).
Línea de investigación en formación de profesorado.
adriana.breda@ub.edu
<https://orcid.org/0000-0002-7764-0511>

Como citar o artigo:

FONT, V.; CALLE, E.; BREDA, A. Uso de Los Criterios de idoneidad Didáctica y la metodología Lesson Study en la formación del profesorado de matemáticas en España y Ecuador. **Revista Paradigma**, Vol. XLIV, Edición Temática Estudio de Clases: Contribuciones de la educación japonesa en diferentes países, mayo de 2023 / 378 – 397. DOI: <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p376-397.id1424>

Desenvolvimento Profissional de uma professora de Matemática: oportunidades no contexto do Estágio Curricular Supervisionado e do Programa de Residência Pedagógica em processo de Lesson Study

Aluska Dias Ramos de Macedo

aluskadrmacedo@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-0398-1097>

Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Campina Grande, Brasil.

Regina da Silva Pina Neves

reginapina@mat.unb.br

<https://orcid.org/0000-0002-7952-9665>

Universidade de Brasília (UnB)

Brasília, Brasil.

Janaína Mendes Pereira da Silva

jana.mendes.ps@gmail.com

<http://orcid.org/0000-0002-6540-1521>

Universidade Federal do ABC (UFABC)

São Paulo, Brasil.

Recebido: 02/03/2023 **Aceito:** 08/04/2023

Resumo

Este artigo tem por base ciclos de Lesson Study realizados no Estágio Curricular Supervisionado em Matemática e no Programa de Residência Pedagógica, e seu objetivo é discutir os conhecimentos matemáticos e da prática letiva observados por uma professora de Matemática nos momentos de reflexão pós-aulas ministradas por futuros professores de uma instituição de ensino superior. Trata-se de uma pesquisa qualitativa-interpretativa, a partir de um estudo de caso, que descreve e analisa episódios e registros de prática da professora quando ela reflete sobre a regência realizada pelos futuros professores de matemática. Estes registros revelam que ela observa e analisa os conhecimentos matemáticos e da prática letiva mobilizados pelos futuros professores, ao mesmo tempo em que mostram que o Lesson Study influenciou o desenvolvimento dos conhecimentos dos futuros professores. Os resultados evidenciam, também, oportunidades de aprendizagem profissional da professora nas discussões entre os participantes. O estudo pode embasar pesquisas futuras que buscam compreender as oportunidades de aprendizagem vividas por professores supervisores que participam de ciclos de LS.

Palavras-chave: Desenvolvimento Profissional do Professor. Lesson Study. Estágio Curricular Supervisionado de Matemática. Programa de Residência Pedagógica.

Desarrollo Profesional de una profesora de Matemática: oportunidades en el contexto de la Pasantía Curricular Supervisada y en el Programa de Residencia Pedagógica en el proceso de Lesson Study

Resumen

Este artículo se basa en los ciclos de Lesson Study realizados en la Pasantía Curricular Supervisada en Matemática y en el Programa de Residencia Pedagógica, y tiene como objetivo discutir el conocimiento matemático y la práctica docente observada por una profesora de Matemática en los momentos de reflexión después de las clases impartidas por futuros docentes de una institución de educación superior. Se trata de una investigación cualitativa-interpretativa, basada en un estudio de caso, que describe y analiza episodios y registros de la práctica de la docente cuando refleja sobre la regencia llevada a cabo por los futuros profesores de matemáticas. Estos registros revelan que ella observa y analiza el conocimiento matemático y la práctica docente movilizados por los futuros docentes, al mismo tiempo que muestran que el Lesson Study influyó en el desarrollo del conocimiento de los futuros docentes. Los resultados también muestran oportunidades de aprendizaje profesional para el docente en las discusiones entre los participantes. El estudio puede apoyar futuras investigaciones que busquen comprender las oportunidades de aprendizaje que experimentan los profesores supervisores que participan en los ciclos de LS.

Palabras clave: Desarrollo Profesional Docente. Lesson Study. Pasantía Curricular Supervisada en Matemáticas. Programa de Residencia Pedagógica.

Professional Development of a Mathematics teacher: opportunities in the context of the Supervised Curricular Internship and the Pedagogical Residency Program in the Lesson Study process

Abstract

This article is based on Lesson Study cycles carried out in the Supervised Curricular Internship in Mathematics and in the Pedagogical Residency Program, and it aims to discuss the mathematical knowledge and teaching practice observed by a Mathematics teacher in the moments of reflection after the classes taught by future teachers of a higher education institution. This is a qualitative-interpretive research, based on a case study, which describes and analyzes episodes and records of the teacher's practice when she reflects on the regency carried out by future mathematics teachers. These records reveal that she observes and analyzes the mathematical knowledge and teaching practice mobilized by future teachers, at the same time that they show that the Lesson Study influenced the development of knowledge of future teachers. The results also show professional learning opportunities for the teacher in the discussions between the participants. The study can support future research that seeks to understand the learning opportunities experienced by supervisory teachers who participate in SL cycles.

Keywords: Teacher's Professional Development. Lesson Study. Supervised Curricular Internship in Mathematics. Pedagogical Residency Program.

Introdução

Os cursos de licenciatura em matemática no Brasil convivem com a diminuição do número de ingressantes, a evasão/desistência ao longo do curso e o abandono da carreira docente nos primeiros anos de atuação (GATTI, 2014). Esse cenário demarca o quanto a

falta de perspectivas para a carreira docente, os baixos salários e as más condições de trabalho podem afetar a escolha pelo curso e a permanência do professor na carreira. Igualmente, registra a urgência dos cursos em construir, coletivamente (formadores de professores, coordenadores, futuros professores, egressos), propostas com vistas à compreensão e ao enfrentamento dessa realidade (GOMES, 2016; KUENZER, 2021).

Em resposta a essas demandas, muitas propostas têm sido desenvolvidas, especialmente nos contextos dos Programas Institucionais de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e Programa de Residência Pedagógica (PRP), como também no Estágio Curricular Supervisionado em Matemática (ECSM). Nesses espaços se notam importantes avanços rumo à superação da clássica dicotomia teoria/prática; à valorização do planejamento coletivo/reflexivo como instância privilegiada de problematização e de tomada de decisão ante os conhecimentos do conteúdo e pedagógico do conteúdo; à compreensão da futura prática docente e ao se reconhecer como futuro professor. Particularmente, constatam-se a problematização e a superação do ECSM como imitação de modelos prontos; o seu posicionamento como espaço de pesquisa, como elemento de compreensão e de transformação do “ser professor(a) de matemática” (ACEVEDO; FIORENTINI, 2016; ZIMMER, 2017; DAUANNY; LIMA; PIMENTA, 2019).

Nesse ensejo, destaca-se o Lesson Study (LS) enquanto processo de desenvolvimento profissional por meio da construção de práticas reflexivas e colaborativas entre professores e futuros professores (FPs), em contextos de formação inicial e continuada, assumindo o Ensino Exploratório papel problematizador perante o Paradigma do Exercício (FIORENTINI *et al.*, 2018; CURI, 2021; PINA NEVES; FIORENTINI, 2021). Os estudos já realizados no Brasil mostram que, de modo geral, os participantes dos ciclos de LS se desenvolvem ao fortalecerem seus vínculos profissionais em suas escolas ao mesmo tempo que aprendem aspectos fundamentais da prática docente, como observar e mediar os processos de raciocínio dos estudantes, escolher e/ou elaborar tarefas matemáticas (PONTE, 2014), refletir sobre as próprias práticas e suas influências para a aprendizagem matemática dos estudantes (RICHIT; PONTE; TOMKELSKI, 2019; JÄHRING WANDERLEY; VEIGA, 2020; SILVA, 2020; PINA NEVES; FIORENTINI, 2021, entre outros).

Assim, apresentamos, neste texto, parte de uma pesquisa conduzida por duas formadoras de professores, do Curso de Licenciatura em Matemática, de duas instituições públicas brasileiras de ensino superior – a Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) e a Universidade de Brasília (UnB), no âmbito do ECSM e PRP. Nessas instituições,

o ECSM tem sido desenvolvido em processo de LS de forma colaborativa pelas formadoras, desde 2020, sempre que estas assumem a docência do componente curricular. Igualmente, o PRP tem sido desenvolvido nas mesmas condições, quando estas assumem a orientação de FPs vinculados ao programa institucional. As etapas do LS adotado na pesquisa foram construídas em diálogo com o Lesson Study Híbrido (LSH), desenvolvido no Grupo de Sábado (GdS) (Crecci, Paula; Fiorentini, 2019), a saber: (1) Identificação do tema; (2) Estudo e planejamento; (3) Socialização do planejamento e simulação das aulas investigativas (plenária 1); (4) Desenvolvimento e observação das aulas investigativas; (5) Análise crítica das aulas desenvolvidas (Plenária 2); (6) Análise crítica das aulas desenvolvidas e replanejamento (Plenária 3); e (7) Sistematização da experiência.

Ao longo do desenvolvimento dos ciclos de LS, as formadoras reúnem-se quinzenalmente para discussões e análises, de modo a subsidiar a realização de ações conjuntas que integram os FPs e estimulam o trabalho colaborativo frente às etapas do LS adotado. Desse modo, os FPs vivenciam, coletivamente, encontros síncronos e assíncronos, que permitem a troca de informações acerca da realidade do ECSM e da PRP nas referidas instituições, a análise crítica e a discussão coletiva de planos de aulas elaborados por eles. Os resultados têm indicado que o olhar para a docência tem se transformado a partir do estudo do conteúdo, dos documentos curriculares, da construção do plano de aula, do pensar sobre as ações dos professores e possíveis ações dos estudantes. Tudo isso tem contribuído para o desenvolvimento profissional dos FPs ao confrontar o planejamento com a aula desenvolvida durante as reflexões pós-aulas. Além disso, a pesquisa tem evidenciado resultados significativos, também, em relação à prática profissional dos professores supervisores do ECSM e/ou preceptores do PRP, assim como das formadoras, revelando que todos têm se beneficiado das etapas do LS, ampliando seus conhecimentos profissionais (PINA NEVES; FIORENTINI; SILVA; SILVA, 2022).

Logo, apresentamos, neste artigo, parte desta pesquisa nos contextos do ECSM e da PRP, realizados em processo de LS, tendo como objetivo discutir os conhecimentos matemáticos e da prática letiva observados por uma professora de Matemática nos momentos de reflexão pós-aulas ministradas por futuros professores (FPs).

Desenvolvimento profissional, conhecimento profissional e Lesson Study

O desenvolvimento profissional docente é um processo complexo e como já nos alertavam Fiorentini e Castro (2003), “não é isolado do restante da vida e envolve o professor

como uma totalidade humana permeada de sentimentos, desejos, utopias, saberes, valores e condicionamentos sociais e políticos” (p. 124). É fortemente impulsionado por ações reflexivas e investigativas da prática profissional, que apresentam uma dificuldade, um incômodo, com potencial para mobilizar os professores de modo individual e coletivo. O conhecimento profissional docente, por sua vez, diz respeito aos vários conhecimentos necessários à prática docente e vai além do domínio do conhecimento do conteúdo específico a ser ensinado.

A literatura mostra-nos a trajetória de pesquisadores e seus estudos na busca por compreender os conhecimentos necessários para a prática profissional docente. A este respeito, na década de 1980, Lee Shulman apresentou contribuições a partir de estudos que abordavam diferentes áreas do conhecimento. Para ele, a prática docente na educação básica exige conhecimentos além do conhecimento específico do conteúdo, pois considera que

[...] a base de conhecimento para o ensino está na interseção entre conteúdo e pedagogia, na capacidade do professor para transformar o conhecimento de conteúdo que possui em formas que são pedagogicamente poderosas e, mesmo assim, adaptáveis às variações em habilidade e histórico apresentadas pelos alunos (SHULMAN, 2014, p. 217).

A partir desses entendimentos, outros estudos foram desenvolvidos ampliando a compreensão acerca do conhecimento profissional, possibilitando, por exemplo, conceituações sobre o conhecimento matemático dos professores (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; CARRILLO *et al.*, 2018), as quais inclui, explícita ou implicitamente, conexões como parte das dimensões do conhecimento dos professores.

Outras importantes contribuições foram formuladas por Ponte (1999) a partir de estudos desenvolvidos no contexto educacional português, especialmente ao elencar os quatro domínios do conhecimento profissional do professor diretamente relacionados à prática letiva, a saber: (1) o conhecimento dos conteúdos de ensino, formas de raciocínio, de argumentação e de validação; (2) o conhecimento do currículo, com objetivos e articulação vertical e horizontal; (3) o conhecimento do aluno, relacionado aos seus processos de aprendizagem; e (4) o conhecimento do processo instrucional, “no que se refere à preparação, condução e avaliação da sua prática letiva” (p. 3).

Toda essa produção tem favorecido a investigação acerca dos conhecimentos e das aprendizagens profissionais de professores e futuros professores quando estes integram ciclos de LS, evidenciando que estes desenvolvem novos conhecimentos sobre os conteúdos, seu ensino e sobre os processos de raciocínio dos estudantes (LEWIS, 2002). Sobre a gestão

da aula e os modos de propor a organização dos estudantes em sala para o trabalho (duplas, grupos), separar/adaptar/elaborar tarefas matemáticas de diferentes natureza (exercícios, problemas, exploratórias) e acompanhar/avaliar a aprendizagem dos estudantes (PONTE et al., 2014).

Nesse sentido, Rodrigues *et al.* (2018) apresentam os casos de dois professores do 8º ano de escolaridade, que trabalham colaborativamente em EA, com o intuito de compreender como eles discutem os conteúdos de Álgebra, baseados em seus conhecimentos didáticos. Os professores mobilizam seus conhecimentos matemáticos e os da prática letiva para “evidenciar o que precisa ser clarificado numa resolução e na síntese das principais ideias [...] para relacionar resoluções e interpretar as soluções obtidas” (2018, p. 417). A combinação do conhecimento da prática letiva com o conhecimento da aprendizagem e dos alunos foi realizada pelos professores para contribuir na compreensão dos alunos em relação à transformação da linguagem verbal para a Matemática e as estratégias utilizadas por eles nas resoluções.

Richit e Ponte (2020) defendem os estudos de aula (EA) como espaço privilegiado de mobilização de conhecimentos profissionais de matemática e de didática da matemática. A partir do depoimento de sete professores do ensino básico de escolas públicas de Lisboa, eles concluíram que o EA promoveu o aprofundamento teórico do conteúdo, em especial, das propriedades matemáticas. Do mesmo modo, possibilitou que os professores passassem a valorizar mais o planejamento da aula, melhorando suas capacidades de elaborar tarefas matemáticas exploratórias e/ou ampliando suas capacidades de “identificar e compreender diferentes modos de pensar e processos de raciocínio dos alunos” (p. 24).

Em se tratando de ECSM e PRP, é notório que o professor supervisor/preceptor assume papel de destaque ao relacionar-se, cotidianamente, com o FP, acompanhando-o, podendo ou não contribuir com seu desenvolvimento profissional. Nóvoa (2017, p. 1124) já ressaltava a importância dessa interação, afirmando que:

É necessário atribuir aos professores da educação básica um papel de formadores, a par com os professores universitários, e não transformar as escolas num mero “campo de aplicação”. A construção de uma parceria exige uma compreensão clara das distintas funções, mas sempre com igual dignidade entre todos e uma capacidade real de participação, isto é, de decisão. É neste entrelaçamento que reside o segredo da formação inicial dos professores, bem como da construção de processos de indução profissional (residência docente) que assegurem a transição entre a formação e a profissão e, mais tarde, de modelos adequados de formação continuada.

Nesse sentido, Macedo (2013, p. 41) afirma que “a construção do conhecimento numa sala de aula está diretamente relacionada à qualidade da comunicação estabelecida. Por meio da comunicação, o professor percebe o que pensam os alunos. [...] Em contrapartida, uma comunicação inadequada dificulta a aprendizagem”. Em um processo de LS, a comunicação entre os participantes ocorre, de modo intenso, ao longo de todas as etapas, impulsionada por suas características reflexivas e colaborativas (LOSANO, FERRASSO; MEYER, 2021). Ora se concentrando em aspectos do tópico curricular e do seu ensino, ora em aspectos da aprendizagem dos alunos da educação básica, ora em aspectos do desenvolvimento profissional de FPs, professores e formadores. Assim, muitos momentos dessa interação privilegiam a comunicação, o debate e a busca por consenso, a exemplo, a discussão sobre os planos de aulas, as observações que os participantes fazem sobre as aulas desenvolvidas durante as reflexões pós-aulas, os registros dos professores sobre as aulas que observaram e o modo como percebem os conhecimentos do conteúdo e da prática letiva em desenvolvimento ao longo dessas etapas (TAKAHASHI, 2014; WATANABE, 2018).

Pina Neves et al. (2022) discutem em estudo realizado com FPs de duas instituições brasileiras o quanto o compartilhamento de planos de aulas e a discussão coletiva promovem a integração entre os FPs e a busca de entendimento comum sobre as tarefas matemáticas e a abordagem didática. Além disso, revelam que mesmo em estados distintos, em realidades educacionais próprias, comungam resistências e dificuldades quanto ao planejamento e desenvolvimento da aula de matemática na perspectiva do ensino exploratório (CANAVARRO, 2011).

Logo, é essencial conhecer melhor aspectos da interação que os professores supervisores/preceptores realizam com os FPs quando estes integram o ECSM e o PRP em processo de LS. De modo particular, como os conhecimentos matemáticos e da prática letiva são observados por eles nos momentos de reflexão pós-aulas ministradas. Igualmente, como essa interação proporciona oportunidades para que os FPs construam novos conhecimentos profissionais, ao mesmo tempo que os supervisores/preceptores se desenvolvem profissionalmente.

Procedimentos metodológicos

Trata-se de uma pesquisa qualitativa-interpretativa (CRESWELL, 2014), a partir de um estudo de caso, que para Yin (2005, p. 17), é uma investigação que apura um evento em profundidade e em seu ambiente real “com nosso conhecimento dos fenômenos individuais,

grupais, organizacionais, sociais, políticos e relacionados”, de modo que não é possível investigar o fenômeno fora de seu ambiente prático. A escolha por esta abordagem também considerou as afirmações de Ponte (2006, p. 2), quando discute este tipo de estudo em Educação Matemática:

É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenômeno de interesse.

Assim, buscou-se localizar as falas e as reflexões de uma professora supervisora-preceptora que integra ciclos sucessivos de LS, desde 2021, desenvolvidos colaborativamente por duas formadoras de professores no âmbito do ECSM e do PRP, nos cursos de licenciatura em matemática da UFCG e da UnB (LEWIS; HURD, 2011; PINA NEVES et al., 2022). A referida professora tem 33 anos, reside no interior do estado da Paraíba, e atua como docente concursada em uma escola pública da cidade. Possui licenciatura em matemática e especialização em Educação de Jovens e Adultos (EJA) pela UFCG. Tem experiência como docente na EJA por um ano, no ensino fundamental anos finais por quatro anos, e no ensino médio, também, por quatro anos. Durante o período de ensino remoto, participou de formação sobre o Novo Ensino Médio oferecida pela Secretaria de Educação do Estado da Paraíba e atuou, fortemente, em sua escola organizando grupos de WhatsApp, turmas no Classroom e pastas em drives para o compartilhamento de links e materiais didáticos, com o intuito de minimizar os impactos da pandemia nos estudos e na aprendizagem dos estudantes. A sua decisão de integrar ciclos de LS tanto em ECSM quanto no PRP é descrita por ela como uma oportunidade para aprender e ensinar.

As etapas do LS adotado no ECSM e no PRP são as mesmas, a saber: 1) Identificação do tema; (2) Estudo e planejamento; (3) Socialização do planejamento e simulação das aulas investigativas (plenária 1); (4) Desenvolvimento e observação das aulas investigativas; (5) Análise crítica das aulas desenvolvidas (Plenária 2); (6) Análise crítica das aulas desenvolvidas e replanejamento (Plenária 3); e (7) Sistematização da experiência (PINA NEVES; FIORENTINI; 2021). Em ambos os contextos, os FPs formam grupos para o trabalho e cumprem horas semanais (de 4 a 8 horas) na escola e na universidade para o desenvolvimento das etapas. Enquanto no ECSM, o período de atuação de cada grupo é delimitado pelo semestre letivo em curso, no PRP o período é delimitado pelo edital de acesso e pela organização dos módulos a serem cumpridos.

Nos dois contextos, os FPs participam de encontros semanais com os orientadores e os professores supervisores e/ou preceptores nos quais o trabalho dos pequenos grupos é socializado, discutido e melhorado, colaborativamente, na interação com os membros do grande grupo. Nos dois contextos, os FPs estudam por meio da leitura de artigos científicos o Ensino Exploratório e o LS bem como consultam as orientações curriculares do estado e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), sendo, todos esses materiais, objeto de debate no grande grupo.

Para a descrição e análises, consideramos os dados construídos por FPs e professora supervisora-preceptora da UFCG, durante as etapas 3 e 5 do processo de LS adotado: (i) descrição da socialização do planejamento e simulação das aulas (Plenária 1); e, (ii) Análise crítica das aulas desenvolvidas (Plenária 2), tendo como foco os registros escritos da professora supervisora-preceptora durante sua interação com eles em situações de ECSM e da PRP. A partir de uma análise indutiva dos dados (BENEDICTO *et al.*, 2012), foram destacados aspectos relativos aos conhecimentos profissionais acerca da prática letiva, constituindo duas categorias neste texto: *análise dos planos de aula e das tarefas exploratórias e o olhar da professora relacionado à prática letiva*.

Descrição e análise dos dados: Um olhar sobre os planejamentos dos futuros(as) professores(as), os registros de prática da professora supervisora-preceptora e os conhecimentos mobilizados

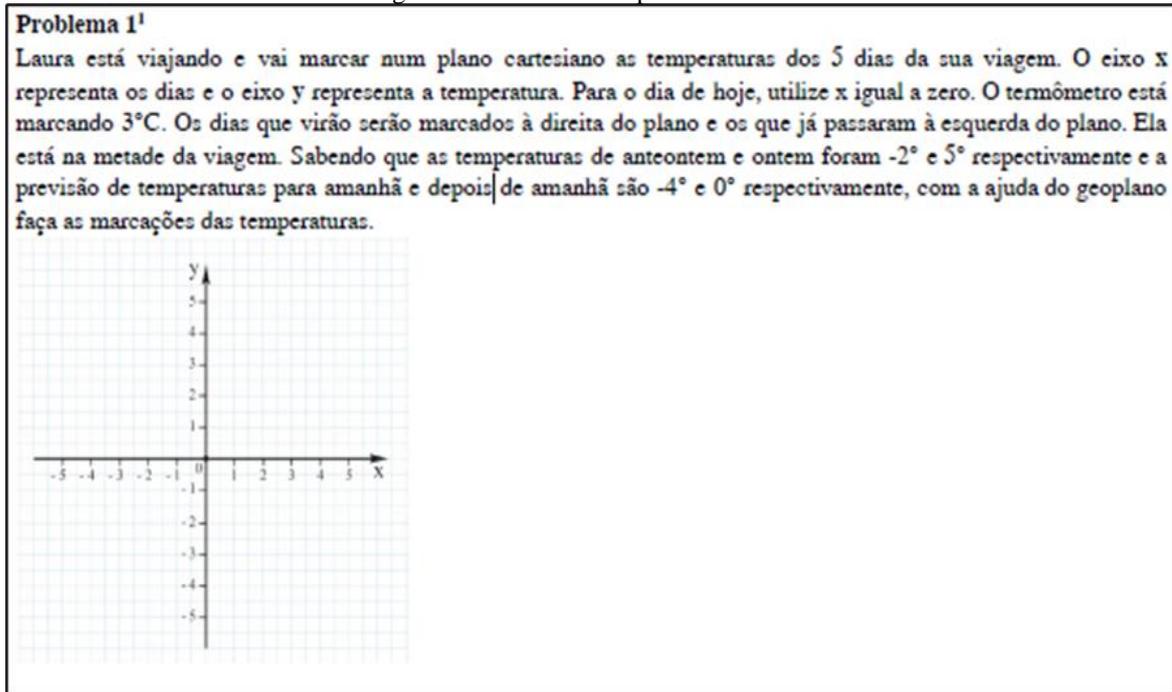
Descrição da socialização do planejamento e simulação das aulas (Plenária 1): análise dos planos de aula e das tarefas exploratórias

Os planos de aula escolhidos são parte de uma sequência didática para o 3º ano do ensino médio com os seguintes conhecimentos-alvo: plano cartesiano (revisão) e distância entre dois pontos; coordenada de um ponto médio de um segmento; e alinhamento de três pontos. Eles foram elaborados pelo grupo de FPs, no contexto do ECSM e do PRP, na perspectiva do Ensino Exploratório (CANAVARRO, 2011; SERRAZINA, 2017) e implementados na escola.

O primeiro plano de aula, de 100 minutos, teve como objetivos: trabalhar a localização de coordenadas nos quadrantes do plano cartesiano; resolver e elaborar problemas envolvendo a distância entre dois pontos do plano cartesiano; associar uma reta representada no plano cartesiano a sua representação algébrica e vice-versa; saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras,

relações, equações. Com as tarefas matemáticas seguintes, os FPs pretendiam alcançar todos os objetivos:

Figura 1: Problema com plano cartesiano



Fonte: Plano elaborado pelos FPs, adaptado do “Plano de aula: Plano Cartesiano”, disponibilizado no site Nova Escola. Disponível em: <https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/7ano/matematica/plano-cartesiano/428>. Acesso em: 26 jun. 2022.

Devido à pandemia, a professora solicitava sempre aos FPs uma revisão de conteúdo, visto que os estudantes apresentavam muitas dificuldades conceituais referentes a tópicos curriculares de anos anteriores (PONTE, 1999). Por isso, a aula foi iniciada com uma tarefa matemática de natureza exploratória, sobre o plano cartesiano. No plano de aula, os FPs anteciparam (CANAVARRO, 2011) que “pode surgir uma confusão quanto à interpretação dos pontos” e, por isso, o FP regente deveria realizar alguns questionamentos e se preparar para as respostas como:

Figura 2: Ações dos professores e ações esperadas dos alunos para o problema 1

	<p>interpretação dos pontos e confundir os pares ordenados;</p> <p>➤ Questionamentos que poderão ser feitos durante a resolução:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Quantos pares ordenados teremos? 2. Os dias da viagem serão marcados em qual eixo? 3. A temperatura de cada dia será marcada em qual eixo? 4. Quais valores de x representam os próximos dois dias? 5. Quais valores de y representam os próximos dois dias? 6. Quais valores de x representam os dois dias que passaram? 7. Quais valores de y representam os dois dias que passaram? 	<ul style="list-style-type: none"> • 4) "Seria 1 e 2?" • 4) "como 'hoje' o x é 0 então os próximos dois dias é 1 e 2" • 5) "esse é mais fácil, é -4° e 0°" • 6) "nesse caso, seria 1 e 2 também" • 6) "creio que sejam números negativos, já que se refere a dias que já passaram" • 6) "então seria -1 e -2" • 7) "5° e -2°" (com as respostas dos questionamentos anteriores espera-se que tenham menos dificuldades nessa última pergunta) 	<ul style="list-style-type: none"> • Marca pra o dia de hoje um ponto no 0 do eixo x e um ponto no 3 do eixo y. • A resposta é 0,3.
Tempo	Ações dos professores (inclusive instrumentações, falas, organização e uso de materiais, etc.)	Ações esperadas dos alunos	Observações
15 min	<p>➤ Resolução do problema: Questionando os alunos, juntamente com o auxílio deles quanto aos resultados obtidos; fazer a explanação em conjunto das respostas obtidas. Pode surgir uma confusão quanto a</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 1) "já que são 5 dias de viagem então serão 5 pares ordenados" • 1) "o que seria um par ordenado mesmo?" • 2) "no eixo y" • 2) "no enunciado fala que serão marcados no eixo x" • 2) "essa era exatamente a minha dúvida" • 3) "no eixo y" 	<ul style="list-style-type: none"> • Abscissa? Que nome difícil, como se escreve?

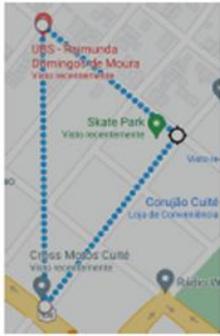
Fonte:

elaborado pelo grupo de FPs.

As ações dos professores e as ações esperadas pelos alunos elaboradas pelos FPs partem da resolução que fizeram da tarefa matemática e do estudo do conteúdo realizado previamente, ou seja, do conhecimento específico do conteúdo matemático, que se percebe evocar o conhecimento pedagógico e a mobilização de conhecimentos didáticos e seus conhecimentos matemáticos (RICHIT; PONTE, 2020; RODRIGUES et al., 2018).

Figura 3: Problema para introduzir a distância entre dois pontos

Problema 2:
Sabendo que a distância da UBS, até a Cross motos é de 362 metros, e que a distância da cross motos até a praça de skate é de 277 metros. A partir dessas informações, calcule a distância da praça de skate até a UBS.
Obs.: Dê a resposta em quilômetros.



Fonte: elaborado pelo grupo de FPs – extrato do plano 1.

Com relação às ações dos professores antes da resolução desta segunda tarefa (PONTE, 2014), os FPs escreveram no plano: “pedir para que algum aluno leia, como forma de interação, quando ele acabar de ler, pedir pra que ele dê alguma opinião, o que acha, ou uma forma de resolvê-la, se ele consegue perceber alguma relação na imagem, se é um

triângulo retângulo, caso ele não queira, é importante fazer as mesmas perguntas para a turma inteira”. As ideias presentes no plano indicam a comunicação que se almejava estabelecer entre FP regente e alunos, buscando a interação entre os presentes, seja com leitura, perguntas ou respostas envolvendo as estratégias e dificuldades de cada um. Nota-se a mobilização da construção do conhecimento relacionado à comunicação (ALEXANDER, 2010; MACEDO, 2013).

No segundo plano, para um aula de 50 minutos, sobre coordenada de um ponto médio de um segmento, foram estabelecidos os seguintes objetivos: determinar o ponto médio de um segmento de reta, de início, sem o uso de fórmulas, a partir de coordenadas no plano cartesiano; saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações, equações. [extrato do plano de aula]. Para a escolha e elaboração desses objetivos, os FPs consultaram a BNCC (Brasil, 2018). Percebe-se que os objetivos citados se alinham às habilidades dos anos finais do ensino fundamental, não às do ensino médio, ou seja, os conhecimentos prévios que os alunos necessitavam para a construção de novos conhecimentos não eram suficientes por conta das restrições e dificuldades vividas durante a pandemia, influenciando as decisões dos FPs tanto na definição dos objetivos quanto na escolha das tarefas matemáticas (PONTE, 1999; RODRIGUES et al., 2018).

A primeira tarefa tinha o intuito de distinguir uma reta, semirreta e um segmento de reta. Antes de apresentá-la, os FPs decidiram questionar os alunos para conhecerem o que eles já sabiam e reunir contribuições para a resolução.

Figura 4: ações do FP regente e possíveis ações dos alunos.

10 min	<ul style="list-style-type: none"> > Iniciar a apresentação de slide, e em seguida pedir para que a turma se divida em duplas. > Questionamentos: <ol style="list-style-type: none"> 1. O que é uma reta? 2. O que é um segmento de reta? 3. E uma semirreta? 	<ol style="list-style-type: none"> 1. <ol style="list-style-type: none"> 1.1. “Eu sei o que é, mas não sei explicar não”; 1.2. “Acho que é algo que não tem uma definição exata”; 1.3. “Uma linha”; 2. “Boa pergunta, nunca parei para pensar”; 3. “Um pedaço de uma reta?”; 3. “Acho que se for pelo nome é quase uma reta, mas não é uma reta”; 3. “Uma parte de uma reta”
--------	---	---

Fonte: extrato do plano 2.

Fonte: <https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/9ano/matematica/encontrando-o-ponto-medio-de-um-segmen-to/6371>

Quanto às antecipações das resoluções dos alunos, era esperado que nos 15 minutos de discussão, eles expressassem os conceitos de reta, semirreta e segmento ou, ainda,

apresentassem dificuldades ao se expressarem por meio da fala ou da representação no plano cartesiano (RODRIGUES et al., 2018).

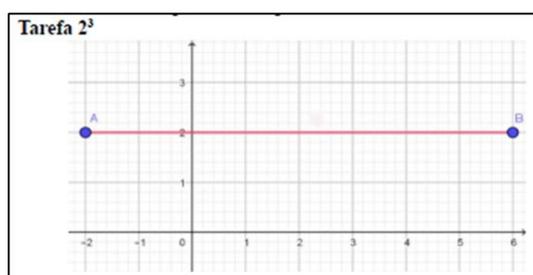
Figura 5: ações do professor à esquerda e antecipações dos alunos à direita em relação à tarefa 1 do plano 2.

<p>➤ Nesse momento iremos discutir a resolução da tarefa 1, em conjunto com os alunos, pedindo para que os mesmos digam qual foi a solução deles, para analisar se eles conseguem diferenciar o conceito de, reta, semirreta e segmento de reta. Logo em seguida trazer no slide os conceitos abordados na questão.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • “Nessa atividade ficou melhor de mostrar essas coisas aí, pois pra falar exatamente o que é não consigo”; • “Pelo o que estou vendo acho que acabei confundindo os termos”; • “No caso para representar uma reta era só fazer uma linha horizontal?”; • “Não né fulano, ela pode estar de qualquer jeito, em pé, deitada, inclinada”;
---	--

Fonte: extrato do plano 2.

Nota-se que a linguagem coloquial utilizada pelos FPs se alinha à própria linguagem que esperam estabelecer com os alunos (MACEDO, 2013). Para formalizar os conceitos de cada elemento, os FPs pediram que os alunos compartilhassem suas soluções para discutirem os conceitos trabalhados de modo conjunto (LEWIS, 2002). Em seguida, colocariam a imagem da representação da reta, semirreta e segmento de reta para discussão final antes da tarefa 2, a qual aborda a distância entre dois pontos.

Figura 6: tarefa 2



- Tarefa 2³
- a) Quais as coordenadas dos pontos A e B?
 - b) Qual a medida do segmento?
 - c) Marque um ponto C exatamente no meio do segmento AB.
 - d) Quais as coordenadas do ponto C?
 - e) Some a coordenada x do ponto A com a coordenada x do ponto B e divida por 2, depois a coordenada Y do ponto A com a coordenada Y do ponto B e divida por 2, em seguida compare o resultado com as coordenadas do ponto C. conseguiu perceber alguma semelhança?

Fonte: <https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/9ano/matematica/encontrando-o-ponto-medio-de-um-segmento/6371>

Para essa segunda tarefa, os FPs planejaram a resolução em dupla no tempo de 10 minutos, instigando a discussão sobre a resolução com questionamentos, como: “vocês acham que esse ponto C seria um ponto médio? Percebem alguma coisa na divisão do segmento de reta em dois a partir do ponto C? Elas têm a mesma distância? Essa distância é pequena e podemos até contar os quadradinhos, mas quando essa distância for maior, será que não existe outra forma de calcularmos o ponto médio?”. Diante das perguntas,

formuladas a partir de linguagem mais acessível (MACEDO, 2013) para os alunos, era esperado que eles expressassem respostas como:

Figura 7: respostas possíveis aos questionamentos dos FPs.

- | |
|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. "Sim"; 1. "Já que é a metade acho que é sim, o ponto médio"; 2. "Nao percebi nada"; 2. "Só que está dividida ao meio, e parece que tem a mesma distância"; 2. "Cada lado ficou com a mesma distância"; |
|---|

Fonte: extrato do plano.

Figura 8: momento final da aula – ações do professor e ações esperadas dos alunos

15 min	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Nessa etapa será solicitado que os alunos generalizem o método (fórmula) para encontrar o ponto médio de qualquer segmento de reta. ➤ O questionamento chave para esse momento será: Essa distância é pequena e podemos até contar os quadradinhos, mas quando essa distância for maior, será que não existe outra forma de calcularmos o ponto médio? ➤ Será disponibilizado um tempo para que pensem nessa fórmula. E por fim virá a socialização junto com os alunos 	<ol style="list-style-type: none"> 3. "Tem uma fórmula, mas não estou lembrando"; 3. "Já que foi discutido que os dois segmentos de reta se dividem em partes iguais, seria pegar o segmento inteiro e dividir por dois"; 3. "Quando soubermos quem é a distância do segmento de reta todo, vai e divide por dois"; 3. "Aí se pedir a coordenada do ponto médio soma os pontos da ordenada e divide por dois, da mesma forma para abscissa"
--------	---	---

Fonte: extrato do plano 2.

Observa-se no extrato acima, a preocupação dos FPs com o conhecimento horizontal do conteúdo, ao reunirem questionamentos que poderiam conduzir os alunos à formalização do conteúdo (PONTE, 1999; RODRIGUES et al., 2018). Parte desse plano foi reaplicado em uma das turmas, por não ter dado tempo de discutir a tarefa 2 e a formalização do conteúdo, conforme planejado.

Os dados anteriores revelam que o processo de LS promoveu o desenvolvimento do conhecimento dos FPs ao longo do planejamento das aulas (PONTE, 2020), ao decidirem sobre a escolha e as características das tarefas matemáticas, ao anteciparem as ações dos alunos e a comunicação que poderia ser estabelecida entre FPs e alunos durante as aulas, de modo a minimizar as dúvidas e ampliar a compreensão conceitual (ALEXANDER, 2010; MACEDO, 2013). Para compreender e discutir o que aconteceu em cada aula, veremos os registros da professora supervisora-preceptora que atuou como observadora nas aulas.

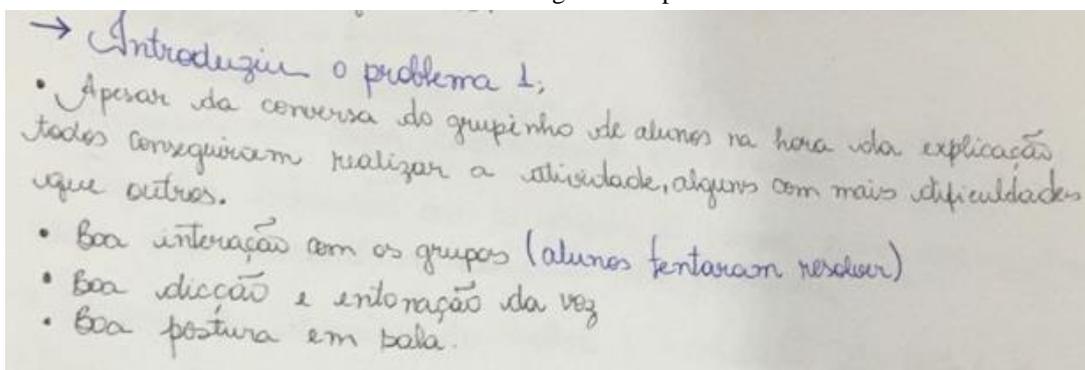
Análise crítica das aulas desenvolvidas (Plenária 2): o olhar da professora relacionado à prática letiva

No desenvolvimento do primeiro planejamento sobre plano cartesiano e distância entre dois pontos em duas turmas de 3º ano, a professora registrou que os questionamentos iniciais sobre plano cartesiano foram respondidos pelos alunos com timidez, ou porque não sabiam ou porque não lembravam (PONTE, 1999). A partir da tarefa 1 sobre os pontos do

plano cartesiano, ela registrou, também, que o FP regente interagiu com os grupos de alunos, por meio de postura profissional e comunicação adequadas (RODRIGUES et al., 2018; RICHIT; PONTE, 2020), como é possível ver na figura abaixo:

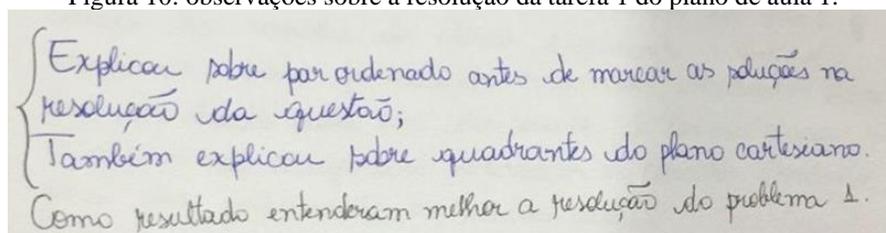
Figura 9: registro sobre introdução da tarefa 1 do plano de aula 1 no 3º ano D

Fonte: extrato dos registros da professora.



Ela dedica atenção à postura do FP regente e ao modo de se comunicar com os alunos, indo ao encontro do conhecimento do conteúdo e dos alunos, e do ensino. Todas essas observações foram escritas e apresentadas aos FPs após cada aula durante as reflexões pós-aulas (ALEXANDER, 2010; TAKAHASHI, 2014; WATANABE, 2018). No 3º D, o FP:

Figura 10: observações sobre a resolução da tarefa 1 do plano de aula 1.



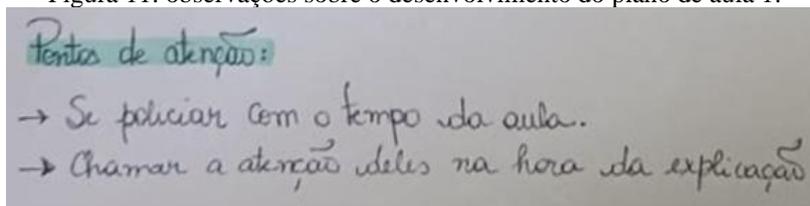
Fonte: extrato dos registros da professora.

Nessa situação, identifica-se que a professora valorizou a explicação do conteúdo antes da exploração das tarefas matemáticas, indicando seu questionamento sobre a posição da tarefa matemática em uma aula que adota a abordagem do ensino exploratório (RICHIT; PONTE, 2020). Ademais, o valor das explicações iniciais perante a capacidade dos alunos em resolverem a própria tarefa matemática. Essa situação é comum, mesmo entre professores que possuem experiência com outras metodologias de ensino relacionado à identificação dos propósitos para o ensino de matemática, na tomada de decisão para uma aula e o que os alunos devem aprender com as tarefas, bem como dimensionar sua associação com o currículo (PONTE, 1999; RODRIGUES et al., 2018; PINA NEVES et al., 2022).

Em relação à tarefa 2, no 3º C, não foi possível concluir sua resolução em sala e a professora anotou pontos relevantes para serem levados em outras aulas sobre a questão do

tempo, sobre a aprendizagem dos alunos (dificuldades) e o conhecimento sobre a prática letiva (PONTE; 1999; RICHIT; PONTE, 2020).

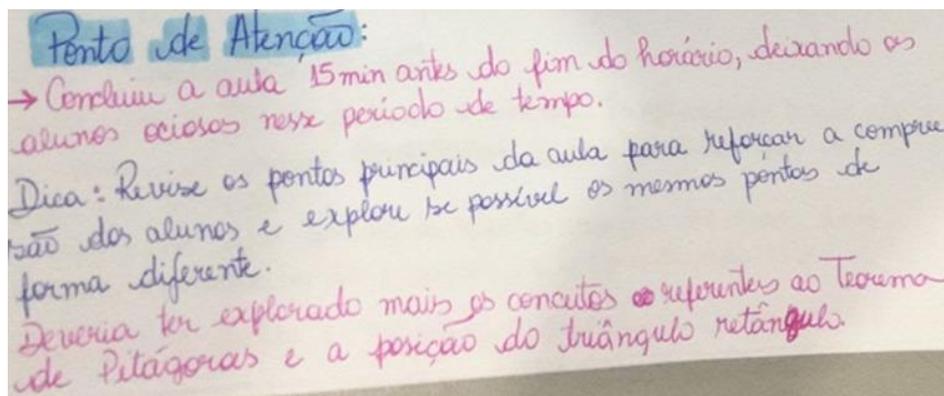
Figura 11: observações sobre o desenvolvimento do plano de aula 1.



Fonte: extrato dos registros da professora.

No 3º D, tarefa 2, “alguns conseguiram achar um caminho para solução; não lembravam do Teorema de Pitágoras, mas compreenderam a resolução a partir da explicação da resolução pelo futuro professor” (extrato dos registros da professora). Podemos questionar: como a professora tem certeza de que os alunos compreenderam se apenas ouviram a explicação? O conhecimento do conteúdo por parte de alguns alunos fica difícil de ser avaliado tendo como base o conhecimento expressado pelo FP regente, pois a professora conhece a turma, porém não há como avaliar se os alunos tinham aprendido na mobilização de conhecimentos envolvendo a prática letiva (PONTE; 1999; RICHIT; PONTE, 2020). Algumas observações também foram anotadas para o FPs que atuou na turma D:

Figura 12: observações sobre o desenvolvimento do plano de aula 1.



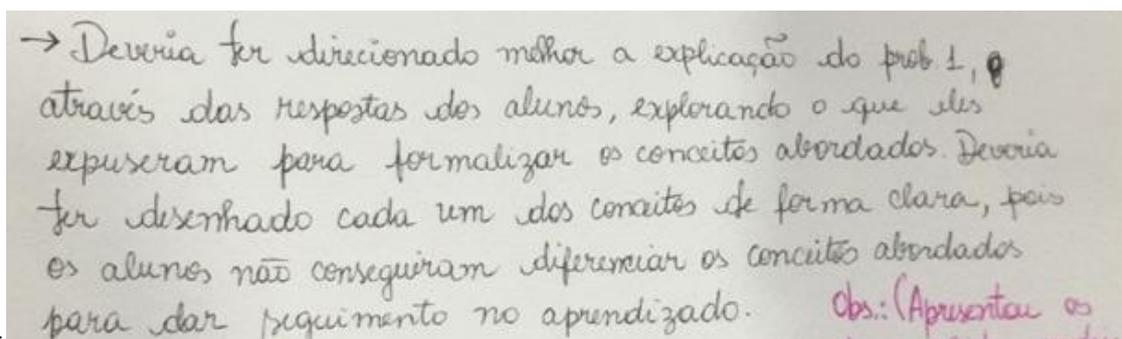
Fonte: extrato dos registros da professora.

A delimitação do tempo no planejamento e sua gestão durante o desenvolvimento da aula são ações difíceis para os FPs, em especial, pelo fato de não conhecerem em profundidade as turmas e de vivenciarem no ECSM e no PRP suas primeiras experiências de regência. Isso revela que, na condição de FPs, eles estão em processo de aprendizagem, construindo estratégias e lidando com os imprevistos não antecipados no plano de aula. Por

isso, a presença e as “dicas” da professora são essenciais nesse processo de transição de licenciando a professor (TAKAHASHI, 2014; WATANABE, 2018).

Em relação ao plano de aula 2, ministrado no 3º D, a professora observou que os alunos tentaram responder à tarefa 1 com os conhecimentos prévios, “mas não conseguiram expor corretamente os conceitos” sobre reta, semirreta e segmento de reta. Igualmente, que houve interação entre o FP regente e os grupos, acompanhando o momento da resolução de perto. Entretanto, quando foi para a discussão, a professora observou que:

Figura 13: observações sobre a discussão da tarefa 1 do plano 2.

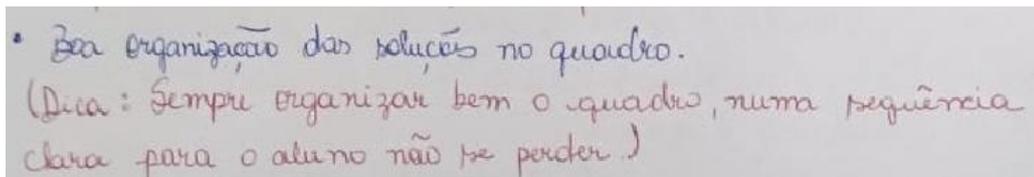


→ Deveria ter sido direcionada melhor a explicação do prob. 1, através das respostas dos alunos, explorando o que eles expuseram para formalizar os conceitos abordados. Deveria ter sido desenhado cada um dos conceitos de forma clara, pois os alunos não conseguiram diferenciar os conceitos abordados para dar seguimento no aprendizado. Obs.: Apresentar os

Fonte: extrato dos registros da professora.

Nesse extrato, percebe-se que a professora avança na compreensão da estrutura de uma aula planejada na perspectiva do ensino exploratório, falando que a explicação dos FPs deveria ter sido construída a partir das partilhas dos alunos para, em seguida, acontecer a formalização do conteúdo, mobilizações relacionadas à prática letiva (PONTE; 1999; RICHIT; PONTE, 2020). Além disso, fez observação sobre a representação dos conceitos abordados e da necessidade de mais clareza, destacando que não houve aprendizagem dos alunos (PONTE, 1999). O conhecimento da prática letiva e do conteúdo se faz presente nas observações da professora, contribuindo para o desenvolvimento profissional dos FPs (PONTE, 1999; WATANABE, 2018; RICHIT; PONTE, 2020). Comentou, em seguida, sobre uma ação desnecessária do FP regente, que pediu para os alunos copiarem no caderno os conceitos descritos nos slides, já que eles tinham acesso ao material. Este cuidado nas observações revela mais um aspecto do conhecimento da prática letiva da professora supervisora (PONTE; 1999; RICHIT; PONTE, 2020). Provavelmente, a intenção era que os alunos ao registrarem no caderno, prestassem atenção ao significado de cada conceito, entretanto, tal decisão influenciou na gestão do tempo da aula (ALEXANDER, 2010; MACEDO, 2013). Já na turma 3º C, houve a retomada da tarefa 2 do plano 1, o que rendeu observações da professora sobre a organização das soluções no quadro.

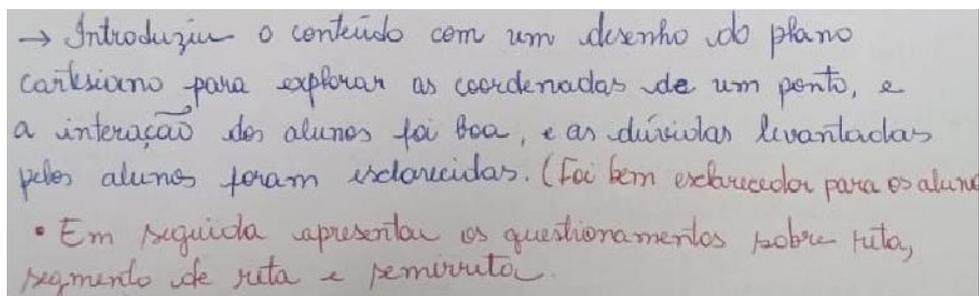
- Figura 14: observações sobre a organização do quadro



Fonte: extrato dos registros da professora.

Um elemento importante do processo de LS é a organização do quadro, especialmente das resoluções dos alunos, pois influencia na compreensão do conteúdo (MACEDO et al., 2019). Após essa explanação, o FP regente iniciou o plano 2 com o plano cartesiano.

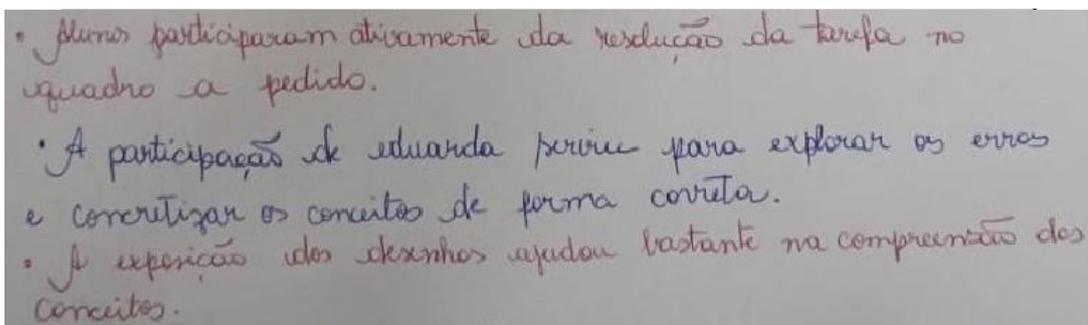
Figura 15: observações sobre a introdução do plano 2



- Fonte: extrato dos registros da professora.

Antes dos questionamentos, a exploração do plano cartesiano e das coordenadas contribuiu para a resolução da tarefa 1, que exigiu conhecimentos pedagógicos e específicos do conteúdo, com ida dos alunos ao quadro para registro de suas resoluções.

Figura 16: registros sobre a resolução da tarefa 1 do plano 2



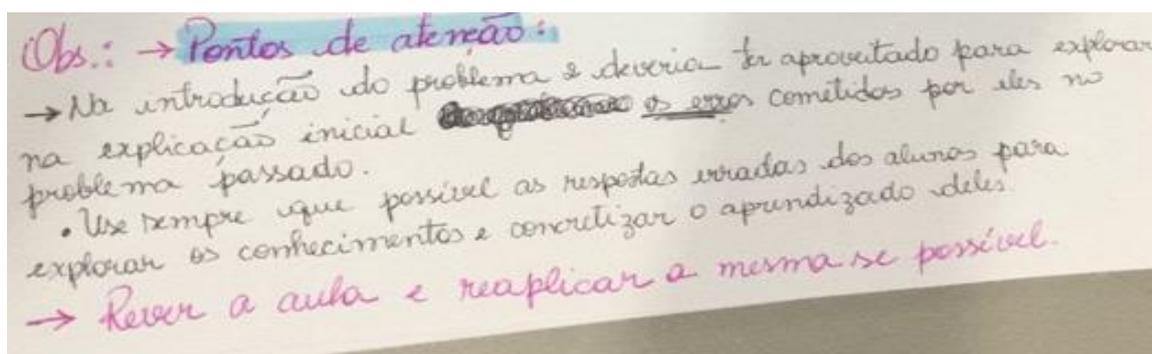
Fonte: extrato dos registros da professora.

A participação de uma aluna que, pelos registros, apresentou erros na resolução foi bem aproveitada pelo FP, conduzindo para melhor compreensão dos conceitos trabalhados

(PONTE, 1999; RODRIGUES et al., 2018). Além do mais, a representação pictórica esteve presente também nessa aula. A mobilização dos conhecimentos por parte dos FPs, reconhecidos pela professora supervisora, enfatizou o processo formativo que estava acontecendo para todos os participantes (PONTE; 1999; RODRIGUES et al., 2018; RICHIT; PONTE, 2020), relacionados também ao fazer pedagógico (NOGUEIRA; PAVANELLO, 2013).

Ainda em relação ao 3º D, o tempo não foi gerenciado de forma que todo o plano fosse implementado. Assim, a tarefa 2 foi introduzida, mas não houve tempo para discussão da resolução. Com isso, a professora destacou alguns elementos da aula:

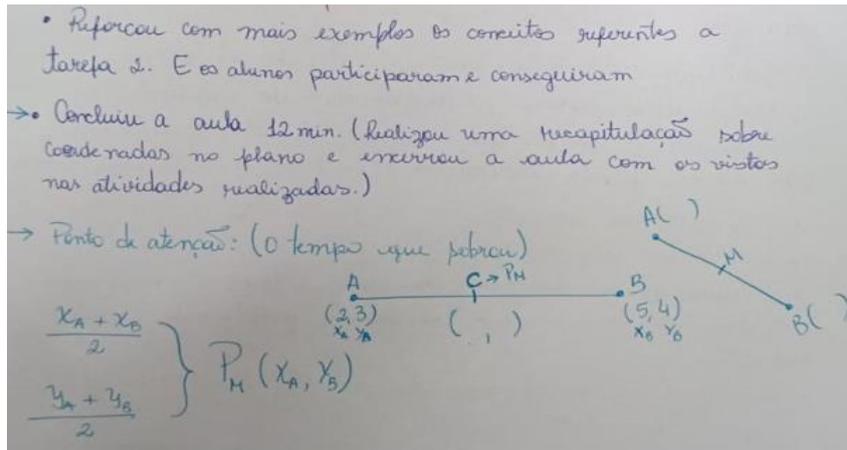
Figura 17: pontos observados pela professora sobre a execução do plano 2



Fonte: extrato dos registros da professora.

O conhecimento pedagógico e o específico do conteúdo precisava ter sido articulado melhor pelo FP regente, pois a tarefa 1 não foi concretizada com a aprendizagem efetiva dos alunos, acarretando a falta de entendimento da 2 e a necessidade de reaplicar a aula a partir desta tarefa (PONTE, 1999; RODRIGUES et al., 2018). A tarefa 2, no 3º D, teve bastante participação dos alunos, e com a resolução no quadro feita pelo FP, os alunos “conseguiram perceber a igualdade entre a questão ‘C’ e ‘E’” (extrato dos registros da professora) sobre o ponto C e suas coordenadas. Para concluir as observações, a professora comentou sobre os exemplos a mais para a compreensão da tarefa, que não estavam no plano, envolvendo a participação dos alunos. Na reflexão pós-aula destacou que os últimos 12 minutos de aula poderiam ter sido utilizados para discutir a forma geral para o cálculo das coordenadas de um ponto médio.

Figura 18: pontos observados pela professora sobre a execução do plano 2 no 3º D.



Fonte: extrato dos registros da professora.

Mais uma vez, a falta de gestão do tempo se faz presente em outra aula e a observação da professora foi sempre em relação à possibilidade de aproveitamento para recapitular, discutir o que foi trabalhado em toda a aula (PONTE, 1999; RICHIT; PONTE, 2020; RODRIGUES et al., 2018).

Discussão dos resultados

O ciclo de LS permitiu ampla comunicação entre todos os envolvidos, FPs, professoras orientadoras e professora supervisora-preceptora (MACEDO, 2013). De modo particular, notou-se o desenvolvimento da liderança da professora supervisora-preceptora (WATANABE, 2018), pois nos registros apresentados, há argumentações que mostram que essa professora compreende o processo de LS em curso, o que constitui fator importante e catalisador para que um ciclo de LS seja bem-sucedido. Diante dos planos apresentados, nota-se a articulação entre o conhecimento pedagógico do conteúdo, o conhecimento específico do conteúdo, a relação com a linguagem materna, relacionados às categorias de análise (PONTE, 1999; BALL et al., 2008; RICHIT; PONTE, 2020).

Nas duas etapas do processo de LS, observa-se a valorização dos momentos evocando a atividade profissional, diante da forma como foi conduzida a comunicação e as reflexões por melhorias da prática letiva para alcance dos objetivos dos planejamentos (ALEXANDER, 2010; WATANABE, 2018; RICHIT; PONTE, 2020; PINA NEVES et al., 2022), desde a escolha/adaptação/elaboração das tarefas até a maneira como foram conduzidas em sala de aula e sintetizadas com a formalização do conteúdo ao final de cada aula.

Observou-se que a professora acompanhou, em minúcias, o planejamento e as tarefas matemáticas, preocupando-se em refletir, no pós-aula, a organização da aula e as antecipações das ações dos professores e dos alunos. Do mesmo modo, atentou-se à posição da tarefa matemática nas aulas desenvolvidas, revelando que sua compreensão sobre o ensino exploratório avança, demarcando em suas falas ora alinhamento, ora questionamento (CANAVARRO, 2011; SERRAZINA, 2017). Desde o tema de cada aula, de acordo com o calendário escolar, os objetivos escolhidos/adaptados/elaborados a partir da BNCC, o estudo baseado em artigos científicos contribuindo na elaboração das antecipações das ações/questionamentos dos professores e nas ações dos alunos, os conhecimentos estão presentes e relacionados de forma sequencial, em perspectiva além da matemática a ser ensinada em sala de aula (PONTE, 1999; BALL et al., 2008; RICHIT; PONTE, 2020).

O processo de LS, conforme o olhar da professora supervisora-preceptora, oportuniza o desenvolvimento do conhecimento dos FPs a partir do planejamento de uma aula, sobre o desenho de tarefas, a antecipação do trabalho dos alunos, e sobre a comunicação antes, durante e após as aulas ministradas (ALEXANDER, 2010; RICHIT; PONTE, 2020; PINA NEVES et al., 2022). A capacidade, o desenvolvimento e a partilha do conhecimento da professora supervisora-preceptora são evidenciados especialmente ao fornecer os comentários finais após a discussão sobre regência (WATANABE, 2018; LEWIS; HURD, 2011). Como refletido por Takahashi (2014) e Watanabe (2018), sobre o papel dos comentários críticos em um processo de LS, a experiência da professora contribuiu para entender as ações e o papel dos FPs. Assim, desenvolveu-se a comunicação, a mobilização de conhecimentos e a colaboração a partir de um olhar experiente junto aos FPs em formação (ALEXANDER, 2010; LEWIS; HURD, 2011; MACEDO, 2013).

A partir das análises, foi possível observar elementos do conhecimento profissional da professora supervisora-preceptora tendo em vista sua experiência docente, que resulta da mesclagem de diferentes tipos de conhecimentos, com base em sua própria prática letiva (PONTE, 1999; RODRIGUES et al., 2018; RICHIT; PONTE, 2020).

Logo, a forma como o LS foi organizado também influenciou o desenvolvimento do conhecimento dos FPs (PONTE, 1999; RODRIGUES et al., 2018), pois a partir do olhar atento da professora supervisora-preceptora, foram apresentados os desafios que os FPs enfrentaram na compreensão de aspectos do trabalho pedagógico e didático. Tais aspectos se evidenciaram desde a organização do quadro, a postura enquanto regente, a linguagem utilizada, seja informal ou matemática, dependendo do momento da aula, a entonação da

voz, a forma de abordar os alunos, atentando-se a todos os grupos e não só a um, buscando compreender e valorizar as estratégias utilizadas por cada um na resolução das tarefas, sintetizando claramente os conceitos construídos em cada formalização, entre outros.

Considerações finais

Para estas considerações, retomamos o objetivo do estudo, qual seja, discutir os conhecimentos matemáticos e da prática letiva observados por uma professora de Matemática nos momentos de reflexão pós-aulas ministradas por FPs. Assim, evidenciou-se que esta desempenhou sua função com interesse e responsabilidade, aliando conhecimentos profissionais que ela já possuía, observando os conhecimentos matemáticos e a prática letiva dos FPs (em desenvolvimento por meio dos ciclos de LS), destacando pontos que precisavam melhorar. Ao fazer isso, ela ampliou, também, seus conhecimentos profissionais sobre a própria prática letiva, bem como os seus conhecimentos sobre o LS e sua pertinência enquanto processo de desenvolvimento profissional (RICHIT; PONTE; TOMKELSKI, 2019; SILVA, 2020; LOSANO, FERRASSO; MEYER, 2021; PINA NEVES; FIORENTINI, 2021).

Suas análises mostraram duas gerações de professores (os FPs e ela) na busca por compreender uma nova abordagem de ensino, comparando-a a outras já conhecidas. Em muitos momentos, foi possível observar marcadores do paradigma do exercício assumindo força em sua fala, em outros nota-se que ele perde vigor, dando espaço para outros modos de organizar a sala, de compartilhar a produção dos estudantes, aproximando-a do ensino exploratório. Tudo isso confirma o quanto o acesso a novas práticas é lento e carece de apoio para se sustentar (LEWIS; HURB, 2011; FIORENTINI; SILVA; SILVA, 2022).

O processo de desenvolvimento profissional por meio do qual o professor tem a possibilidade de refletir sobre a prática profissional em um contexto de colaboração, como, por exemplo, o processo de LS no contexto de ECSM e de PRP que a professora vivenciou, é destacado em cada resultado (LEWIS, 2002). A etapa do estudo e planejamento é essencial num ciclo de LS, visto que o envolvimento entre os participantes é intensificado, gerando diálogos, divergências e convergências (SILVA, 2020; PINA NEVES; FIORENTINI, 2021; PINA NEVES;). Tudo isso fortalece a coletividade e possibilita que a colaboração se efetive. E a reflexão pós-aula, ocasião em que se contrapõe o planejamento à aula desenvolvida, gera importantes aprendizagens profissionais sobre o ensino e a aprendizagem dos alunos (LEWIS, 2002; MURATA, 2011).

Ao longo das observações das aulas registradas pela professora e nos momentos de reflexões, ela revive o planejamento de modo intenso, demarcando elementos que os FPs precisavam melhorar nas aulas seguintes. Ela observa aspectos dos conhecimentos matemáticos e da prática letiva, mostrando estar atenta à aula e revelando que transita bem por esses conhecimentos, corroborando que o processo de LS contribui para essa mobilização (RODRIGUES et al., 2018). E ao auxiliar FPs a se desenvolverem nesses aspectos, ela mostra que integrar o ECSM e o PRP, em processo de LS, tem sido importante para o seu desenvolvimento profissional enquanto professora. Esses dois contextos oportunizam uma condição privilegiada, pois nas horas de estudo sobre LS, o contato com as ações de planejar, discutir, analisar e tomar decisões coletivamente amplia-se dando à professora mais vivências formativas, o que impacta em sua identidade profissional, transformando-a em uma profissional protagonista, propositiva, analítica nas reflexões pós-aula. Isso reverbera em suas ações, especialmente, na postura de professora supervisora-preceptora (pesquisadora) que passa a assumir.

A análise dos momentos de discussões e interações entre a professora e os FPs revelam características distintas do conhecimento pedagógico, incorporadas em suas conversas nos momentos de planejamento e reflexão, fornecendo evidências empíricas de desenvolvimento profissional da professora (RICHIT; PONTE, 2020; PINA NEVES; FIORENTINI, 2021; PINA NEVES et al., 2022).

No entanto, nota-se como limitação do estudo, o fato de não aprofundar a mobilização do conhecimento didático e do conteúdo (PARGA; MORA, 2014; LOSANO; DENARI; CAVALHEIRO, 2017) no caso da professora. Estendendo assim, como indicação para futuras pesquisas, refletir as ações que possibilitaram observar o conhecimento da prática letiva da professora e a mobilização dos conhecimentos, mediados pela comunicação entre os envolvidos e por mais dados que evidenciem, além de conhecimentos, as oportunidades de aprendizagem profissional da professora supervisora-preceptora nas discussões entre os participantes do processo de LS, sobre o planejamento e a regência de uma aula. Ainda, pode-se analisar essas ações observando as práticas da professora enquanto ministra suas próprias aulas, compreendendo como mobiliza esses conhecimentos a partir de sua participação nos ciclos de LS.

Referências

- ACEVEDO, J.; FIORENTINI, D. Práticas na formação dos licenciados em matemáticas: a experiência de uma prática interdisciplinar. **Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología**, Universidad Pedagógica Nacional, v. 40, p. 129-147, 2016.
- ALEXANDER, R. **Dialogic teaching essentials**. Singapore: National Institute of Education, 2010. Disponível em: <https://www.nie.edu.sg/docs/default-source/event-document/final-dialogic-teaching-essentials.pdf>. Acesso em: 05 jun. 2020.
- BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching. **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.
- BENEDICTO, S. C. de *et al.* Postura metodológica indutiva e dedutiva na produção científica dos estudos em administração e organizações: uma análise de suas limitações e possibilidades. **Revista Economia & Gestão**, v. 12, n. 30, set./dez. 2012.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Educação é a Base: Ensino Médio, 2018.
- BRASIL. Ministério da Educação. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. **Edital 6 – Chamada Pública para apresentação de propostas no âmbito do Programa de Residência Pedagógica**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.
- CANAVARRO, A. P. Ensino Exploratório da Matemática: Prática e desafios. **Revista Educação e Matemática**, n. 115, p. 11-27, 2011.
- CARRILLO-YAÑEZ, J. *et al.* The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018.
- CRECCI, V. M.; PAULA, A. DE; FIORENTINI, D. Desenvolvimento profissional de uma professora dos anos iniciais que participa de um Lesson Study Híbrido. **Educere et Educare**, n. 14, p. 1-21, 2019.
- CRESWELL, J. W. **Research Design: Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches**. 4. ed. Thousand Oaks: Sage, 2014.
- Curi, E. Lesson Study: contribuições para formação de professores que ensinam matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 34, p. 1-19, 2021.
- DAUANNY, E. B; LIMA, M. S. L; PIMENTA, S. G. (2019). A produção teórico-prática sobre o estágio na formação do professor: uma revisão crítica. **Revista Interdisciplinar Sulear**, ano 1, n. 3, p. 1-18, 2019.
- FIORENTINI, D. *et al.* Estudo de uma experiência de Lesson Study Híbrido na formação docente em matemática: contribuições de/para uma didática em ação. **Anais do XIX Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino**, v. 1, p. 1-38). Endipe, 2018.
- FIORENTINI, D.; CASTRO, F. C. Tornando-se professor de matemática: o caso de Allan em prática de ensino e estágio supervisionado. In: FIORENTINI, D. (Org.). **Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. Campinas: Mercado de Letras, 2003. p. 121-156.
- GATTI, B. A. Formação inicial de professores para a educação básica: pesquisas e políticas educacionais. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, v. 25, n. 57, p. 24-54, 2014.
- GOMES, M. L. M. Os 80 anos do primeiro curso de Matemática brasileiro: sentidos possíveis de uma comemoração acerca da formação de professores no Brasil. **Bolema**, v. 30, n.55, p. 424-438, 2016.

JÄHRING WANDERLEY, R. A.; VEIGA FERREIRA DE SOUZA, M. A. Lesson Study como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática sobre o conceito de volume. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 13, n. 33, p. 1-20, 2020.

KUENZER, A. Z. A precarização do trabalho docente: o ajuste normativo encerrando ciclo. *In: AFFONSO, C. et al. Trabalho docente sob fogo cruzado*. v. 2. Rio de Janeiro: Ed. UERJ, 2021. p. 235-250.

LEWIS, C. **Lesson study**: A handbook of teacher-led instructional change. Philadelphia: Research for Better Schools, 2002.

LEWIS, C.; HURD, J. **Lesson study step by step**: How teacher learning communities improve instruction. Portsmouth: Heinemann, 2011.

LOSANO, A. L.; FERRASSO, T. O.; MEYER, C. (Orgs.). **Narrativas de aulas de matemática no Ensino Médio**: aprendizagens docentes no contexto de Lesson Study híbrido. Brasília: SBEM, 2021. (Coleção SBEM – v. 18).

LOZANO, D. L. P.; DENARI, G. B.; CAVALHEIRO, G. C. S. Conhecimento didático do conteúdo de professores de Ciências da Natureza e Matemática: análise a partir dos desenhos curriculares. **Revista Ensaio**, v. 19, e292, 2017.

MACEDO, A. D. R. **As representações matemáticas em dois contextos**: Portugal e Brasil. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2013.

MAZIERO, A. R.; CARVALHO, D. G. A contribuição do supervisor de estágio na formação dos estagiários. **Acta Scientiae**, v. 14, n.1, p. 63-75, 2012.

NOGUEIRA, C. M. I.; PAVANELLO, R. M. A iniciação à pesquisa em educação matemática na formação inicial do professor. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 2, n. 2, p. 28-40, 2013.

NÓVOA, A. Firmar a posição como professor, afirmar a profissão docente. **Cadernos de Pesquisa**, v. 47, n. 166, p. 1106-1133.

NÓVOA, A. Para uma formação de professores construída dentro da profissão. **Revista Educación**, n. 350, p. 203-218, 2009.

PARGA, D. L.; MORA, W. M. El PCK, un espacio de diversidad teórica: conceptos y experiencias unificadoras en relación con la didáctica de los contenidos en química. **Educación Química**, México: Universidad Nacional Autónoma de México; México: Elsevier, v. 25, n. 3, p. 332-342, 2014.

PINA NEVES, R. DA S.; FIORENTINI, D.; SILVA, J. M. P. da. Lesson Study presencial e o Estágio Curricular Supervisionado em Matemática: contribuições à aprendizagem docente. **Revista Paradigma**, v. 43, n. 1, p. 409-442, 2022.

PINA NEVES, R. DA S.; FIORENTINI, D.; SILVA, J. M. P. da. Lesson Study Presencial e o Estágio Curricular Supervisionado em Matemática: contribuições à aprendizagem docente. **Revista Paradigma**, v. 43, n. 1, p. 409-442, 2022.

PINA NEVES, R. DA S.; SILVA, A. D. R. DE M.; FIORENTINI, D.; SILVA, J. M. P. DA. Uma experiência de Lesson Study no Estágio Curricular Supervisionado em Matemática: construção e análise colaborativa de um Plano de Aula. *In: RICHIT, A.; PONTE, J. P.; GOMEZ, E. S. (Orgs.). Estudos de aula na formação inicial e continuada de professores*. São Paulo: Livraria da Física, 2022. v. 1. p. 267-307.

- PINA NEVES, R. S.; FIORENTINI, D. Aprendizagens de futuros professores de matemática em um estágio curricular supervisionado em processo de Lesson Study. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 34, p. 1-30, 2021.
- PONTE, J. P. Didáticas específicas e construção do conhecimento profissional. *In*: TAVARES, J.; PEREIRA, A.; PEDRO, A. P.; SÁ, H. A. (Eds.). **Actas do IV Congresso da SPCE: Investigar e formar em educação**. Porto: SPCE, 1999. pp. 59-72.
- PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, n. 25, p. 105-132, 2006.
- PONTE, J. P. O estudo de caso na investigação em educação matemática. **Quadrante**, v. 3, n. 1, p. 3-18, 1994.
- PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. *In*: PONTE, J. P. (Org.). **Práticas profissionais de professores de matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p. 13-30.
- PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; BAPTISTA, M.; MATA-PEREIRA, J. Os estudos de aula como processo colaborativo e reflexivo de desenvolvimento profissional. *In*: SOUSA, J.; CEVALLOS, I. (Eds.). **A formação, os saberes e os desafios do professor que ensina Matemática**. Curitiba: Editora CRV, 2014. p. 61-82.
- RICHIT, A.; PONTE, J. P. Conhecimentos profissionais evidenciados em estudos de aula na perspectiva de professores participantes. **Educação em Revista**, v. 36, e190996, 2020.
- RICHIT, A.; PONTE, J. P.; TOMKELSKI, M. Estudos de aula na formação de professores de matemática do ensino médio. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 100, n. 254, p. 54-81, 2019.
- RODRIGUES, C.; MENEZES, L.; PONTE, J. P. Práticas de discussão em sala de aula de matemática: os casos de dois professores. **Bolema**, v. 32, n. 61, p. 398-418, 2018.
- SERRAZINA, M. Planificação do ensino e aprendizagem da matemática. *In*: GTI (Org.). **A prática dos professores: planificação e discussão em sala de aula**. Lisboa: APM, 2017. p. 9-31.
- SHULMAN, L. Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma. **Cadernos Cenpec**, v. 4, n. 2, p. 196-229, 2014.
- SILVA, A. D. R. M. **Contribuições da Jugyou Kenkyuu e da engenharia didática para a formação e o desenvolvimento profissional de professores de Matemática no âmbito do estágio curricular supervisionado**. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.
- TAKAHASHI, A. The Role of the Knowledgeable Other in Lesson Study: Examining the Final Comments of Experienced Lesson Study Practitioners. **Mathematics Teacher Education and Development**, v. 16, n. 1, 2014.
- WATANABE, T. Japanese lesson study in the United States: looking back and looking ahead. **Educational Designer**, v. 11, n. 3, p. 1-13, 2018.
- YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. 3 ed. Porto Alegre: Bookman, 2005
- ZIMMER, I. **Estágio Curricular Supervisionado na Licenciatura em Matemática: um componente curricular em discussão**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.

Autores

***Aluska Dias Ramos de Macedo* (*)**

Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual da Paraíba
Mestrado em Educação, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco
Universidade Federal de Campina Grande

(*) Grupo de Investigação em Ensino de Matemática (GIEM)
Linha de Pesquisa em Formação de Professores
aluskadrmacedo@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-0398-1097>

***Regina da Silva Pina Neves* (*)**

Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Goiás
Mestrado em Educação, Universidade de Brasília
Doutorado em Psicologia, Universidade de Brasília
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
reginapina@mat.unb.br

<https://orcid.org/0000-0002-7952-9665>

***Janaína Mendes Pereira da Silva* (*)**

Licenciatura em Matemática, Faculdade Jesus Maria José
Mestrado em Educação, Universidade de Brasília
Doutoranda, Universidade Federal do ABC (UFABC)
jana.mendes.ps@gmail.com
<http://orcid.org/0000-0002-6540-1521>

Como citar o artigo:

MACEDO, A. D. R.; NEVES, R. S. P.; SILVA, J.M. P. Desenvolvimento Profissional de uma professora de Matemática: oportunidades no contexto do Estágio Curricular Supervisionado e do Programa de Residência Pedagógica em processo de Lesson Study. **Revista Paradigma**, Vol. XLIV, Edição Temática Estudio de Clases: Contribuciones de la educación japonesa en diferentes países, mayo de 2023 /398 – 424. DOI: <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p398-424.id1425>



Revista del Centro de Investigaciones Educativas Paradigma

Depósito Legal AR2019000054



10.37618



1011-2251



2665-0126

Volumen XLIV

Edición Temática Nº 1

Lesson Study en la Enseñanza de la Matemática:
Contribuciones de la Formación Japonesa en Diferentes Países
Mayo de 2023

PARECERISTAS

Ana Maria Porto Nascimento

Universidade Federal do Oeste da Bahia

Adriana Richit

Universidade Federal da Fronteira Sul

Carlos Miguel da Silva Ribeiro

Universidade Estadual de Campinas

Cristiano Alberto Muniz

Universidade de Brasília

Cristina Meyer

Universidade Estadual de Campinas

Edmo Fernandes Carvalho

Universidade Federal do Oeste da Bahia

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza

Instituto Federal do Espírito Santo

Masami Isoda

University of Tsukuba

Mauro Luiz Rabelo

Universidade de Brasília

Regina da Silva Pina Neves

Universidade de Brasília

Renata Camacho Bezerra

Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Yuriko Yamamoto Baldin

Universidade Federal de São Carlos