

# EL REBOTE PARABÓLICO DE UNA PARTÍCULA SOBRE UNA SUPERFICIE RECTA INCLINADA

Alberto Antonio Tirado Sanabria

[alberto.tirados@ug.edu.ec](mailto:alberto.tirados@ug.edu.ec)

Universidad de Guayaquil

Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas

Coordinación de Física

Ecuador

**Recibido:** 17/05/2018 **Aceptado:** 17/05/2018

## Resumen

En el lanzamiento de proyectiles, todo cuerpo describe un movimiento parabólico cóncavo hacia abajo por efecto de la gravedad terrestre, y la trayectoria va desde que se lanza hasta que choca con una superficie. Si esta es una recta, el choque se considera elástico, (coeficiente de restitución:  $e=1$ ), y el cuerpo se asume como una partícula entonces el ángulo de incidencia se puede asumir igual al del rebote; lo que genera un movimiento parabólico consecuente y conocido en los casos de: rebote sobre una recta vertical y sobre una recta horizontal, (idealizados a nivel básico). Pero si el rebote ocurre sobre una recta inclinada la dirección de salida resulta hasta ahora desconocida en el mundo de la Física clásica. En este artículo se expone la deducción de dos ecuaciones que permiten conocer la dirección de salida de un movimiento parabólico originado como consecuencia de un rebote sobre una recta inclinada, con ejemplos de casos posibles. Este resultado es definitivo en el objetivo de permitir el estudio de los movimientos parabólicos consecuentes a este nivel sin el estudio de la cantidad de movimiento y el análisis de energía; sin embargo, tales formulas resultan un preliminar para la variedad de situaciones que se pueden generar en la ejercitación de situaciones didácticas de la cinemática básica, así como sus puestas a prueba de verificación.

**Palabras claves:** Rebote parabólico sobre una inclinación.

## THE PARABOLIC REBOUND OF A PARTICLE ON A STRAINED STRAIGHT SURFACE

### Abstract

In the launching of projectiles, everybody describes a parabolic movement concave downwards by the effect of terrestrial gravity, and the trajectory goes from being thrown until it hits a surface. If this is a line, the shock is considered elastic, (coefficient of restitution:  $e = 1$ ), and the body is assumed as a particle so the angle of incidence can be assumed equal to the rebound; what generates a consistent and known parabolic movement in the cases of: bouncing on a vertical line and on a horizontal line, (idealized at the basic level). But if the rebound occurs on an inclined straight line, the direction of exit is hitherto unknown in the world of classical physics. In this article, we expose the deduction of two equations that allow us to know the direction of departure of a parabolic movement originated because of a rebound on an inclined line, with examples of possible cases. This result is definitive in the objective of allowing the study of the parabolic movements consequent at this level without the study of the amount of movement and the analysis of energy; However, such formulas are a preliminary for the variety of situations that can be generated in the exercise of didactic situations of the basic kinematics, as well as their verification testing.

**Keywords:** Parabolic rebound on an inclination.

## Introducción

El rebote parabólico existe en cuerpos con capacidad elástica e incluso en ondas espaciales, que al colisionar con una superficie asumida como impenetrable y de suficiente masa, entonces se produce un rebote en ángulo conocido y en función de idealizaciones sobre el ángulo de incidencia que hasta ahora se resumen en los casos de superficies rectas horizontales y verticales; luego si la superficie recta es inclinada el conocer la dirección de rebote es un tema de la mecánica avanzada en la carrera de ingeniería. En este trabajo se ofrece una sencilla deducción euclidiana para este tema con la idealización de la conservación del ángulo de rebote con respecto a la superficie de choque, para cálculos de la mecánica clásica en la Física I del básico universitario de ingeniería y a manera introductoria.

A continuación, se conceptualiza sobre el tema del rebote parabólico, se definen las variables involucradas y de ilustran diferentes situaciones posibles en el rebote de partículas sobre superficies rectas inclinadas, como marco teórico para este nivel básico de la Física universitaria.

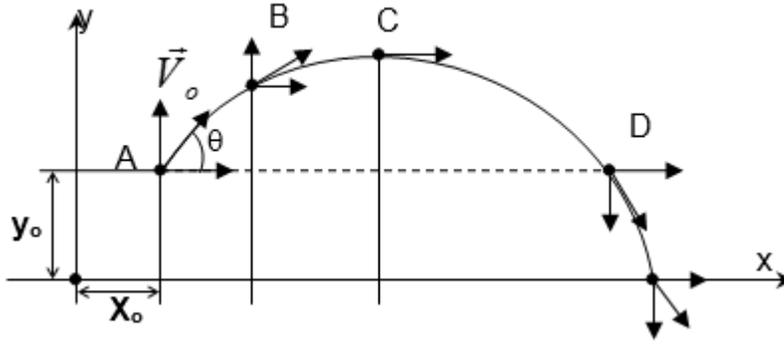
### a) Movimiento en el plano del tipo parabólico

Cuando la aceleración  $\vec{a}_x$  en el eje “X” es igual a cero (movimiento horizontal uniforme), la aceleración  $\vec{a}_y$  en el eje “Y” es la gravedad terrestre y no se considera la fricción del aire (movimiento vertical acelerado libre), entonces se dice que es un movimiento parabólico; (Serway R. 1999).

$$\text{Ecuación: 1 } \vec{X}_f = \vec{X}_0 + \vec{V}_{0x} \cdot t \quad \text{Ecuación: 2 } \vec{V}_f y = \vec{V}_{0y} + g \cdot t$$

$$\text{Ecuación: 3 } \vec{Y}_f = \vec{Y}_0 + \vec{V}_{0y} \cdot t + 1/2 g \cdot t^2 \quad \text{Ecuación: 4 } \vec{V}_f y^2 = \vec{V}_{0y}^2 + 2g(\Delta Y)$$

En el siguiente esquema, ver figura 1, se muestra un típico lanzamiento de proyectiles con una velocidad inicial de componente en los ejes positiva y un ángulo  $\theta$  con la horizontal en: el punto “A” o punto del lanzamiento, su movimiento en los puntos “B” y “C” (altura máxima del lanzamiento), y en “D” donde regresa a la altura de lanzamiento culminando en el piso referencial; (Sears, F. Zemansky, M./Young, H. 1999).



**Figura 1: Esquema de un movimiento parabólico general de una partícula**

Dónde:

$$\vec{V}_o = \vec{V}_{ox} + \vec{V}_{oy} \text{ Como el vector velocidad inicial. Ecuación: 5}$$

$$\vec{V}_f = \vec{V}_{fx} + \vec{V}_{fy} \text{ Como el vector velocidad final. Ecuación: 6}$$

El ángulo en cualquier punto del movimiento parabólico, con la horizontal será

$$\text{Tan}^{-1}(V_{fy}/V_{fx}). \text{ Ecuación: 7}$$

b) Colisión: es el evento entre dos o más cuerpos que entran en “contacto” en una fracción de tiempo, y donde existe la transmisión de fuerzas impulsivas. Una colisión puede ser elástica si existe conservación en la energía cinética (la rapidez de impacto o de compresión es igual a la rapidez de rebote o restitución); y plástica si existe pérdida en la rapidez.

c) Rebote: es una tipología de colisión donde un cuerpo choca con una superficie impenetrable de masa considerablemente mayor de tal forma que la transmisión de fuerza del cuerpo no afecta la inercia de la superficie y en consecuencia el cuerpo invierte el total o parte de su velocidad de incidencia.

d) Ángulos característicos en el rebote, simbología usada en este trabajo: como simbología en este trabajo se utilizaron las siguientes letras del alfabeto griego para denotar los ángulos que intervienen y caracterizaran al movimiento parabólico y a su posible rebote de una superficie sólida

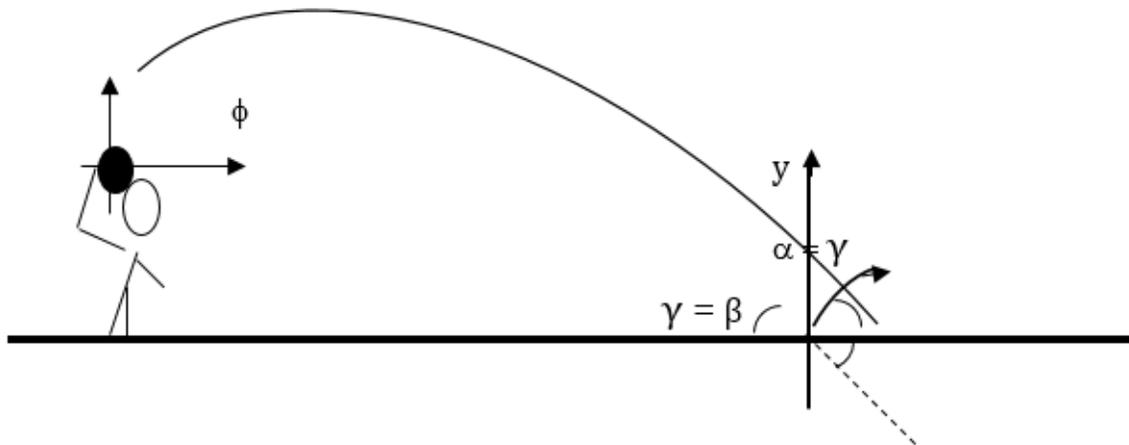
$\Phi$ : Ángulo del lanzamiento parabólico.

$\beta$ : Ángulo de incidencia o de contacto con la superficie donde choca la partícula, con respecto a la horizontal.

$\alpha$ : Ángulo del rebote o dirección de salida de la partícula después del contacto, con respecto a la horizontal.

$\theta$ : Ángulo de la inclinación, con respecto a la horizontal, de la superficie recta en donde ocurre el contacto; sea esta horizontal, vertical o inclinada.

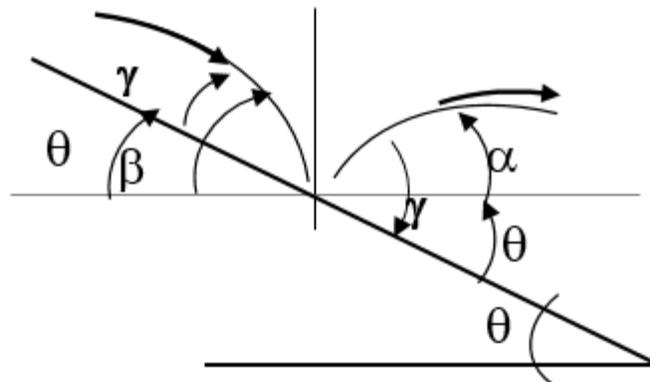
$\gamma$ : Ángulo aceptado como común, del antes y después del rebote, con respecto a la superficie de contacto; situación idealizada. Ver figura 2



**Figura 2: Esquema de los diferentes ángulos en un rebote parabólico.**

e) Deducción del ángulo de rebote: el ángulo de rebote sobre una superficie recta inclinada para un cuerpo que rebote, y este se acepte como elástico, tendrá dos partes definidas como: 1) rebote parabólico hacia abajo sobre una recta inclinada y 2) rebote parabólico hacia arriba sobre una recta inclinada, a continuación, se describen estas situaciones

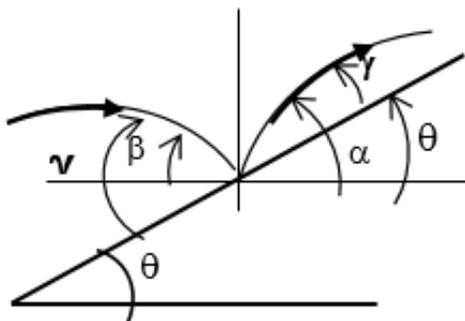
1) Rebote parabólico en rebote “hacia abajo”, sobre una recta inclinada, figura 3



**Figura 3: Rebote parabólico: “hacia abajo” sobre una recta inclinada**

El cuerpo al rebotar incide sobre la línea recta inclinada, con un ángulo “ $\gamma$ ” el cuál se asume como “igual” en el rebote con respecto a la inclinación, es decir se conserva con respecto a la recta que representa la inclinación, como se indica en la figura 3, pero el ángulo de incidencia con respecto a la horizontal denominado con la letra griega beta “ $\beta$ ” se obtiene por la tangente inversa de los componentes del vector velocidad final cuando hace contacto con la superficie inclinada, siendo el dato inicial que se tiene, el ángulo “ $\gamma$ ” se obtiene con la relación:  $\gamma = \beta - \theta$ , luego al trasladar esta relación hacia el lado del rebote se puede obtener el ángulo de rebote “ $\alpha$ ” con respecto a la horizontal, como:  $\alpha = \gamma - \theta$ . De estas dos relaciones se obtiene la fórmula para obtener la dirección de salida con respecto a la horizontal, en función de  $\beta$  y  $\theta$ , la cual permite el cálculo de variables del movimiento parabólico hacia abajo en un rebote sobre una línea recta inclinada; en la situación idealizada para una partícula, desde el punto de vista de la cinemática clásica. **( $\alpha = \beta - 2\theta$ ).** **Ecuación: 8.**

2) Movimiento parabólico en rebote “hacia arriba”, sobre una recta inclinada, ver figura 4



**Figura 4: Rebote parabólico: “hacia arriba” sobre una recta inclinada.**

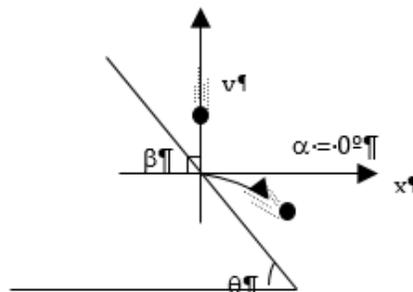
El cuerpo al rebotar incide sobre la línea recta inclinada con un ángulo “ $\gamma$ ” el cuál se asume como “igual” para el rebote con respecto a la inclinación, como se indica en la figura 4, pero el ángulo de incidencia con respecto a la horizontal denominado con la letra griega beta “ $\beta$ ” se obtiene por la tangente inversa de los componentes del vector velocidad final cuando hace contacto con la superficie inclinada, siendo el dato inicial que se tiene, el ángulo “ $\gamma$ ” se obtiene con la relación:  $\gamma = \beta + \theta$ , luego al trasladar esta relación hacia el lado del rebote se puede obtener el ángulo “ $\alpha$ ” de rebote con respecto a la referencia horizontal, como:  $\alpha = \gamma + \theta$ . De estas dos relaciones se obtiene la fórmula para obtener la dirección de salida con respecto a la horizontal, en función de  $\beta$  y  $\theta$ , la cual permite el cálculo de variables del movimiento parabólico hacia arriba en un rebote sobre una recta inclinada. ( $\alpha = \beta + 2\theta$ ). **Ecuación: 9.**

Estas dos ecuaciones permiten el cálculo de variables como: Vector velocidad final, ángulo de incidencia, distancia total desplazada, tiempo total de vuelo y otros estudios de un movimiento parabólico que sea resultante de uno o varios rebotes sobre una superficie recta inclinada, a nivel de la física inicial en el básico universitario; siempre que se establezcan las consideraciones iniciales: que sea una partícula y el rebote se asume como elástico, con coeficiente de restitución del rebote igual a 1. La inversión de la componente vertical o la anulación de una de las componentes de la velocidad en el plano dependerá del ángulo de incidencia “ $\beta$ ”, el cual se calcula por la dirección de la velocidad de contacto con la superficie y el ángulo de rebote “ $\alpha$ ” depende del ángulo de incidencia y del ángulo “ $\theta$ ” (inclinación de la superficie de contacto).

Las ecuaciones propuestas 8 y 9, son deducciones realizadas bajo la idealización propuesta de que el ángulo de incidencia y de rebote, con respecto a la inclinación “ $\gamma$ ” es igual; sin considerar las fricciones por la colisión y que el ángulo de rebote se vea afectado por el coeficiente de restitución “ $e$ ”, como se señala en el tema de choque del capítulo “Cinética de la partícula, método de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento”; (Beer & Russell, 1999) y (Bela & Richter 1989). Es decir, las ecuaciones expuestas en este trabajo pueden ser, en su enseñanza en la Física básica, introductorias a los estudios posteriores de cinética de una partícula y la conservación de la cantidad de movimiento. Y es de resultado igual, al de un análisis de este nivel con el coeficiente de restitución igual a la unidad:  $e = 1$ , choque elástico. Es de interés señalar que las situaciones ideales son comunes en la Física clásica o primera física en el básico universitario, como lo son: la aceleración constante, en la cinemática; los coeficientes de fricción constantes y nulos, las cuerdas de conexión sin masa, y las poleas sin masa ni fricciones internas, en la dinámica Newtoniana. Ver las posibilidades, (Tirado, 2004).

### Situaciones en el rebote parabólico y ejemplo

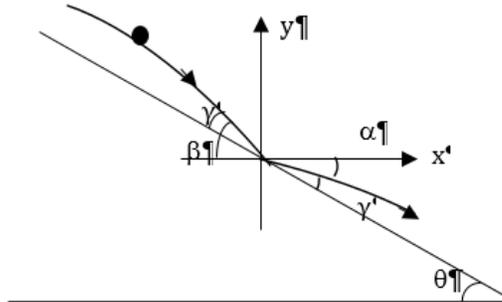
- 1) La rapidez de incidencia por lo general no se conserva, existiendo pérdida de energía por la deformación y recuperación del cuerpo y del ruido que se produce, (choque plástico o inelástico).
- 2) Si se deja caer un cuerpo sobre una inclinación entonces el valor de “beta” es de noventa grados,  $\beta = 90^\circ$ , (ver figura 5).



**Figura 5: Rebote con el ángulo de incidencia en caída libre ( $q \geq 45^\circ$ ).**

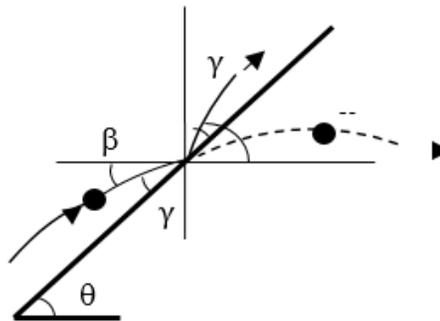
Si la inclinación es igual a  $45^\circ$  “alfa” será igual a cero grados  $\alpha = 0^\circ$ . Si la inclinación es mayor a  $45^\circ$  “alfa” será negativo  $\alpha < 0^\circ$ . La inclinación es menor a  $45^\circ$  “alfa” será positivo  $\alpha > 0^\circ$ .

3) En un lanzamiento hacia abajo puede ocurrir que el ángulo de salida “alfa” después del rebote sea negativo, (ver figura 6). El ángulo:  $\alpha < 0^\circ$ . Lo que implica que el siguiente movimiento es por debajo de la horizontal.



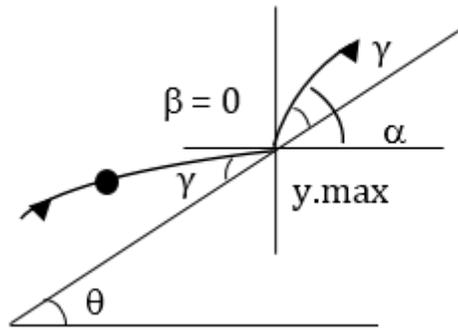
**Figura 6: Rebote con salida por debajo de la horizontal**

4) En un lanzamiento “hacia arriba” puede ocurrir que el ángulo de incidencia este por debajo de la horizontal,  $\beta < 0^\circ$ , (ver figura 7). Es decir, el cuerpo no ha alcanzado su altura máxima cuando choca con la inclinación, la componente vertical de la velocidad conservará su sentido en el rebote.



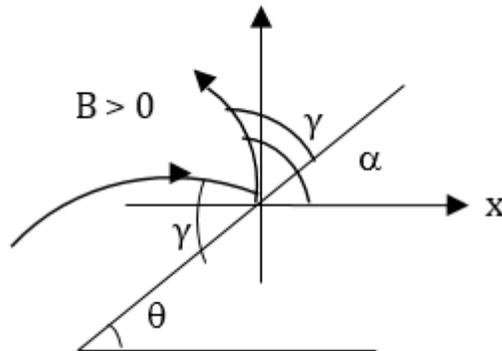
**Figura 7: Rebote con la incidencia por debajo de la horizontal.**

5) En un lanzamiento hacia arriba donde el cuerpo incida sobre la inclinación a cero grados, justo en el instante que alcanza su altura máxima, (ver figura 8).  $V_y = 0$ , entonces el ángulo de incidencia, con la superficie, “beta” será igual a cero,  $\beta = 0^\circ$



**Figura 8: Rebote “Hacia arriba” con el ángulo de incidencia en cero**

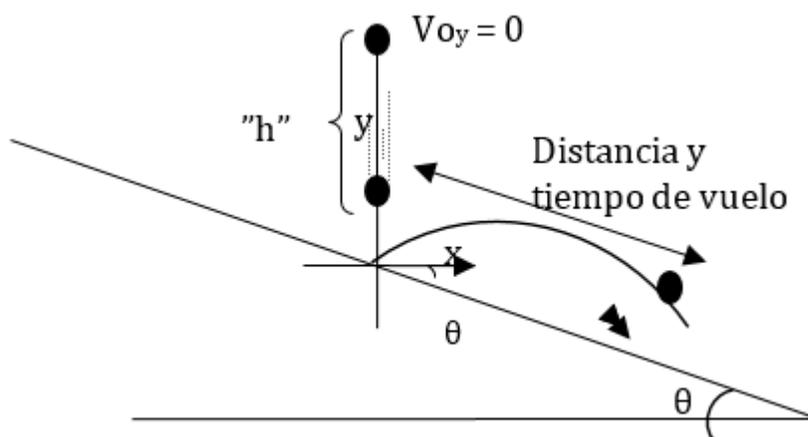
6) Si el ángulo de incidencia “beta” es mayor o igual que cero,  $\beta \geq 0^\circ$ . La inclinación tiene un ángulo igual o superior a los  $45^\circ$ , (ver figura 9). El cuerpo puede rebotar verticalmente o en un movimiento parabólico “de regreso”; es decir “alfa” es mayor a los noventa grados,  $\alpha > 90^\circ$ , y la componente horizontal de la velocidad invierte su sentido.



**Figura 9: Rebote “Hacia arriba” con el ángulo de rebote  $\geq 90^\circ$ .**

### Metodología Básica de Validación

En este trabajo se valida en un experimento controlado: El rebote parabólico hacia abajo, de un cuerpo esférico de goma que rebota sobre una inclinación con graduación para los grados. El experimento en sí consiste en dejar caer pelotas desde una altura conocida sobre un plano inclinado que posee un papel carbón que permite la observación de “huellas” en los contactos del punto de incidencia y de primer rebote o segundo contacto. Ver esquema en la figura 10.



**Figura 10: Experimento del rebote sobre una superficie recta inclinada.**

Con los datos de la distancia por la inclinación observando las huellas que deja el cuerpo en sus dos contactos con la superficie inclinada, se toma esta medida con un juego de escuadras, luego con el dato del tiempo de vuelo del cuerpo en el rebota, medido con un cronometro digital, se desarrolla la siguiente relación para calcular el ángulo de rebote del cuerpo sobre la inclinación con respecto a la horizontal, es decir el ángulo "α", por análisis de un movimiento parabólico sobre una inclinación, ver ecuación 10 a continuación

$$\text{Tan}(\alpha) = (4,9t_v^2 - d\text{Sen}(\theta)) / d\text{Cos}(\theta). \text{ Ecuación: 10.}$$

Los resultados obtenidos, en al menos 10 ensayos, se promedian con su respectivo error promedio absoluto y se comparan con el propuesto en la deducción de la ecuación 8 de este trabajo. Los materiales necesarios para el desarrollo de este experimento son los siguientes: a) plano inclinado de metal con graduación para los grados, b) cronometro digital, c) papel carbón y blanco para tomar notas de las impresiones de los cuerpos al colisionar con la superficie y rebotar en ella, d) varias pelotas de plástico y de goma, como cuerpos a rebotar.

### Resultados y Discusión

En la tabla 1 siguiente, se observan los datos obtenidos en el experimento controlado del rebote de un cuerpo "hacia abajo" sobre una superficie inclinada en 10 grados; para los 10 ensayos realizados con un ángulo de incidencia:  $\beta = 90^\circ$ , la distancia desplazada sobre la inclinación y los tiempos de

vuelos medidos en cada ensayo; para validar la ecuación 8 propuesta. El ángulo de rebote promedio, con su error promedio absoluto, con respecto a la horizontal es  $\alpha : (65,873 \pm 1,509)^\circ$ .

El ángulo de rebote “ $\alpha$ ”, (ecuación 8), es:  $\alpha = 90^\circ - 2(10^\circ) = 70^\circ$ . Este resultado permite la discusión de validar la situación que se idealiza en considerar la ecuación 8, en rebotes parabólicos hacia abajo sobre una superficie recta inclinada, para aplicaciones en la cinemática clásica, si consideramos que el experimento se realiza con cuerpos reales, ( $e < 1$ ), y la diferencia promedio es de  $4,127^\circ$  de inclinación, (6,27% en relación a la magnitud).

Tabla 1: Diez ensayos, para validar la ecuación 8 propuesta.

Nº de ensayo	Tiempo de vuelo en segundos.	Distancia (d) en metros.	Ángulo del rebote “ $\alpha$ ”
01	0,27	0,135	67,67°
02	0,25	0,135	64,14°
03	0,25	0,14	63,24°
04	0,27	0,135	67,67°
05	0,27	0,136	67,51°
06	0,27	0,138	67,19°
07	0,26	0,14	65,15°
08	0,26	0,14	65,15°
09	0,27	0,14	66,87°
10	0,25	0,135	64,14°

Fuente: Datos del Estudio

El estudio del movimiento en el plano del tipo parabólico es fundamental en el área de la física básica considerando que casi todos los cuerpos no autopropulsados que lanzamos al aire tienen este comportamiento para todo su tiempo vuelo, por acción de la gravedad terrestre. Ahora bien si el cuerpo lanzado tiene la particularidad de rebotar de la superficie en que colisiona, y esta se asume como una recta inclinada, entonces se hace necesario el estudio del nuevo movimiento parabólico que se genera con el uso de la deducción del ángulo de salida con respecto a la horizontal. Este trabajo ofrece las ecuaciones 8 y 9, para la deducción de este ángulo, y estas ecuaciones pueden aplicarse en problemas

de ejercicios para el estudiante de Física I, en el tema de cinemática en dos dimensiones como avance del mismo, y como ejercitación al tema de la cinética de la particular, en la mecánica avanzada; es decir si bien las ecuaciones son sencillas deducciones euclidianas, estas permiten cálculos y ejercitaciones en la primera física del básico universitario que resultan en conocimientos introductorios a la cinética de las partículas.

Este trabajo deja como reto el desarrollo de una ecuación para el ángulo de rebote de un cuerpo que colisione contra una superficie “curva” y el cálculo del avance o del arco que se forma en la superficie entre los contactos de la partícula que rebota, así como el montaje de experimentos más exactos, con el uso de sensores electrónicos, para validar las ecuaciones 8 y 9 sin depender de la medición manual del tiempo de vuelo, y de la reacción humana.

### **Implicaciones pedagógicas**

El rebote parabólico sobre superficies inclinadas es tema del capítulo de cinética de las partículas en la mecánica avanzada de la carrera de ingeniería y los cálculos se deducen por el uso de la energía involucrada en una colisión y la conservación del momento lineal; este trabajo propone la utilidad de ecuaciones euclidianas sencillas para el cálculo de variables cinemáticas en el rebote de una partícula sobre una recta inclinada a nivel de la Física I del básico universitario de ingeniería, bajo la idealización de la conservación del ángulo de rebote con respecto a la superficie y como ejercitación introductoria a la realidad de los cálculos más avanzados, como ocurre con muchas situaciones a este nivel de estudio.

### **Ejercicio, a manera de ejemplo**

Un niño lanza una piedra contra una tabla inclinada en  $30^\circ$ , la piedra golpea a  $7 \text{ m/s}$  y a un ángulo de  $-10^\circ$ , rebota a  $4,9 \text{ m/s}$ ; si se asume que el ángulo con respecto a la tabla se conserva, calcule la distancia que avanza la piedra por esta después de rebotar.

**R:** El ángulo de rebote de la tabla, con respecto a la horizontal, según la ecuación 9 propuesta es:  $\alpha = -10^\circ + 2(30^\circ) = 50^\circ$ . Luego la distancia “d” por la tabla se obtiene de las ecuaciones parabólicas

$$1) d \cos(30^\circ) = 4,9 \cos(50^\circ) \cdot T_v$$

$$2) d\text{Sen}(30^\circ) = 4,9\text{Sen}(50^\circ)\text{Tv} - 4,9(\text{Tv})^2.$$

De donde se obtiene el tiempo de vuelo del rebote es 0,395 segundos

Y la distancia buscada, luego del rebote, como:  $d = 1,436$  metros.

## Referencias

- Bela, S. & Richter, K. (1989). *Mecánica para ingenieros, dinámica*. Segunda edición. Editorial, Prentice-hall-inc. México. 630 – 641.
- Berr, F. & Russel, E. (1999). *Mecánica vectorial para ingenieros, dinámica*. Sexta edición. Editorial Mc. Graw Hill. México. 797 – 815.
- Sears, F. & Zemansky, M. & Young, H. (1999). *Física, volumen I*. Novena edición. Editorial Addison Wesley. México. 68 – 75.
- Serway, R. (1999). *Física, volumen I*. Cuarta edición. Editorial: Ultra, s.a. Mc Graw Hill. México. 77 – 84 y 95 – 97
- Tirado, A. (2004). *Rebote parabólico sobre una línea recta inclinada*. Primera edición biblioteca nacional. Derechos de autor, folleto de ejercicios: © If-081200457801493. Barcelona. Venezuela.

**Autor:**

**Alberto Antonio Tirado Sanabria**

Ingeniero Industrial (Universidad de Oriente – UDO -Núcleo de Anzoátegui, 1997).

Profesor Asociado (UDO).

Máster en educación, mención enseñanza de la Matemática Básica, (UDO, 2010).

Autor de libros de texto para la enseñanza de la física en la formación de ingenieros.

Línea de Investigación: formación de docentes.

Profesor en la Universidad de Guayaquil, Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas, Coordinación de Matemáticas (Mayo - Septiembre 2018)

Universidad de Guayaquil. Ecuador.

[alberto.tirados@ug.edu.ec](mailto:alberto.tirados@ug.edu.ec)