

ERRORES MATEMÁTICOS COMETIDOS POR LOS ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN EL ESTUDIO DE FUNCIONES

Wanda Velázquez Rosado

wanda.velazquez@upr.edu

Wanda Villafañe Cepeda

wanda.villafane1@upr.edu

José Vega Vilca

jose.vega23@upr.edu

Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras

Recibido: 02/05/2017 **Aceptado:** 06/07/2017

Resumen

Se investigaron los errores matemáticos que cometieron los estudiantes al realizar ejercicios relacionados con ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Participaron 138 estudiantes matriculados en un curso de precálculo con aplicaciones a la administración de empresas. Los datos se obtuvieron de la administración de una prueba sobre el tema de funciones exponenciales y logarítmicas. Se corrigieron las respuestas de los estudiantes en dicha prueba y se categorizaron los errores cometidos. Se realizó un análisis de contenido de las respuestas. Además, se llevó a cabo un análisis de las distribuciones de frecuencia y de correspondencias múltiples. Se encontró que los estudiantes cometieron diferentes tipos de errores, donde el error más frecuente fue resolver incorrectamente o parcialmente la ecuación resultante luego de aplicar las propiedades exponenciales y logarítmicas de forma correcta. Como parte de las recomendaciones se sugiere incorporar en el salón de clases ejemplos de los errores cometidos por los estudiantes en diferentes temas de matemáticas y cómo atenderlos. Este entendimiento les ayudará a fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Palabras claves: funciones, errores matemáticos, ecuaciones exponenciales y logarítmicas, precálculo, métodos cuantitativos

MATHEMATICAL ERRORS COMMITTED BY UNIVERSITY STUDENTS IN THE STUDY OF FUNCTIONS

Abstract

This study investigates mathematical errors that students made when performing exercises related to exponential and logarithmic equations. Participants included 138 students enrolled in a pre-calculus course with applications to business. The data was obtained from the results of a test given to the students about exponential and logarithmic functions. The student's responses were analyzed and the errors were categorized. A content analysis of the responses was performed. In addition, an analysis of frequency distributions and multiple correspondences were done. It was found that the students committed different types of errors, where the most common was to solve partially or incorrectly the resulting equation after applying the exponential and logarithmic properties correctly. As part of the recommendations, it is suggested to incorporate in the classroom examples of mistakes made by students in different mathematical subjects and how to attend them. This understanding will help them strengthen the teaching and learning process of mathematics.

Keywords: functions, mathematical errors, exponential and logarithmic equations, precalculus, quantitative methods

Introducción

La matemática ha desempeñado un rol importante en el desarrollo de la sociedad. No obstante, la enseñanza de esta disciplina enfrenta a diario nuevos retos. Uno de los problemas que encara el profesor de matemáticas de todos los niveles es que muchos estudiantes no poseen las destrezas necesarias para trabajar exitosamente en esta disciplina (Aponte, Pagán, Quintero, Balet, Nazario y Velázquez, 2003; Gordon, 2010; Kachapova y Kachapov, 2012; National Council of Teacher of Mathematics [NCTM], 2000).

En el caso particular de la Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras (UPRRP) se ha encontrado que existe un alto por ciento de fracasos de los estudiantes en los cursos cuantitativos, como lo son precálculo y cálculo (Aponte, Pagán, Quintero, Balet, Nazario y Velázquez, 2003). En el caso del precálculo con aplicaciones a administración de empresas (MECU 3031), el porcentaje de fracasos, durante los años académicos del 2002-2003 al 2014-2015, se mantuvo en alrededor de un 50% durante el primer semestre y un 53% durante el segundo semestre. Este alto porcentaje de fracaso incide en que muchos de los estudiantes fracasen en cursos subsiguientes y por ende, no pueden tener éxito en la culminación de su carrera universitaria en el tiempo esperado (Vega Vilca, Velázquez Rosado, Villafañe Cepeda, 2016).

Específicamente, se ha encontrado que los estudiantes tienen varias limitaciones al estudiar diferentes temas de matemáticas y exhiben diferentes errores (Almog e Ilany, 2012; Khan y Chishti, 2011; Konyalioglu, 2011; Shabanifar y Konyalioglu, 2013). En particular, se han señalado las limitaciones que muestran los estudiantes en funciones exponenciales y logarítmicas (Khan y Chishti, 2011). Entre los errores que cometen los estudiantes se encuentran: el no aplicar correctamente las propiedades de los logaritmos; no expresar correctamente la forma exponencial y logarítmica; y no expresar correctamente la notación científica. Precisamente, el objetivo principal del presente estudio es investigar los errores matemáticos que cometen los estudiantes al realizar ejercicios relacionados con funciones exponenciales y logarítmicas; particularmente las ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

El analizar los posibles errores que cometen los estudiantes al realizar ejercicios sobre este tema, es de suma importancia pues si los estudiantes no tienen el entendimiento de conceptos previos, su aprendizaje de conceptos más avanzados puede afectarse. Además, el

conocer las maneras de razonar de los estudiantes ayudará al profesor a usar mejores estrategias de enseñanza.

Revisión de Literatura

El concepto de función es uno fundamental en el área de matemáticas. Éste forma parte del contenido curricular que se debe enseñar en las escuelas de Puerto Rico y los Estados Unidos desde el nivel intermedio (Council of Chief State School Officers & the National Governors Association, 2010; Departamento de Educación de Puerto Rico, 2014). Además, el NCTM (2014) estableció que los estudiantes desde el nivel intermedio deben poder generalizar relaciones numéricas y expresarlas usando la representación simbólica a través de las funciones.

Varios autores (Macks, 2014; Nyikahadzoy, 2015; Steketee y Scher, 2012) coinciden en señalar el rol fundamental de las funciones en la enseñanza de las matemáticas e indican que el estudio de ésta es de suma importancia pues conecta muchos temas dentro de la disciplina. Por tal motivo, los educadores deben intentar que los alumnos adquieran un conocimiento vasto y profundo sobre éste, de modo que puedan tener las herramientas necesarias para desempeñarse de forma efectiva en los cursos donde se requiere utilizar y aplicar el concepto de funciones.

A pesar de que el tema de funciones se trabaja desde el nivel intermedio, los estudiantes llegan a la escuela superior y a la universidad con un débil entendimiento de éstas (Baki y Güveli, 2008; Steketee y Scher, 2012). Específicamente, Macks (2014) indica que, en ocasiones, los alumnos pueden llevar a cabo algunos algoritmos relacionados con funciones y no entender a profundidad lo que significa el concepto.

Entre los temas importantes en el estudio de funciones se encuentra las funciones exponenciales y logarítmicas. Precisamente, en la presente investigación se trabaja con estos tipos de funciones, las cuales tienen gran importancia en las aplicaciones de la vida diaria, tales como problemas de crecimiento o decrecimiento poblacional, interés compuesto, movimientos telúricos, depreciación del valor de un artículo, por ejemplo, de un vehículo, de una maquinaria, entre otros.

A continuación, se describen varias investigaciones, algunas de las cuales incluyeron distintos tipos de funciones y los errores cometidos por los estudiantes cuando trabajaron las mismas.

Babar Khan y Chishti (2011) realizaron una investigación con 27 estudiantes de noveno grado de Pakistán en el cual trabajaron con el tema de logaritmos. Utilizaron un estudio de caso, en el cual un grupo se expone al tratamiento y al final se le administra una post prueba. Analizaron los errores cometidos por los estudiantes al resolver ejercicios relacionados con el tema de logaritmos, por ejemplo: (a) determinar el valor de x en la ecuación $\log_2(x) = 5$; (b) escribir en forma expandida la expresión: $\log\left(\frac{8}{3}\right)$, entre otros. Como resultado de su estudio, encontraron que aquellos estudiantes que participaron activamente en las clases mostraron un mejor entendimiento de los conceptos, ya que pudieron clarificar sus ideas. Como conclusión, los investigadores indican que, por lo general, los estudiantes aprenden las reglas de logaritmos sin entenderlas, lo que trae como consecuencia que, aunque tengan correctos los ejercicios en la escuela, no les ayuda en el aprendizaje futuro de los conceptos matemáticos. Además, especifican que esto trae como consecuencia que el conocimiento previo adquirido sobre conceptos matemáticos, no les ayudará en la adquisición correcta del nuevo material que aprendan.

Almog e Ilany (2012) realizaron un estudio con estudiantes de escuela superior de Israel y analizaron los métodos usados por los alumnos para resolver desigualdades con valor absoluto. Estudiaron los errores más frecuentes que cometieron al resolverlas, los errores conceptuales que mostraron y las posibles causas. De los alumnos que participaron de la investigación, 280 estaban matriculados en cursos de nivel intermedio (nivel 4) y 201 estaban matriculados en cursos de nivel avanzado (nivel 5). En el estudio se utilizaron dos instrumentos para recoger los datos: un cuestionario y unas entrevistas personales. El cuestionario se administró a 481 estudiantes los cuales cursaban el décimo y el undécimo grado y provenían de 13 escuelas superiores. El cuestionario consistía de ocho ejercicios de desigualdades con valor absoluto. Se encontró que los estudiantes cometieron ciertos tipos de errores de forma consistente al resolver las desigualdades estudiadas. Estos errores fueron clasificados por categorías y luego se determinó la distribución de soluciones incorrectas de acuerdo al método de solución que usaron los estudiantes. De igual manera, se hizo la distribución de soluciones correctas que utilizaron los alumnos en cada ejercicio.

Entre las respuestas correctas que dieron los estudiantes, se encontró que la mayoría de los que resolvieron correctamente los ejercicios, lo hicieron sin realizar ninguna manipulación algebraica.

Además, se encontró que algunos llegaron a las contestaciones solo aplicando las reglas aprendidas, sin mostrar un conocimiento profundo de lo que estaban haciendo. Finalmente, indican los autores que, con los resultados obtenidos en el estudio, los maestros podrán entender los procesos de pensamiento de los estudiantes al resolver desigualdades con valor absoluto y utilizar este entendimiento para fortalecer la instrucción matemática.

Arce y Ortega (2013) llevaron a cabo un estudio para investigar las deficiencias en el trazado de gráficas de funciones de los estudiantes de escuela superior de España, provenientes tanto de escuelas públicas como privadas. Como técnica de investigación utilizaron el análisis de contenido de los cuadernos de trabajo de los alumnos. Entre los hallazgos de su estudio, encontraron deficiencias en el trazado de las gráficas, las cuales se repitieron en un alto número de estudiantes.

Algunos de los errores cometidos por los estudiantes ocurrieron con el trazado de funciones partidas. Específicamente, no trazaron los pedazos de las gráficas en el dominio definido para cada una, lo que trajo como consecuencia, que un mismo elemento del dominio tuviera dos elementos diferentes en el campo de valores. Otro error cometido por los alumnos se relacionaba con el trazado de las asíntotas.

Por otro lado, se observó que mostraron dificultad en asignar las escalas en el plano cartesiano, específicamente, los números usados en los ejes no guardaban proporción entre sí, lo que trajo como consecuencia que no pudiesen visualizar las propiedades de las funciones. Otro error cometido por los alumnos ocurrió con el trazado de las gráficas de las funciones de: $y = \sqrt{x}$; $y = \log(x)$, cuya representación en la parte final del trazado, la hicieron paralela al eje de x , incluso en forma decreciente. Mencionan los autores que estas dificultades pueden convertirse en un obstáculo, si los estudiantes no tienen interiorizadas en sus esquemas cognitivos, las propiedades de las funciones, lo que puede llevar a deducir propiedades incorrectas al visualizar su representación gráfica. Recomiendan que los docentes utilicen estos errores para crear conciencia en los estudiantes y no los cometan. Esta recomendación coincide con la sugerida por Hernández Rodríguez y Villafañe Cepeda (2009).

Teuscher y Reys (2010) realizaron un estudio para determinar el entendimiento de los estudiantes respecto al concepto de pendiente y razón de cambio de una función. En éste participaron 191 estudiantes matriculados en un curso de cálculo de nivel avanzado (AP). Como parte de su metodología, los investigadores evaluaron los trabajos de los estudiantes

usando una rúbrica y luego llevaron a cabo un análisis cualitativo para identificar los errores que cometieron los estudiantes al resolver problemas sobre la pendiente de una función. Ellos encontraron que los alumnos mostraron dificultad en explicar los conceptos: pendiente y razón de cambio. Los autores recomiendan que los docentes deben prestar atención a las respuestas ofrecidas por los alumnos, ya que las mismas ofrecen información importante respecto al dominio que tengan del contenido.

Por otro lado, Konyalioglu (2011) realizó una investigación de naturaleza descriptiva, en la cual recopiló información proveniente de 26 estudiantes que se estaban preparando para ser maestros de matemáticas del nivel secundario. Se les pidió que determinaran los valores enteros máximos y mínimos para la variable A , dado que $A = 2\cos(x) - \operatorname{sen}(x)$. Ellos encontraron que sólo el 38% de los participantes resolvieron la ecuación correctamente, mientras que el 62% no pudieron resolver la ecuación. Indica el investigador que algunas de las respuestas incorrectas obtenidas se debieron a que ignoraron la forma correcta de resolver desigualdades. Indica que muchos estudiantes tienen estas dificultades porque aplican métodos para resolver ecuaciones, cuando resuelven desigualdades.

El autor concluye que muchos de los candidatos a maestros que participaron de la investigación tuvieron dificultad en resolver desigualdades. Una de las razones para esto era que trataban de resolverlas usando soluciones previamente memorizadas, sin hacer el análisis requerido, lo que los llevaba a respuestas inapropiadas.

Son (2013) llevó a cabo una investigación con estudiantes que se estaban preparando para ser maestros del nivel elemental, secundario y educación especial. El objetivo principal del estudio fue determinar las interpretaciones de estos futuros maestros en cuanto a los errores que cometieron estudiantes al efectuar ejercicios relacionados con determinar la medida de uno de los lados en triángulos semejantes. Se analizaron las respuestas que ofrecieron 57 candidatos a maestros, tanto de forma cualitativa como cuantitativa. El análisis de los resultados reveló que a pesar de que los errores cometidos por los estudiantes de la escuela estaban relacionados con aspectos del concepto de semejanza, la mayoría de los candidatos a maestros los identificaron como errores de proceso.

Además, encontró que los candidatos a maestros habían desarrollado diferentes niveles de entendimiento y poseían habilidades distintas para explicar sus estrategias de solución en problemas específicos de razón y proporción. Finalmente, indica que se deben realizar más

estudios para investigar las interpretaciones de los futuros maestros a los errores cometidos por sus estudiantes, en otros temas distintos al de razón y proporción.

En resumen, algunas de las investigaciones reseñadas anteriormente, se realizaron con estudiantes del nivel secundario (Almog e Ilany, 2012; Arce y Ortega, 2013; Babar Khan y Chishti, 2011) y otras se realizaron con estudiantes universitarios (Konyalioglu, 2011; Son, 2013; Teuscher y Reys, 2010). En todas se analizaron los errores que cometieron los estudiantes al trabajar con distintos tipos temas de matemáticas, entre los cuales se incluyen las funciones.

Metodología

La metodología utilizada en este estudio consistió en la recopilación y análisis de datos que se obtuvieron de la administración de una prueba sobre el tema de funciones exponenciales y logarítmicas. Esta prueba incluyó seis ejercicios para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas que fueron los que se tomaron en cuenta para los resultados de esta investigación. Se corrigieron las respuestas de los estudiantes en dicha prueba y se categorizaron los errores cometidos. Se realizó un análisis de contenido de las respuestas. Además, se llevó a cabo un análisis de las distribuciones de frecuencia y de correspondencias múltiples.

Participantes

En la investigación participaron 138 estudiantes que estaban matriculados en el curso Métodos Cuantitativos para Administración de Empresas I (MECU 3031) que ofrece la Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras, durante el primer semestre del año académico 2015-2016. Del total de participantes en el estudio, el 57.2% eran estudiantes de nuevo ingreso (denominados “prepas”), el 53.6% eran del género masculino y el 73.2% de los alumnos provienen de escuela privada. Además, el 60.1% de los participantes obtuvo una puntuación de 650 o más en la parte de aprovechamiento matemático (ApMat) en la Prueba de Evaluación y Admisión Universitaria (PEAU) que administra el *College Entrance Examination Board* de Puerto Rico.

La Tabla 1, ilustra la distribución de frecuencias y la asociación entre las categorías de las variables que muestran los trasfondos académicos de los estudiantes; por ejemplo, se observa que el 51.4% (71/138) de participantes del estudio son “prepas” y tienen aprovechamiento matemático alto, que el 39.1% (54/138) de participantes son de género

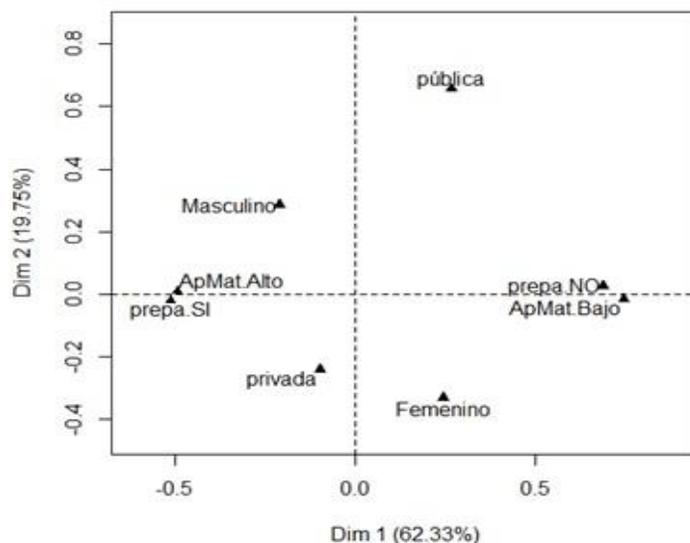
masculino y provienen de escuela privada. También se observa que entre los participantes “prepas”, el 89.9% (71/79) tienen aprovechamiento matemático alto, el 58.2% (46/79) son de género masculino y el 77.2% (61/79) son de escuela privada. Además, se observa que, entre los participantes de género masculino, el 68.9% (51/74) son de aprovechamiento matemático alto, el 73% (54/74) son provenientes de escuela privada y el 62.2% (46/74) son “prepas”.

Tabla 1
Distribución de los participantes por categoría

	Prepa		Aprovechamiento Matemático (ApMat)		Género	
	NO	SI	Bajo	Alto	Masculino	Femenino
ApMat Bajo	47	8				
ApMat Alto	12	71				
Masculino	28	46	23	51		
Femenino	31	33	32	32		
Esc.Pública	19	18	18	19	20	17
Esc.Privada	40	61	37	64	54	47

Mediante la técnica de correspondencias múltiples se analizó la asociación de las categorías de estas cuatro variables de trasfondos académicos, las cuales pueden representarse en un plano de dos dimensiones con 82.08% de la variabilidad total (62.33% en la primera dimensión y 19.75% en la segunda dimensión). La Figura 1, ilustra gráficamente las asociaciones mencionadas en la Tabla 1, en ella se puede observar que los estudiantes “prepas” están relacionados fuertemente con estudiantes de Aprovechamiento Matemático alto, de género masculino y provienen de escuela privada, así como los estudiantes no “prepas” están relacionados fuertemente con estudiantes de Aprovechamiento Matemático bajo. Las categorías escuela pública y género femenino no representan claridad de asociación con las otras categorías.

Figura 1. Asociación de las categorías de los trasfondos académicos



Resultados

A los estudiantes se les administró una prueba sobre el tema de funciones exponenciales y logarítmicas. Esta prueba incluyó seis ejercicios para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, según lo ilustra la Tabla 2.

Tabla 2
Ejercicios que se incluyeron en la prueba

Ejercicio	Resuelve cada una de las ecuaciones
1	$8^{5x-6} = \frac{1}{16}$
2	$15(3)^{x+4} - 20 = 10$
3	$\log(4x - 11) = 2$
4	$\log(4x - 11) = 2$
5	$\ln(x^2) = \ln(13x)$
6	$\log(7x) - \log(x - 2) = 1$

Se analizaron las respuestas de los estudiantes correspondientes a la solución de los seis ejercicios de la prueba. Cada ejercicio pudo ser contestado de tres maneras: correcto, incompleto o en blanco. A cada ejercicio que fue contestado correctamente se le asignó 2

puntos. A los ejercicios que fueron dejados en blanco o donde se intentó la solución con un procedimiento sin sentido se le asignó 0 punto. Por otro lado, aquellos ejercicios con respuesta incompleta en los que no se llegó a la contestación, pero se hizo algo del proceso de forma correcta, se le asignó 1 punto. Dentro de este último tipo de respuesta incompleta se pudo determinar los errores que se cometieron al resolver las ecuaciones exponenciales y logarítmicas. En general, las puntuaciones obtenidas por los estudiantes en los seis ejercicios de la prueba, indican que alrededor del 48% de los estudiantes tienen rendimiento satisfactorio ya que obtuvieron 8 puntos o más, de un total de 12, este criterio fue implementado por los investigadores.

La Tabla 3 muestra la distribución de frecuencias de la forma en que los estudiantes contestaron cada ejercicio de la prueba. Por ejemplo, en la pregunta 1 (P1), solo el 51.4% de estudiantes la contestó correctamente, el 17.4% obtuvo una respuesta incompleta y el 31.2% dejó la respuesta en blanco o intentó la solución con un procedimiento sin sentido. Por otro lado, en la pregunta 6 (P6), el 34.8% de estudiantes la contestó correctamente, el 15.2% obtuvo una respuesta incompleta y el 50% dejó la respuesta en blanco o intentó la solución con un procedimiento sin sentido

Tabla 3
Resultados de la prueba

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Correctas	71 (51.4)	60 (43.5)	77 (55.8)	34 (24.6)	66 (47.8)	48 (34.8)
Incompletas	24 (17.4)	34 (24.6)	10 (7.20)	59 (42.8)	42 (30.4)	21 (15.2)
Blanco	43 (31.2)	44 (31.9)	51 (37.0)	45 (32.6)	30 (21.7)	69 (50.0)

(.) *por ciento*

Una vez que se realizó la distribución de frecuencias de la forma en que los estudiantes contestaron cada ejercicio de la prueba, se procedió a categorizar los errores más comunes que cometieron los estudiantes (Almog e Ilany, 2012), los cuales se clasificaron en cinco categorías según muestra la Tabla 4.

Tabla 4
Rúbrica para clasificar la solución de los ejercicios

Categorías	Errores
1	Expresa de forma incorrecta el cambio de forma exponencial a logarítmica o viceversa, o no utiliza el cambio de forma exponencial a logarítmica cuando el problema así lo requiere.
2	No utiliza de forma apropiada las propiedades de funciones exponenciales y logarítmicas.
3	Resuelve incorrectamente o parcialmente la ecuación resultante luego de aplicar las propiedades exponenciales y logarítmicas de forma correcta.
4	Incluye respuestas que hacen 0 o negativo el argumento de un logaritmo.
5	Otras categorías: Cometió errores aritméticos (sumas, restas, multiplicaciones, divisiones mal hechas). Hizo un solo paso para resolver la ecuación, pero no llegó a la respuesta correcta. Comienza a resolver la ecuación correctamente, pero no la finaliza.

A continuación, se presentan ejemplos de los errores cometidos por los estudiantes en cada una de las cinco categorías que se explican en la Tabla 4.

Ejemplos de los errores cometidos en cada categoría

Categoría 1: En esta categoría se incluye los que cometieron los siguientes errores: Expresa de forma incorrecta el cambio de forma exponencial a logarítmica o viceversa, o no utiliza el cambio de forma exponencial a logarítmica cuando el problema así lo requiere.

Ejemplo:

En este caso, el estudiante escribe incorrectamente la forma exponencial de una ecuación logarítmica:

$$\log(7x) - \log(x - 2) = 1$$

$$\log\left(\frac{7x}{(x-2)}\right) = 1$$

$$10^0 = \left(\frac{7x}{x-2}\right)$$

Categoría 2: En esta categoría se incluye si el estudiante no utiliza de forma apropiada las propiedades de funciones exponenciales y logarítmicas.

Ejemplo:

En este caso, el estudiante no utilizó las propiedades de los logaritmos al eliminar éste como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\log(7x) - \log(x - 2) &= 1 \\ \frac{7x}{x - 2} &= 1 \\ 7x &= x - 2 \\ 7x - x &= 2 \\ 6x &= 2 \\ x &= \frac{-1}{3}\end{aligned}$$

Categoría 3: En esta categoría se incluye si el estudiante resuelve incorrectamente o parcialmente la ecuación resultante luego de aplicar las propiedades exponenciales y logarítmicas de forma correcta.

Ejemplo:

En este caso, el estudiante comienza a aplicar de forma apropiada las propiedades de los logaritmos, pero no resuelve correctamente la ecuación cuadrática resultante como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\log_4 x + \log_4(x - 2) &= \log_4 8 \\ \log_4[x(x - 2)] &= \log_4 8 \\ x^2 - 2x &= 8 \\ \sqrt{x} - 2x &= 8 \\ x - 2x &= 8 \\ \frac{-1x}{-1} &= \frac{8}{-1} \\ x &= -8\end{aligned}$$

Categoría 4: En esta categoría se recoge si el estudiante incluye respuestas que hacen 0 o negativo el argumento de un logaritmo. Este fue el mayor error cometido en esta categoría: 31 estudiantes de 138.

Ejemplo:

En este caso, el estudiante incluyó como solución de la ecuación al 0, el cual convierte al argumento del logaritmo en 0.

$$\begin{aligned}\ln(x^2) &= \ln(13x) \\ x^2 - 13x &= 0 \\ x(x-13) &= 0 \\ x = 0; x &= 13\end{aligned}$$

Categoría 5: En ésta se incluyen otras categorías, tales como:

- Cometió errores aritméticos (sumas, restas, multiplicaciones, divisiones mal hechas).
- Hizo un solo paso para resolver la ecuación, pero no llegó a la respuesta correcta.
- Comienza a resolver la ecuación correctamente, pero no la finaliza.

Ejemplo:

En este caso, los estudiantes cometieron un error aritmético al resolver la ecuación

$$\log_5(4x - 11) = 2$$

$$5^2 = 4x - 11$$

Al resolver la ecuación, escribió: $25 + 11 = 4x$

$$36 = 4x$$

$$8 = x$$

Discusión

En la Tabla 3 se estableció que los resultados obtenidos en la prueba se clasificaron en: correctas, incompletas, o en blanco. El análisis que se llevó a cabo en la investigación provino de los problemas que resolvieron los estudiantes de forma incompleta, es decir cuando no se llegó a la respuesta, pero se hizo algo del proceso de forma correcta. Los alumnos que resolvieron problemas con solución incompleta pudieron cometer por lo menos uno de los cinco tipos de errores mencionados previamente en la Tabla 4. El número total de estudiantes que cometieron por lo menos uno de estos cinco tipos de errores en la prueba, se pueden observar en la Tabla 5, en el que se destaca una alta frecuencia de estudiantes (35) que cometieron el error tipo 3 al resolver el problema 5. También se observa que el segundo tipo de error que cometieron los alumnos (31) fue el error tipo 4 al resolver el problema 4.

Tabla 5. Frecuencia del tipo de error cometido en las respuestas incompletas

Error	P1	P2	P3	P4	P5	P6
1	-	-	-	-	1	2
2	9	8	-	4	1	1
3	9	8	1	19	35	3
4	-	-	1	31	5	-
5	6	18	8	5	-	15

En resumen, en la investigación se encontró que la mayoría de los estudiantes resolvieron incorrectamente o parcialmente la ecuación resultante luego de aplicar las propiedades exponenciales y logarítmicas de forma correcta (error tipo 3 en la pregunta 5). Además, se encontró que los alumnos incluyeron respuestas que hacen cero o negativo el argumento de un logaritmo (error tipo 4 en la pregunta 4). Estos errores que cometieron los estudiantes guían a las conclusiones, recomendaciones e implicaciones que se discuten a continuación.

Conclusiones, Recomendaciones e Implicaciones Pedagógicas

1. Se debe incorporar en el salón de clases ejemplos de los errores cometidos por los estudiantes en diferentes temas de matemáticas. Ello para crearles conciencia y que no los cometan en futuras ocasiones (Arce y Ortega, 2013). Por ejemplo, el maestro puede escribir en la pizarra la solución de un problema de forma errónea y luego preguntarles a los estudiantes que expliquen lo que está incorrecto.
2. Se encontró que los estudiantes cometieron diferentes tipos de errores al resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, donde el error más frecuente fue resolver incorrectamente o parcialmente la ecuación resultante luego de aplicar las propiedades exponenciales y logarítmicas de forma correcta. Este hallazgo lleva a recomendar que el maestro debe asegurarse que el estudiante domina conceptos matemáticos previos, tales como la solución de ecuaciones lineales, cuadráticas y racionales. De lo contrario, debe repasar y reforzar estos temas antes de discutir la solución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
3. Se encontró que los alumnos incluyeron respuestas que hacen cero o negativo el argumento de un logaritmo. Este error cometido por la mayoría de los estudiantes lleva a concluir como recomendación a los maestros que deben hacer énfasis en la

verificación de las posibles soluciones de una ecuación logarítmica. De esta forma, se minimizará el incluir raíces extrañas como parte del conjunto solución.

4. Se debe incluir el análisis de los obstáculos cognitivos de los estudiantes y cómo superarlos en los cursos de metodología de la enseñanza de las matemáticas (Hernández Rodríguez y Villafañe Cepeda, 2009).
5. Se deben incorporar metodologías en la enseñanza de matemáticas para que se estudien los posibles errores que pueden cometer los estudiantes sobre diversos temas y cómo atender los mismos (Shabanifar y Konyalioglu, 2013; Son, 2013).
6. Se recomienda que los maestros deben entender los procesos de pensamiento y los errores cometidos por los estudiantes al trabajar diferentes temas de matemáticas. Este entendimiento les ayudará a fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Almog e Ilany, 2012).

Referencias

- Abramovich, S., & Ehrlich, A. (2007). Computer as a medium for overcoming misconceptions in solving inequalities. *The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 26, 181 – 196.
- Almog, N., & Ilany, B. S. (2012). Absolute value inequalities: High school students' solutions and misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 81, 347–364. DOI 10.1007/s10649-012-9404-z.
- Aponte, G., Pagán, E., Quintero, A.H., Balet, S., Nazario, M., & Velázquez, W. (2003). Múltiples escenarios de aprendizaje. *Memorias del Congreso de Investigación sobre la Universidad*, 166 – 187.
- Arce, M., & Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA*, 8 (2), 61 – 73.
- Babar Khan, S., & Chishti, S. (2011, Jan). Learners' errors: Supporting learners for participating in mathematics' classroom. *International Journal of Academic Research*, 3, 656 – 659.
- Baki, A., & Güveli, E. (2008). Evaluation of a web based mathematics teaching material on the subject of functions. *Computers & Education*, 51, 854–863.
- Council of Chief State School Officers & the National Governors Association (2010). *Common Core States Standards for Mathematics*. Washington, DC: Autor.
- Departamento de Educación de Puerto Rico (2014). *Estándares de contenido y expectativas de grado (Puerto Rico Core Standards: Programa de Matemáticas)*. San Juan, P. R.: Autor.

- Gordon, S. (2010, Oct). The states of mathematics education today: What happens in the math classroom. *Journal of Economics and Finance*, 34, 471 – 476.
- Hernández Rodríguez, O., & Villafañe Cepeda, W. (2009, Jun). Errores cometidos por los candidatos a maestros al resolver problemas matemáticos. *Paradigma*, 30, 103 – 116.
- Kachapova, F., & Kachapov, I. (2012). Percentage problems in bridging courses. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43 (5), 654 – 663.
- Khan, S. B., & Chishti, S. (2011, Jan). Learners' errors: Supporting learners for participating in mathematics' classroom. *International Journal of Academic Research*, 3(1), 656 – 659.
- Konyalioglu, A. C. (2011, Sept). Inequalities. *Mathematics Teaching*, 224, 18.
- Macks, J. (2014, Nov). Interesting functions. *Mathematics Teacher*, 108, 320 – 322.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Algebra as a strand of school mathematics for all students: A position of the National Council of Teachers of Mathematics*. Recuperado de http://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Position_Statements/Algebra_2014-04.pdf.
- Nyikahadzoy, M. R. (2015, May). Teachers' knowledge of the concept of a function: a theoretical framework. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13, 261–283. DOI 10.1007/s10763-03-9486-9.
- Rach, S., Ufer, S., & Heinze, A. (2013). Learning from errors: Effects of teacher training on students' attitudes towards and their individual use of errors. *PNA*, 8 (1), 21 – 30.
- Shabanifar, S., & Konyalioglu, A. C. (2013, Nov). Mathematics teachers' approaches to students' possible mistakes in exponential and square root number. *International Journal of Academic Research*, 5(6), 213-219. DOI: 10.7813/2075-4124.2013/5-6/B.34.
- Son, J. W. (2013, Mar). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportions in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics*, 84, 49 – 70. DOI 10.1007/s10649-013-9475-5.
- Steketee, S., & Scher, D. (2012, Nov). Using multiple representations to teach composition of functions. *Mathematics Teacher*, 106, 260 – 268.
- Teusher, D., & Reys, R. E. (2010, Mar). Slope, rate of change, and steepness: Do students understand these concepts? *Mathematics Teacher*, 103, 519 – 524.
- Vega Vilca, J. C., Velázquez Rosado, W., & Villafañe Cepeda, W. (2016, invierno). El desempeño en los cursos cuantitativos como predictor de éxito en los estudios universitarios. *Fórum Empresarial*, 21 (2), 79 – 99.

Autores:

Wanda Velázquez Rosado
wanda.velazquez@upr.edu

Catedrática

Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras

Área del conocimiento donde investiga: Educación en Matemática; Educación en Negocios

Línea de investigación: Procesos de pensamientos en la solución de problemas matemáticos

Procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas;

Errores matemáticos cometidos por los estudiantes; Integración de la tecnología

Metodologías de enseñanza

Wanda Villafañe Cepeda

wanda.villafane1@upr.edu

Catedrática

Lugar de trabajo: Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras

Área del conocimiento donde investiga: Educación en Matemática

Línea de investigación: Procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; Integración

de la tecnología, Estrategias de enseñanza para futuros maestros de matemáticas

José Vega Vilca

jose.vega23@upr.edu

Catedrático Asociado

Lugar de trabajo: Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras

Área del conocimiento donde investiga: Estadística; Educación en Negocios

Educación en Matemática

Línea de investigación: Metodologías de enseñanza

Análisis multivariados con aplicaciones a decisión empresarial

Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras