

Un Modelo Cognitivo para la Comprensión Profunda de la Regla de la Cadena

Cristóbal Valdivia Sepúlveda
cristobal.valdivia.s@gmail.com
Universidad Austral de Chile

Marcela Parraguez González
marcela.parraguez@pucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Recibido: 26/03/2015 **Aceptado:** 15/09/2015

Resumen

Se propone un modelo, denominado Descomposición Genética (DG), para el aprendizaje del concepto Regla de la Cadena, el cual indaga en la manera como los estudiantes pueden construir, mentalmente, la derivada de la composición de funciones. La investigación se sustenta en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) (Dubinsky, 1991) como marco teórico y metodológico. La estructura general del estudio pasa por tres etapas, primero se realizó un análisis teórico del concepto en estudio, que permitió elaborar la DG (hipotética). Luego, se diseñó y aplicó (a once estudiantes de una universidad chilena) un cuestionario y una entrevista semiestructurada. En la tercera etapa se analizaron los datos a la luz de la DG. Estas fases permitieron dejar en evidencia las estructuras necesarias para la construcción del esquema Regla de la Cadena, y las características que conforman su evolución a través de la tríada de Piaget y García (1989): Intra, Inter y Trans. Un resultado relevante es que los conceptos de función y composición de funciones quedan separados de la Regla de la Cadena misma, mediante un algoritmo que absorbe dicha regla y que hemos llamado “*de afuera hacia adentro*”

Palabras Clave: Descomposición genética, Regla de la Cadena, Teoría APOE, niveles de Esquema.

A model for understanding The Chain Rule

Abstract

Our proposal is related to a model called Genetic Decomposition (GD). This is considered to be viable for the learning process of the concept “Chain Rule”, which looks for the way in which students can mentally build the derivative of the composite function. The research is sustained, in its theoretical and methodological framework, by the theory of APOS (action, process, object, and schema) (Dubinsky, 1991). The overall structure of the research is divided into three stages: In the first place, a theoretical analysis, of the concept in question, to allow the GD to be developed (hypothetically). Secondly, a questionnaire was designed to be used in a semi-structured interview of eleven (11) Chilean university students. In the third and final stage, the data was analyzed in the light of the GD. The result of these steps showed the necessary structures for the construction of the Chain Rule, as well as a description of the characteristics that make use of the triad mechanism of the Schema theory (Piaget and Garcia, 1989): Intra, Inter y Trans. A meaningful result is that the concepts of function and the function composition remain separate from the chain rule in itself, using an algorithm that absorbs the selfsame rule and which we have named “*outside/inside method*”.

Key words: Genetic decomposition, Chain Rule, APOS Theory, Schema levels.

Introducción

En los programas de gran parte de las carreras universitarias, que son impartidas por los centros de educación superior chilena, tienen incorporados cursos de matemática que

abordan una multiplicidad de conceptos, entre ellos los relativos al cálculo diferencial en una variable. A su vez, estos conceptos se vuelven herramientas –al ser utilizadas por los aprendices– para resolver problemas, en una amplia gama de áreas del conocimiento. Por ejemplo, en la economía, se utiliza la derivada de algunas funciones para maximizar utilidades y minimizar costos; en física, la primera y segunda derivada de una función permite calcular la velocidad y la aceleración, respectivamente; en química, la derivada de la compuesta de funciones se aplica al estudio de las velocidades de reacción. En todos esos casos anteriores –y muchos más– emerge un denominador común, que es relevante para dar respuesta a problemas que surgen en cada disciplina, este es el concepto de Regla de la Cadena, como un componente necesario para derivar funciones que correspondan a la compuesta de dos o más funciones en una variable real (o también llamadas funciones reales).

Antecedentes

Existen investigaciones (Clark, Cordero, Cottrill, Czarnocha, DeVries, St. John, Tolia y Vidakovic, 1997; Cottrill, 1999; Meel, 1999; Horvath, 2008; Jojo, Brijlall & Maharaj, 2010; Kabael, 2010; Maharaj, 2013) que dan cuenta de una serie de dificultades en torno al aprendizaje, su aplicación y comprensión de la Regla de la Cadena. Clark y su grupo de colaboradores (Clark, et. al., 1997) elaboraron, a la luz de la teoría APOE (Dubinsky, 1991) y la tríada de Piaget y García (1983/89), una Descomposición Genética (DG) preliminar de la Regla de la Cadena, que permitió identificar construcciones mentales necesarias para el aprendizaje del concepto. Uno de los principales resultados de esa investigación deja de manifiesto que la composición de funciones es un constructo clave en el aprendizaje de esta regla. Más aún, las evidencias que se obtuvieron a partir de la aplicación de una entrevista reportada en Clark, et. al. (1997), muestra que muchos de los entrevistados revelaron débiles conocimientos sobre la Regla de la Cadena en si misma, y la causa está asociada con la escasa –o nula– comprensión de la composición de funciones. Otro resultado importante, para este grupo de investigadores, es considerar la composición de funciones como un elemento relevante para el aprendizaje adecuado de la Regla de la Cadena. Así también, como producto de su investigación, concluyeron que la comprensión de esta regla como un esquema debe contener un esquema de función que incluya, al menos, una *concepción proceso* de función, de composición y descomposición de una función. Además, se obtuvo como evidencia que el esquema de función debe estar vinculado con el esquema de diferenciación, que incluye las

reglas de diferenciación, al menos en una concepción proceso.

Sin embargo, los autores no consideraron un modelo de construcción del concepto que incluya las reglas de derivación, el álgebra de derivadas y la descomposición de funciones como estructuras mentales. Más aún, estos investigadores no precisan de una descripción explícita del esquema Regla de la Cadena en sus niveles operacionales Intra-Regla de la Cadena, Inter-Regla de la Cadena y Trans-Regla de la Cadena.

Un par de años después, Cottrill (1999) continúa la investigación anterior fijando su mirada en aspectos comparativos. Uno de ellos es la correlación que existe entre la capacidad de un estudiante para hacer frente a la composición de funciones, respecto del uso exitoso de la Regla de la Cadena. Como resultado del estudio, Cottrill mostró –también– que la composición de funciones sigue siendo un elemento fundamental para comprender esta regla, adhiriéndose a la DG propuesta por Clark y su grupo de colaboradores.

También Horvath (2008) y Kabaël (2010) destacaron la dificultad que existe en el entendimiento de la Regla de la Cadena, debido a que los estudiantes no logran identificar de dónde proviene dicha regla y les resulta difícil expresarla en símbolos o palabras. En ese sentido, producto de su investigación, Horvath (2008) concluye que aun cuando un estudiante puede determinar la derivada de una función compuesta, no logra hacerlo con funciones que sean no rutinarias, esto es funciones diferentes a las polinómicas o a las trigonométricas.

Sumado a lo anterior, está el estudio realizado por Jojo, Brijlall y Maharaj (2010) quienes afirman la existencia de una instrumentalización de la Regla de la Cadena –por parte de los estudiantes–, y en consecuencia no son capaces de aplicarla exitosamente.

Por otro lado, desde nuestra propia experiencia como docentes en cursos de cálculo diferencial, se aprecia que la Regla de la Cadena es aprendida de forma mecánica, mediante un algoritmo que hemos llamado “*de afuera hacia adentro*”. Esto último, según las propias palabras de algunos de nuestros estudiantes, ocurre cuando se aplica la regla *derivando desde la función que está más afuera y, posteriormente, continúa con aquella que está dentro de la función recién derivada*. Veamos a continuación un ejemplo que ilustra el algoritmo “*de afuera hacia adentro*”:

Consideremos la función $f(x) = (3x^2 - 12x + 1)^3$, que es continua y derivable en todos los números reales (\mathbb{R}). Para derivarla, un estudiante comienza derivando lo que está más afuera de la función, en este caso, el exponente “3”, obteniendo: $f(x) = 3(3x^2 - 12x +$

1)²(a). Luego se deriva aquello que se encuentra adentro de la función f , es decir, $3x^2 - 12x + 1$, obteniendo: $6x - 12$ (b). Finalmente, concluye que la derivada de la función f es el producto de (a) y (b), es decir: $f'(x) = 3(3x^2 - 12x + 1)^2 \cdot (6x - 12)$ –donde $f'(x)$ denota la derivada de f –.

Toda esta información permite afirmar la necesidad de seguir investigando el concepto de la Regla de la Cadena y conocer en profundidad cómo ella se construye en la mente de los estudiantes. El estudio que reportamos, tuvo como objetivo indagar en cuestiones que las investigaciones anteriores no precisan, esto es una DG explícita, que describa las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en ella, e indicadores que interpreten la evolución de los niveles Intra-Regla de la Cadena, Inter-Regla de la Cadena y Trans-Regla de la Cadena.

Referente teórico

La Teoría APOE

La investigación se desarrolló al seno de la Teoría APOE, que emerge por las adaptaciones que realizó Dubinsky (1991) de las ideas piagetanas. Ella se ocupa de la manera como se pasa de un estado de conocimiento a otro, planteando un modelo que representa la forma en que se construyen o aprenden los conceptos matemáticos.

El modelo se llama Descomposición Genética (DG) y está constituido por un conjunto de construcciones (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) y mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación, tematización y asimilación), que suponen un camino viable para la construcción mental de conceptos matemáticos.

Las construcciones mentales no son necesariamente secuenciales ni jerarquizadas. De hecho, según Parraguez y Oktaç (2012), ellas pueden aparecer simultáneamente y requerirse unas de otras.

Las investigaciones que se realizan desde la perspectiva de la teoría APOE, suponen la DG como la hipótesis de investigación del concepto matemático en estudio, la cual contiene a priori los constructos que son requisito para modelar el aprendizaje de dicho concepto.

En adelante se dirá que un estudiante muestra una **concepción acción** cuando él realiza transformaciones a un objeto, que lo percibe como algo externo, y que están originadas por estímulos de terceros que le entregan indicaciones precisas sobre qué debe hacer (Trigueros,

2005). En cambio, él muestra una **concepción proceso** cuando las acciones se repiten y el sujeto reflexiona, incorporándolas en su consciencia (*interiorización*). En esta etapa de construcción del concepto el estudiante no tiene la necesidad de instrucciones externas, sino que “puede intuir un resultado sin tener que realizar la totalidad de los cálculos, además es capaz de invertir los pasos de una determinada transformación sin tener que volver a realizarlos” (Parraguez y Oktaç, 2012, p. 106). Dos o más procesos pueden generar uno nuevo mediante el mecanismo mental de la *coordinación*.

Un estudiante da evidencias de una **concepción objeto** cuando *encapsula* un proceso, gracias a la reflexión que él realiza sobre las transformaciones u operaciones que se aplican a un concepto. En esta etapa de construcción, su accionar no está limitado a instrucciones externas, ya que tiene la capacidad de identificar porqué ocurren las transformaciones, sin la necesidad de aplicarlas. De forma inversa, se puede *desencapsular* un objeto cuando se identifica el o los procesos que le dieron origen.

Es importante mencionar que el modo para pasar de un estado de construcción a otro, está regido por la Abstracción Reflexiva. Esta noción (también recogida de las ideas de Piaget) constituye el mecanismo principal en la construcción del conocimiento matemático, esto es, el proceso mediante el cual un individuo realiza acciones sobre los objetos que son fuente de estudio y, a partir de ello, se establecen relaciones o propiedades. El conjunto de acciones a las que nos referimos vienen a constituir los mecanismos mentales de interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación, tematización y asimilación.

En APOE, la noción de **esquema** corresponde a “la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática” (Trigueros, 2005, p. 11)

Ahora bien, dependiendo de la exigencia conceptual que posea un problema, es posible que un sujeto se vea en la necesidad de hacer modificaciones a sus esquemas, para así responder satisfactoriamente. Esto implica que los esquemas no son estáticos y que están en constante evolución.

Desde esta perspectiva entra en juego la tríada de Piaget y García (1983/89): Intra, Inter y Trans. Estos tres niveles de esquema se basan en la coherencia que se establecen entre las acciones, procesos, objetos y otros esquemas del concepto en estudio. En el nivel **Intra**, un

sujeto posee las construcciones mentales de un concepto sin establecer relaciones entre ellas. En segundo nivel, **Inter**, se empiezan a formar tales relaciones y algunas de ellas son tan coherentes, que se pueden interpretar como transformaciones que hace el sujeto al interior del esquema. En el nivel **Trans** las relaciones son totalmente coherentes y un sujeto piensa en un concepto matemático como un todo integrado, que lo lleva a establecer conservación de estructuras entre los elementos del esquema.

Objetivos de investigación

Para formalizar el planteamiento del problema sobre la comprensión profunda y explícita que se reporta en torno al estudio de la Regla de la Cadena en la enseñanza universitaria, es pertinente comenzar el relato de la indagación con dos preguntas generales que guiaron la investigación: ¿Cómo abordan los aprendices universitarios el concepto de la Regla de la Cadena? y ¿Cuáles son las construcciones y mecanismos mentales que ellos precisan para el aprendizaje de ella?

En la búsqueda de respuestas, a lo largo del desarrollo de la investigación, es relevante averiguar, cuáles son los conceptos previos –requisitos esenciales– para ello. En particular, se revisaron investigaciones que reportaran resultados relativos al rol que juega la composición de funciones (en una variable real), en el aprendizaje de la Regla de la Cadena.

Teniendo en cuenta lo anterior, la presente investigación se propuso los siguientes objetivos generales: (1) Indagar en las construcciones mentales que puede utilizar un aprendiz como una estrategia cognitiva para construir el concepto Regla de la Cadena; y, (2) Describir y caracterizar los niveles de comprensión que se pueden tener de ella, y el paso de un nivel operacional de esquema a otro: Intra-Regla de la Cadena, Inter-Regla de la Cadena y Trans-Regla de la Cadena.

Metodología

La teoría APOE además de ser un marco teórico es –también– un referente metodológico, compuesto por tres etapas secuenciales (Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996): análisis teórico o DG; diseño y aplicación de instrumentos; y, análisis y verificación de datos. El producto final de la aplicación de estas etapas fue una DG validada o refinada del concepto en estudio, la cual representa un modelo cognitivo –viable– para aprender y construir la Regla de la Cadena.

La primera etapa de la investigación consistió en un análisis, desde la propia matemática, de los conceptos que están involucrados en la derivada de una función compuesta en una variable real. También se complementó con el estudio de su desarrollo histórico y epistemológico. Estos dos aspectos se concatenaron con el análisis de textos y la experiencia docente de los investigadores para diseñar una DG de la Regla de la Cadena que precisa de las construcciones mentales, los mecanismos mentales y una descripción de los niveles del desarrollo de esquema Intra-Regla de la Cadena, Inter-Regla de la Cadena y Trans-Regla de la Cadena.

Análisis teórico: una descomposición genética hipotética de la Regla de la Cadena

El estudio de la definición de la Regla de la Cadena en libros de texto arrojó tres conceptos matemáticos fundamentales: **función, composición de funciones y diferenciación**. Por ejemplo, según Mena y Arancibia (2005) la definición se presenta de la siguiente forma:

Sea $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$, $f(X) \subset Y$, $a \in X \cap X'$,

$$b = f(a) \in Y \cap Y'$$

Si existe $f'(a)$ y $g'(b)$ entonces existe $(g \circ f)'(a)$ y

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

(Mena y Arancibia, 2005, p. 286)

De la definición anterior, se desprenden dos condiciones que son requisito para la existencia de la derivada de una función compuesta, en una variable real; por un lado, la factibilidad de la composición entre f y g de modo que $Recorrido(f) \cap Dominio(g) \neq \emptyset$, y por otro, la existencia de sus derivadas ($f'(a)$ y $g'(b)$).

Sin embargo, existen otros elementos necesarios que subyacen a esta definición, que son los que se refieren a las reglas de derivación, el álgebra de derivadas, y la descomposición (entendida como el proceso inverso de componer dos o más funciones). Todos estos elementos fueron considerados en el diseño de la DG propuesta, los cuales se complementan con los conceptos de función, diferenciación y composición de funciones, y que no han sido reportados, como construcciones mentales explícitas, en investigaciones anteriores.

La DG hipotética de la Regla de la Cadena es presentada en la Figura 1.

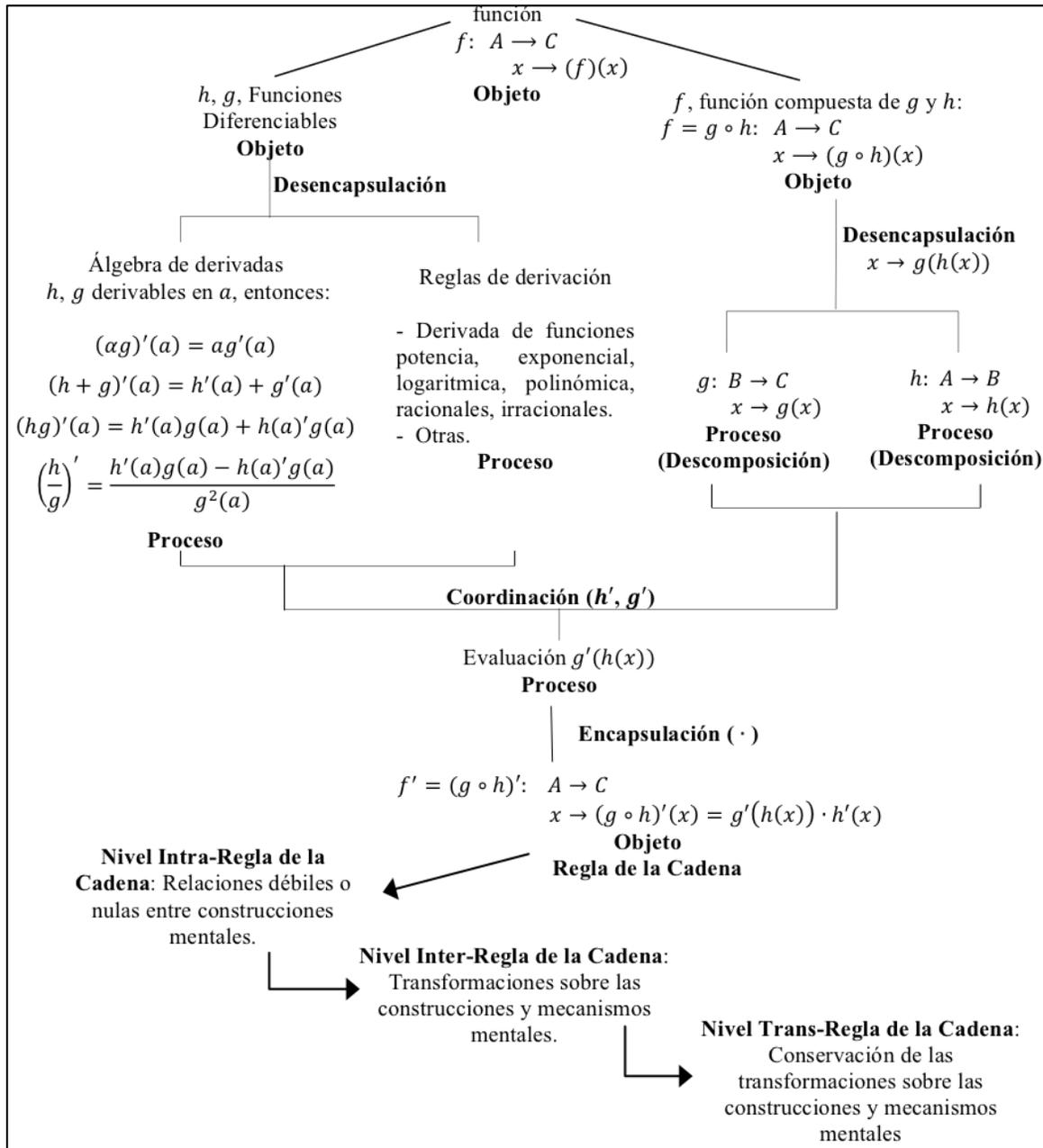


Figura 1: Descomposición Genética hipotética de la Regla de la Cadena.

Como se puede apreciar en la Figura 1, la DG hipotética propuesta contiene como requisitos primordiales dos construcciones mentales: la composición de funciones y la diferenciación. El modelo seguido para diseñar la construcción mental de la Regla de la Cadena considera, por una parte, una *concepción objeto* de la composición de funciones (parte superior derecha de la Figura 1), digamos $f(x) = (g \circ h)(x)$, con la condición que $\text{Recorrido}(h) \cap \text{Dominio}(g) \neq \emptyset$. Este *objeto* f se *desencapsula* en los *procesos* que le dan origen, dos funciones g y h , definidas desde B a C y de A a B , respectivamente. Para que ello

ocurra, es necesario descomponer la función f , entendido como el proceso inverso de componer dos funciones.

Por otro lado, en la parte superior izquierda de la Figura 1, se precisa una *concepción objeto* de las funciones diferenciables, que se *desencapsulan* en el álgebra de derivadas como un *proceso*. Los dos procesos (descomposición) se *coordinan* con el *proceso* del álgebra de derivadas para dar origen a un nuevo *proceso*, que es evaluar $h(x)$ en $g'(x)$. Esta última *coordinación* ocurre mediante las derivadas de las funciones g y h .

Todas las *concepciones proceso* anteriores se *encapsulan* en una *concepción objeto* de la Regla de la Cadena, cuando ésta se construye mentalmente como una función diferenciable, definida de A en C , tal que:

$$f'(x) = (g \circ h)'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x), \forall x \in A$$

Es a partir de la concepción objeto de la Regla de la Cadena, que se describen los tres niveles de desarrollo de su esquema, que se han venido llamando Intra-Regla de la Cadena, Inter-Regla de la Cadena y Trans-Regla de la Cadena, a través de características operacionales que los estudiantes podrían mostrar en sus argumentos observables al abordar un situación problema.

- **Nivel Intra-Regla de la Cadena:** Se considera que un aprendiz muestra este nivel de esquema cuando establece relaciones a través de:
 - ✓ Utilizar la Regla de la Cadena como un conjunto de reglas –aisladas– para calcular la derivada de funciones compuestas.
 - ✓ Utilizar la Regla de la Cadena para derivar funciones compuestas, restringiéndose a algunos tipos particulares de funciones, entre ellas, la función potencia, la función logaritmo, la función exponencial, la función polinómica, las funciones trigonométricas, las funciones racionales e irracionales.
 - ✓ No establecer relaciones entre los conceptos de diferenciación, función y composición de funciones.
 - ✓ Operacionalizar la Regla de la Cadena como un algoritmo y no como una función.

- **Nivel Inter-Regla de la Cadena:** Este nivel se caracteriza por aquellas respuestas y razonamientos que ocurren cuando un aprendiz realiza transformaciones a través de:
 - ✓ Utilizar la Regla de la Cadena para derivar cualquier tipo de funciones compuestas.
 - ✓ Establecer relaciones entre las distintas derivadas de una función compuesta.
 - ✓ Comenzar a establecer relaciones –pero aún débiles– entre los conceptos de diferenciación, función, composición de funciones, descomposición de funciones, álgebra de derivadas y reglas de derivación.
- **Nivel Trans-Regla de la Cadena:** Las características que definen este nivel de esquema son aquellas cuando el aprendiz establece conservaciones estructurales a través de:
 - ✓ Reconocer la Regla de la Cadena no como un conjunto de reglas aisladas, sino más bien, como una única regla que establece una relación en la derivada de funciones compuestas, mediante la expresión matemática $(g \circ h)'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$, $\forall x \in A$, para todo tipo de funciones reales g y h .
 - ✓ Considerar la Regla de la Cadena como una estructura integrada, que se puede aplicar a cualquier tipo de funciones compuestas y de variable real.
 - ✓ Operacionalizar la Regla de la Cadena como una función, donde intervienen los conceptos de diferenciación, función, composición de funciones, descomposición de funciones, álgebra de derivadas y reglas de derivación.

Diseño de instrumentos.

Para indagar acerca de *las construcciones mentales que puede utilizar un aprendiz como estrategia cognitiva, para construir el concepto Regla de la Cadena, y caracterizar los niveles de esquema*, se aplicaron dos instrumentos: un cuestionario y una entrevista semiestructurada, ello permitió obtener información para validar y/o refinar la DG propuesta (Figura 1).

El cuestionario

Tabla 1: Preguntas del Cuestionario

| | |
|-------------------|---|
| Pregunta 1 | <p>Considere las siguientes funciones:</p> $f(x) = x^2 ; g(x) = \sqrt{2x + 1} ; h(x) = \frac{1}{x}$ <p>a) Calcular $(f \circ g)(4)$</p> <p>b) Calcular $(g \circ h)(2)$</p> <p>c) Determinar $(f \circ g)(x)$ y luego responder si es verdadera la siguiente igualdad, justifique.</p> $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ <p>d) Cuál es el dominio de $(f \circ g)(x)$</p> |
| Pregunta 2 | <p>Considerando $f(x) = \frac{1}{x}$</p> <p>a) Determine la derivada de f.</p> <p>b) El resultado obtenido en a), ¿Es una función? Justifica tu respuesta</p> <p>c) Cuál es el dominio de $f'(x)$.</p> |
| Pregunta 3 | <p>¿Cuál de los siguientes procedimientos es correcto? ¿Por qué? Justificar cada una de tus afirmaciones.</p> <p>(1) $(x^3 + 3x)' = (x^3)' + (3x)' = 3x^2 + 3$</p> <p>(2) $((x^3) \cdot (3x))' = (x^3)' + (3x)' = 3x^2 + 3$</p> |
| Pregunta 4 | <p>Sea $f(x) = \sqrt{2x - 1}$, determine dos funciones $g(x)$ y $h(x)$ de modo que</p> $(g \circ h)(x) = \sqrt{2x - 1}$ |
| Pregunta 5 | <p>Considere las funciones f y g, junto a sus respectivas derivadas</p> $f(x) = x^3 ; g(x) = x^2 + x$ $f'(x) = 3x^2 ; g'(x) = 2x + 1$ <p>Determine</p> <p>a) $f'(g(2))$ b) $g'(f(3))$</p> <p>c) $f'(g(x))$ d) $g'(f(x))$</p> |
| Pregunta 6 | <p>Considere la función $f(x) = (2x - 3)^3$</p> <p>a) Determine $g(x)$ y $h(x)$ de modo que $(g \circ h)(x) = f(x)$</p> <p>b) Calcular la expresión $g'(h(x)) \cdot h'(x)$</p> <p>c) Calcule $f'(x)$</p> <p>d) De b) y c) ¿Podría usted conjeturar algo? Justifique su planteamiento.</p> |

El objetivo del cuestionario fue obtener evidencias acerca de las concepciones de estudiantes, en relación a construcciones mentales dispuestas en la DG. Las seis preguntas que conforman el cuestionario (Tabla 1), han sido diseñadas para validar o refinar aquellos

constructos que fueron considerados como requisito para construir la Regla de la Cadena como una *concepción objeto*.

Análisis a priori de las preguntas del cuestionario

La primera pregunta que se plantea en este cuestionario tiene por objetivo indagar en las concepciones que muestran los estudiantes sobre la composición de funciones, entendida como una función $(f \circ g)$, de modo que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, donde $x \in \text{Rec}(g) \cap \text{Dom}(f)$. En el diseño de la DG de la Regla de la Cadena se incluyó la composición de funciones como una *concepción objeto*, que quedará en evidencia cuando se la considere como una función que se genera al componer dos o más funciones, y que está dotada, en consecuencia, de un dominio y un recorrido. Se dirá, además, que un estudiante posee esta construcción mental si reconoce y comprende la condición para efectuar la composición de dos funciones, es decir, que $\text{Recorrido}(g) \cap \text{Dominio}(f) \neq \emptyset$.

La segunda pregunta del cuestionario busca dejar de manifiesto las concepciones que posee un estudiante respecto de la diferenciación: una función que asigna a cada $p \in \mathbb{R}$ su imagen dada por $f'(p)$. En la DG de la Regla de la Cadena se planteó esta construcción mental como una *concepción objeto*, y ocurrirá si el estudiante muestra que la composición de dos funciones genera una nueva función, con una estructura coherente, que asigna a cada elemento del dominio una única imagen en el codominio. Esto significa, entre otras cosas, que puede identificar los conjuntos que determinan el dominio y recorrido de una función real.

En la tercera pregunta se indagan las concepciones que tienen los estudiantes sobre el álgebra de derivadas y las reglas de derivación que, en la DG de la Regla de la Cadena, corresponden a dos *concepciones proceso*. Cuando las estrategias utilizadas por un estudiante, para justificar qué procedimiento es el correcto, son de carácter general, sin recurrir a funciones específicas, entonces diremos que él muestra una *concepción proceso* de las reglas de derivación y una *concepción proceso* del álgebra de derivadas.

La cuarta pregunta del instrumento, busca dejar en evidencia las concepciones sobre la descomposición, que es el proceso inverso de componer dos funciones. Para ello, la *concepción objeto* composición de funciones, que está en la DG de la Regla de la Cadena, se *desencapsula* en el proceso que le dio origen, mediante la descomposición de funciones. Para ello, un estudiante debe considerar dos funciones $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = 2x - 1$ que al componer generan la función f , considerando que $\text{Dom}(g) = [0; \infty[$ y $\text{Dom}(h) = \mathbb{R}$,

respectivamente.

Para la quinta pregunta, un estudiante debe coordinar tres *concepciones proceso* (álgebra de derivadas, reglas de derivación y la descomposición de funciones) que dan origen a un nuevo *proceso*: evaluación de funciones derivadas. La coordinación de ellos ocurre a través de la evaluación de $f(x)$ y $g(x)$ en las funciones derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$. Cuando esto ocurra, diremos que un estudiante muestra una *concepción proceso* de la evaluación de funciones derivadas.

La última pregunta del cuestionario tiene por objetivo que un estudiante *encapsule* los *procesos* álgebra de derivadas, reglas de derivación, descomposición de funciones y evaluación de funciones derivadas, para dar origen a una *concepción objeto* Regla de la Cadena. Para que esto quede de manifiesto, esta regla debe entenderse como una función f , dotada de un dominio y recorrido, de modo que $f'(x) = (g \circ h)'(x)$, a condición que $\text{Recorrido}(h) \cap \text{Dominio}(g) \neq \emptyset$.

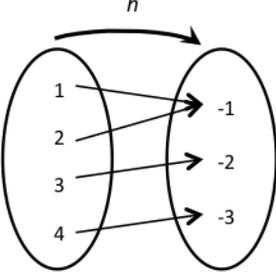
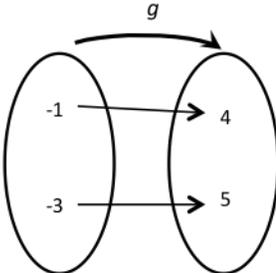
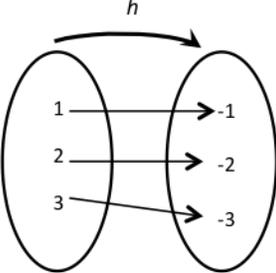
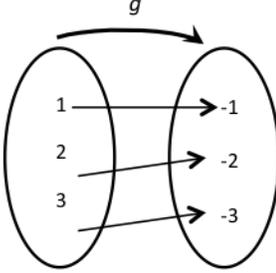
La entrevista semiestructurada

Este instrumento está constituido por cuatro preguntas (ver Tabla 2), mediante el cual se busca documentar, a través de evidencias empíricas, la caracterización del nivel de desarrollo del esquema de la Regla de la Cadena, que muestran estudiantes al establecer relaciones, o realizar transformaciones o mostrar conservación de estructuras entre los distintos componentes operacionales que se han concebido para describir cada uno de los niveles de la regla en estudio.

Análisis a priori de las preguntas de la entrevista

La primera pregunta de la entrevista busca dejar en evidencia la concepción que muestra un estudiante sobre las reglas de derivación, que es una concepción proceso presente en la DG de la Regla de la Cadena. Las estrategias y justificaciones que evidencie cada estudiante –para responder satisfactoriamente–, permitirán observar las relaciones que él establece entre las diferentes acciones, procesos u objetos de la Regla de la Cadena. En otras palabras, esta pregunta nos permitirá dar cuenta del desarrollo del *esquema* hasta –por lo menos– el nivel Intra-Regla de la Cadena.

Tabla 2: Preguntas de la entrevista semiestructurada

| | |
|-------------------|--|
| Pregunta 1 | <p>Calcular la derivada de las siguientes funciones, suponiendo que cada una está bien definida en su dominio. De no poder hacerlo, explicar por qué no lo logró.</p> <p>A) $f(x) = \ln(x)$ B) $g(x) = e^x$ C) $h(x) = 6x^2 - 3x$ D) $u(x) = \text{sen}(x)$ E) $n(x) = \frac{x}{x-1}$ F) $v(x) = \cos(x)$ G) $p(x) = x \cdot e^x$ H) $w(x) = \tan(x)$ I) $q(x) = \sqrt[3]{x}$</p> |
| Pregunta 2 | <p>Considere las siguientes funciones g (derecha) y h (izquierda),</p> <p>a) Determinar para qué valores de \mathbb{R} está bien definida la derivada de $(g \circ h)(x)$.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>Diagrama de la función h: un mapeo de un conjunto de números {1, 2, 3, 4} a otro conjunto de números {-1, -2, -3}.</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Diagrama de la función g: un mapeo de un conjunto de números {-1, -3} a otro conjunto de números {4, 5}.</p> </div> </div> <p>b) Determinar para qué valores de \mathbb{R} está bien definida la derivada de $(h \circ g)(x)$.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>Diagrama de la función h: un mapeo de un conjunto de números {1, 2, 3} a otro conjunto de números {-1, -2, -3}.</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Diagrama de la función g: un mapeo de un conjunto de números {1, 2, 3} a otro conjunto de números {-1, -2, -3}.</p> </div> </div> |
| Pregunta 3 | <p>Calcular la derivada de las siguientes funciones:</p> <ol style="list-style-type: none"> $f(x) = (x^3 + 2x - 1)^4$ $g(x) = \sqrt{x^2 + e^x}$ $h(x) = \ln(x + 3x^2)$ $p(x) = \text{sen}(3x)$ $q(x) = e^{(x^2)}$ <p>¿Has tenido dificultades al derivar cada función? ¿Cuáles? Explica en detalle.</p> |
| Pregunta 4 | <p>Define una función f que corresponda a la compuesta entre dos funciones. Luego calcula la derivada de f.</p> |

En la segunda pregunta, hay dos funciones que no están representadas por una expresión algebraica, sino por diagramas sagitales con números reales. En cada función se requiere identificar cuáles números permiten que las derivadas $h \circ g$ y de $g \circ h$ estén bien

definidas. Esta pregunta indaga en las transformaciones que puede mostrar un estudiante para determinar los valores numéricos que permiten que las funciones g y h puedan componerse, sean $(g \circ h)(x)$ o $(h \circ g)(x)$. Sin embargo, para que la composición pueda ocurrir, es necesario que $Rec(h) \cap Dom(g) \neq \emptyset$ y $Rec(g) \cap Dom(h) \neq \emptyset$, respectivamente.

Para la primera condición, se necesita que $Dom(g \circ h) = \{1,2,4\}$; y, para $(h \circ g)(x)$ no hay valor real alguno, de modo que $(h \circ g)'(x)$ esté bien definido. Por lo tanto, no es posible componer $(h \circ g)(x)$, debido a que $Recorrido(g) \cap Dominio(h) = \emptyset$.

En términos del desarrollo de esquema de Regla de la Cadena, con esta pregunta se busca dejar en evidencia hasta el nivel operacional Inter-Regla de la Cadena, debido que se quiere documentar si un estudiante muestra las transformaciones necesarias entre la *concepción objeto* compuesta de funciones y la *concepción objeto* Regla de la Cadena. Si sólo ocurren débiles –o nulas– relaciones, diremos que él muestra hasta un nivel Intra-Regla de la Cadena.

La tercera pregunta de la entrevista tiene por objetivo dar cuenta del desarrollo del *esquema* de un estudiante hasta el nivel Inter-Regla de la Cadena. Para ello, hay que determinar la derivada de cinco funciones compuestas. Serán las estrategias y justificaciones que el estudiante entregue, lo que permitirá observar las transformaciones que él pone en juego y, en consecuencia, decidir qué nivel de esquema muestra.

Interesa, además, poner atención en el nivel de coherencia de las transformaciones que ocurren sobre las *concepciones objetos* diferenciación, función y composición de funciones. Ahora para alcanzar el segundo nivel de esquema se debe considerar, también, si acaso cada una de las funciones está bien definida. Ocurre que todas las funciones tienen como dominio los números reales, excepto el tercer inciso, donde el dominio de la función $h(x) = \ln(x + 3x^2)$ es $]-\infty; -1/3] \cup [0; \infty[$.

La cuarta pregunta de la entrevista requiere definir una función f que corresponda a la composición de dos funciones –que podemos llamar g y h –. Esta pregunta abierta busca averiguar qué estrategias utilizará un estudiante para construir las tres funciones (dos de ellas componen la tercera), teniendo en cuenta que puede optar por dos caminos: en el primero puede definir algebraicamente las funciones considerando sólo la fórmula que las define, sin prestar atención al dominio y recorrido de ellas. El hecho que un estudiante aborde la pregunta

cuatro de este modo, se interpreta desde APOE, que él evidencia una construcción hasta un nivel de esquema Intra-Regla de la Cadena.

Si por el contrario, un estudiante aborda la pregunta cuatro de otra forma, por ejemplo, que defina explícitamente cada una de las tres funciones, con sus respectivos dominios y recorridos, precisando la posibilidad de componer dos funciones y obtener la tercera, entonces se interpretará que el estudiante muestra hasta un nivel de construcción esquema Trans-Regla de la Cadena. Esta forma de proceder supone una conservación estructural de las transformaciones que ocurren sobre las *concepciones objeto* de función, composición de funciones y diferenciación, y sobre las concepciones proceso reglas de derivación, álgebra de derivadas y descomposición de funciones, construcciones mentales que van modelando la construcción cognitiva de la Regla de la Cadena.

Participantes

En esta investigación participaron once (11) estudiantes de una universidad chilena, que estudian carreras de Ingeniería o Pedagogía en Matemática. Los estudiantes, etiquetados como E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, y E11, constituyen un caso de estudio (Stake, 2010), definido según los siguientes indicadores:

- Participación voluntaria en la investigación.
- Haber aprobado algún curso de cálculo diferencial, propuesto en su currículo académico.
- Accesibilidad de los investigadores.
- Avance curricular, que los estudiantes no estén cursando el primer semestre de su carrera.

Aplicación de los instrumentos

En un primer momento, al grupo de estudiantes se les aplicó el cuestionario, lo cual tuvo una duración de 60 minutos. Posteriormente (una semana después) se aplicó la entrevista individualmente, la cual tuvo una duración de entre 40 a 70 minutos, por estudiante.

Análisis de los datos

La aplicación de los instrumentos (Cuestionario y Entrevista semiestructurada) permitió recoger valiosa información acerca de las construcciones y mecanismos mentales que

aparecen en la DG; un análisis posterior determinó si son necesarias o no para la construcción de la Regla de la Cadena.

Las producciones realizadas por los estudiantes fueron analizadas y comparadas con las construcciones y mecanismos mentales que están presentes en la DG de la Regla de la Cadena. Este proceso sirvió para identificar a los estudiantes que parecen comprender esta regla y a quienes parecen no haberla entendido. Como resultado de la comparación emergieron las construcciones y mecanismos mentales que estaban presentes o ausentes en cada estudiante y que están en relación con la DG que se diseñó.

Resultados

Cada estudiante que será analizado a continuación, fue seleccionado porque sus argumentos observables eran similares a los de otros participantes; sin embargo, sus escritos presentan mayor claridad y están ligeramente mejor justificados. Esto permitió obtener información relevante y una mejor contrastación con la DG de la Regla de la Cadena propuesta a priori.

Para el análisis de los resultados se eligieron dos estudiantes representativos que respondieron el cuestionario: E6, quien mostró una *concepción objeto* de la Regla de la Cadena y E4 quien sólo mostró una *concepción acción* de la regla en estudio. De la entrevista se seleccionaron tres estudiantes que exhibieron diferentes niveles de esquema de la Regla de la Cadena.

Resultados de la aplicación del cuestionario

Estudiante E6 (Concepción Objeto de la Regla de la Cadena)

La estrategia que utiliza E6 para responder a la primera pregunta del cuestionario, muestra una *concepción objeto* de la composición de funciones. Su accionar no inicia con el cálculo de $(f \circ g)(4)$, sino que determina explícitamente el dominio de las funciones $f, g, h, f \circ g$ y $g \circ h$.

Una vez que E6 ha determinado los conjuntos donde las funciones están bien definidas, él justifica que “*como 4 pertenece al $\text{dom}(f \circ g)$ podemos calcular*” (Figura 2). Pese a que cometió un error aritmético (el resultado es 9), su manera de abordar la composición de funciones no obedece solamente a cálculos mecánicos.

a) Como 4 es dom $(f \circ g)$ podemos calcular

$$\begin{aligned} &(f \circ g)(4) \\ &= f(g(4)) \\ &= f(\sqrt{2 \cdot 4 + 1}) \\ &= f(\sqrt{5}) \\ &= (\sqrt{5})^2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Figura 2: Respuesta de E6 en la pregunta 1 del cuestionario

Sus cálculos no se limitan a valores específicos (por ejemplo $(f \circ g)(4)$), y puede calcular la composición de dos o más funciones de manera general (por ejemplo $(f \circ g)(x)$). Las producciones que muestra en los cuatro incisos de la pregunta 1, dejaron en evidencia que concibe la composición de funciones como una función, y que esta operación no es necesariamente conmutativa.

En la pregunta 2, E6 respondió de forma correcta los tres incisos, en los apartados a) y b), E6 muestra que concibe la derivada como una nueva función, dotada de un dominio específico. Su argumento para justificar que f es una función, es la definición misma del concepto (Figura 3)

a) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

b) Si es una función, ya que para cada x , existe una única imagen.

Figura 3: Respuesta de E6 a la pregunta 2 del cuestionario.

Estas respuestas evidencian que él muestra una *concepción objeto* de la diferenciación, uno de los constructos mentales requisito para construir la Regla de la Cadena. También las justificaciones que E6 proporciona en la tercera pregunta del cuestionario, muestran una *concepción proceso* del álgebra de derivadas y de las reglas de derivación, ya que sus argumentos apuntan a una explicación general sobre la diferencia entre la derivada de una adición y la derivada de un producto (Figura 4).

Como la derivada es una transformación lineal cumple que

$$\begin{aligned} D(x+y) &= D(x) + D(y) \\ D(\alpha x) &= \alpha D(x) \end{aligned}$$

Figura 4: Respuesta de E6 a la pregunta 3 del cuestionario.

En la pregunta cuatro el estudiante E6 no define las dos funciones solicitadas mediante una fórmula algebraica, sino que determina con exactitud el dominio y recorrido de cada una de ellas (g y h). Esta información permite asegurar que él muestra una *concepción proceso* de la descomposición de funciones pues piensa que el componer las funciones g y h da origen a la función f , considerando sus respectivos dominios y recorridos.

Si continuamos analizando las respuestas a la pregunta 5, también se evidencia que E6 muestra una *concepción proceso* de la evaluación de funciones derivadas, ya que respondió de forma correcta los cuatro incisos de la pregunta.

Finalmente, producto del análisis de las respuestas entregadas en la sexta pregunta y de las anteriores, queda en evidencia que el estudiante comprende la Regla de la Cadena como la derivada de una función compuesta (ver Figura 5). Con sustento empírico decimos entonces que él muestra una *concepción objeto* de la Regla de la Cadena, pues piensa en ella como una única regla, que es una función, dotada de un dominio y recorrido.

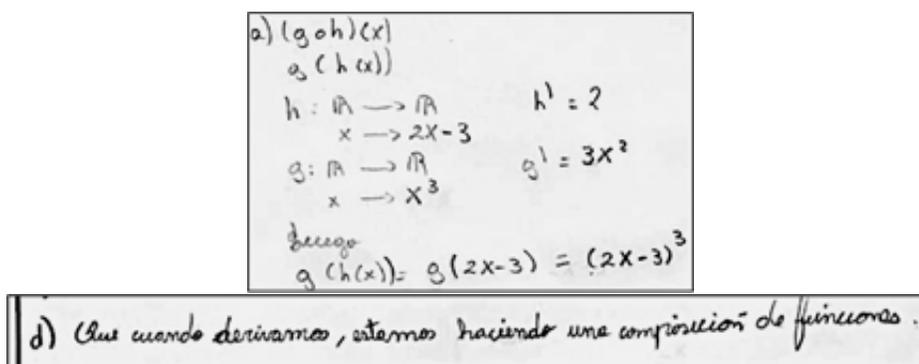


Figura 5: Reflexión que realiza E6 en la pregunta 6 del cuestionario.

Según el análisis realizado, se infiere que E6 logra *encapsular* los *procesos* descomposición de funciones, álgebra de derivadas, reglas de derivación y evaluación de funciones, para dar origen a una *concepción objeto* Regla de la Cadena, la que percibe como una función.

Estudiante E4 (Concepciones acciones de conceptos previos al objeto Regla de la Cadena)

En general, las producciones que realiza el estudiante E4 en el cuestionario, en comparación con las del estudiante E6, no son totalmente correctas. Sin embargo, sus

estrategias, errores y dificultades cognitivas son relevantes de destacar. De ahí que ha sido seleccionado para mostrarlo en este escrito.

c) Falso.

$$(f \circ g)(x) = 2x + 1$$

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$$

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

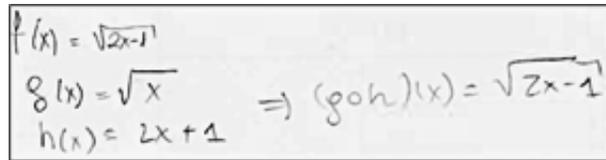
Figura 6: Respuesta de E4 al tercer inciso de la pregunta 1 del cuestionario

A diferencia de E6, el estudiante E4 no alcanza a mostrar una *concepción objeto* de la composición de funciones, debido a que sus acciones están limitadas a un análisis algebraico. En su respuesta a la pregunta 1 (Figura 6), E4 reconoce que la composición de funciones no es conmutativa, pero él no está pensando en ella como una función, es decir, no ha considerado dominio ni recorrido. Esto se aprecia con más claridad cuando él determina (en el cuarto inciso de esa pregunta) que el dominio de $f \circ g$ son todos los números reales: esto es un error, debido a que para efectuar la composición es necesario que el dominio sea $\left[-\frac{1}{2}; \infty^+\right]$.

En la segunda pregunta, E4 muestra una *concepción objeto* de la diferenciación. En forma explícita declara que la derivada de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es una función, de modo que $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Por otra parte, en la pregunta 3, E4 justifica mediante las propiedades de derivación que el primer procedimiento es adecuado y que el segundo no, pues están mal aplicadas esas propiedades. Esto se traduce en que el estudiante da cuenta de una *concepción proceso* del álgebra de derivadas y de las reglas de derivación.

En la cuarta pregunta del cuestionario, E4 no muestra una *concepción proceso* de la descomposición. Esto significa que si bien logró identificar (Figura 7) las funciones g y h que al componerlas generan f , su accionar se limitó a cálculos algebraicos, sin considerar los dominios y recorridos necesarios para poder efectuar la composición.

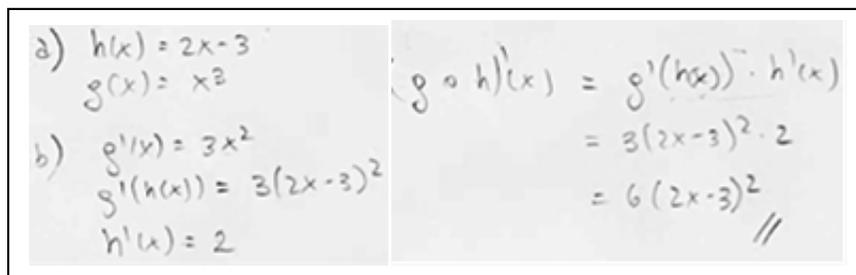


$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{2x-1} \\
 g(x) &= \sqrt{x} \\
 h(x) &= 2x+1 \quad \Rightarrow \quad (g \circ h)(x) = \sqrt{2x-1}
 \end{aligned}$$

Figura 7: Respuesta de E4 en la pregunta 4 del cuestionario.

Además, para poder efectuar $(g \circ h)(x)$, el dominio de h debe ser $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$, hecho que no fue considerado por E4 (Figura 7). Por ello se dice que él no muestra una *concepción proceso* de la descomposición. En la pregunta 5, el estudiante E4 determina satisfactoriamente los cuatro incisos solicitados. Él tiene la capacidad de evaluar funciones en funciones derivadas, sin la necesidad de utilizar, necesariamente, valores numéricos: por ejemplo, para obtener $f'(g(x))$, acude al *proceso* reglas de derivación (para determinar f') con el *proceso* descomposición de funciones para coordinarlos mediante el procedimiento de evaluar $g(x)$ en $f'(x)$. Por estos motivos, según el análisis a priori que elaboramos, se dirá que él muestra una *concepción proceso* de la evaluación de funciones, construcción mental presente en la DG de la Regla de la Cadena.

Finalmente, a la luz del análisis realizado a las respuestas de E4, en la pregunta 6 del cuestionario (Figura 8) y otras, afirmamos que E4 no evidencia una *concepción objeto* de la Regla de la Cadena. Esto debido a que, si bien piensa en la derivada de una función compuesta como una única regla, sólo la concibe como un algoritmo, esto es, un procedimiento algebraico para derivar funciones compuestas. Sus producciones dan cuenta de un tratamiento a las preguntas que no considera dominio ni recorrido de g y h . Todo el proceso es puramente algebraico.



$$\begin{aligned}
 a) \quad & h(x) = 2x-3 \\
 & g(x) = x^3 \\
 b) \quad & g'(x) = 3x^2 \\
 & g'(h(x)) = 3(2x-3)^2 \\
 & h'(x) = 2 \\
 & (g \circ h)'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) \\
 & = 3(2x-3)^2 \cdot 2 \\
 & = 6(2x-3)^2 //
 \end{aligned}$$

Figura 8: Respuestas de E4 en la pregunta 6 del cuestionario.

Si tomamos en consideración toda la información que E4 proporcionó, se puede afirmar que él utiliza el algoritmo “*de adentro hacia afuera*” que le permite derivar funciones

compuestas, pero no concibe la regla como una función, pues su accionar se limita a cálculos algebraicos. Además, el estudiante no ha dado indicios de *encapsular* los *procesos* de reglas de derivación, álgebra de derivadas y descomposición de funciones, elementos que son requisito para construir -de manera viable- la Regla de la Cadena.

La entrevista

Estudiante 5 (Nivel operacional Intra-Regla de la Cadena)

En la pregunta 1, E5 responde satisfactoriamente a todos los incisos. Esto significa, desde APOE, que muestra una *concepción proceso* de las reglas de derivación y del álgebra de derivadas, mediante la derivada de las funciones que ahí aparecen. Luego, en la pregunta 2, no entrega respuesta alguna. Decimos, entonces, que no establece relaciones entre los *objetos* diferenciación y composición de funciones. Esto dificultará -o anulará- la posibilidad de alcanzar un nivel operacional Trans-Regla de la Cadena.

Al analizar las producciones que realiza E5 en la tercera pregunta, sucedió que determinó la derivada de cada función compuesta, aunque con algunos errores (Figura 9). Por ejemplo, en el primer inciso, no agregó el exponente 3 al primer paréntesis, debiendo haber obtenido: $f'(x) = 4(x^2 + 2x - 1)^3(2x + 2)$.

| | |
|---|---|
| <p>a. $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^4$ $f'(x) = 4(x^2 + 2x - 1)(2x + 2)$</p> | <p>b. $g(x) = \sqrt{x^2 + e^x}$ $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + e^x}} \cdot (2x + e^x)$</p> |
| <p>c. $h(x) = \ln(x + 3x^2)$ $h'(x) = \frac{1}{(x + 3x^2)} (1 + 6x)$</p> | <p>d. $p(x) = \text{sen}(3x)$ $p'(x) = 3\cos(3x)$</p> |

Figura 9: Derivadas realizadas por E5 en la pregunta 3 de la entrevista

Estas respuestas muestran que E5 está aplicando la Regla de la Cadena como un algoritmo, derivando “*de afuera hacia adentro*”. No da indicios que permitan asegurar que halló una función derivada de cada función, debido a que en ninguno de los casos ha considerado el dominio en el cual es posible determinar la derivada. Ocurre que en los incisos a), b) y d) las funciones son continuas en todos los números reales y además son diferenciables. Pero la función $h(x) = \ln(x + 3x^2)$ está bien definida en $]-\infty; -1/3[\cup$

$]0; \infty[$. Sólo en ese intervalo existe la derivada de h . Esta situación no ha sido considerada por E5.

Finalmente, para poder dar evidencias de uno de los tres niveles de esquema del estudiante, se debe estudiar su respuesta en la última pregunta de la entrevista. Pero al hacerlo (Figura 10), se observa que no establece relación entre *objetos* diferenciación y composición de funciones.

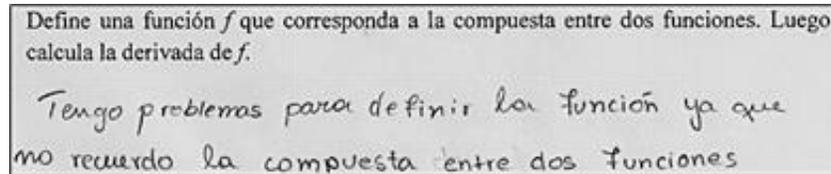


Figura 10: Respuesta de E5 en la pregunta 4 de la entrevista.

Además de no establecer dichas relaciones, ha separado completamente el concepto de función y composición de funciones de la Regla de la Cadena. Dicho de otro modo, E5 concibe la regla como un algoritmo y no como una función. Por toda esta evidencia que mostramos se dirá que él muestra un nivel de esquema Intra-Regla de la Cadena, y que sólo realiza acciones sobre las construcciones mentales dispuestas en la DG de la Regla de la Cadena.

Estudiante E1 (Nivel operacional Inter-Regla de la Cadena)

El estudiante E1 deriva satisfactoriamente las funciones que aparecen en la primera pregunta de la entrevista semiestructurada (Figura 11). En este caso, E1 evidencia una *concepción proceso* de reglas de derivación y una *concepción proceso* del álgebra de derivadas.

d. $u(x) = \text{sen}(x)$

$$u'(x) = \cos(x) \cdot (x)'$$
$$u'(x) = \cos(x) \cdot 1$$
$$u'(x) = \cos(x)$$

Figura 11: Ejemplo de respuesta de E1 en el cuarto inciso de la pregunta 1 de la entrevista.

En la segunda pregunta (Figura 12) E1 identifica los valores reales para los cuales está bien definida la derivada de $(g \circ h)(x)$. Su respuesta evidencia que él *desencapsula* el *objeto* composición de funciones mediante la condición para efectuar la compuesta $(\text{Rec}(h) \cap \text{Dom}(g) \neq \emptyset)$, y concluye que sólo 1, 2 y 4 permiten que la derivada de $(g \circ h)(x)$ esté bien definida. Esto significa que existe una coherencia en las relaciones que E1 construye entre los *objetos* de función, composición de funciones y diferenciación. Esta coherencia en la articulación de construcciones mentales son las transformaciones que los estudiantes realizan, para dar una respuesta correcta a la pregunta.

a) Esta bien definida para los valores 1, 2, 4 de h.
ya que son los únicos valores con que una función
con la otra.

b) PARA NINGÚN VALOR ESTA BIEN DEFINIDA

Figura 12: Respuesta de E1 en la pregunta 2, inciso a), de la entrevista.

Al observar en la figura 12, la respuesta al inciso b), se aprecia que E1 identificó la imposibilidad que existe para determinar la derivada de $(h \circ g)(x)$, pues no es posible componer ambas funciones, ya que $\text{Rec}(h) \cap \text{Dom}(g) = \emptyset$. De esta forma él continua mostrando transformaciones coherentes entre los objetos diferenciación, función y composición de funciones.

En la tercera pregunta de la entrevista (Figura 13), el estudiante E1 determinó la derivada de cada función, pero sus estrategias son mecánicas, ya que no considera el dominio en el cual la derivada está bien definida, y en todas las funciones el dominio es el sistema de los números reales, menos la función $h(x)$, que está bien definida en el intervalo $]-\infty; -1/3[\cup]0; \infty[$. Él utiliza la Regla de la Cadena como un algoritmo, y pese a que evidencia hacer transformaciones, éstas aún no son del todo coherentes, pues en este caso no articula el *objeto* función con el *objeto* diferenciación.

a. $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^4$
 $f'(x) = 4(x^2 + 2x - 1) \cdot (2x + 2)$

b. $g(x) = \sqrt{x^2 + e^x}$
 $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + e^x}} \cdot (2x + e^x)$
 $g'(x) = \frac{1}{2} \frac{(2x + e^x)}{\sqrt{x^2 + e^x}}$

c. $h(x) = \ln(x + 3x^2)$
 $h'(x) = \frac{1}{(x + 3x^2)} \cdot (1 + 6x)$
 $h'(x) = \frac{1 + 6x}{(x + 3x^2)}$

d. $p(x) = \text{sen}(3x)$
 $p'(x) = \cos(3x) \cdot 3$
 $p'(x) = 3 \cos(3x)$

Figura 13: Derivadas de funciones, entregadas por E1, en la pregunta 3 de la entrevista.

Esta situación no es un hecho aislado. Al responder a la pregunta 4 de la entrevista (Figura 14), queda en evidencia que E1 realiza transformaciones al derivar la función seno. Sin embargo, su accionar deja de lado los *objetos* función y composición de funciones, al no considerar el dominio de la función que ha creado.

$f(x) = \text{sen}(x)$
 $f'(x) = (\text{sen}(x))' \cdot (x)$
 $f'(x) = \cos(x) \cdot 1$

Figura 14: Función compuesta creada por E1 en la cuarta pregunta de la entrevista.

Toda esta evidencia se contrastó y analizó con las características definidas en los niveles operacionales del esquema Regla de la Cadena. En base a ello se sustenta que el estudiante E1 muestra hasta un nivel Inter-Regla de la Cadena, ya que realiza transformaciones sobre los *objetos* composición de funciones, diferenciación y función, sin embargo, estas aún son débiles y no están presentes en todas las respuestas que él entrega.

Estudiante E8 (Nivel operacional Trans-Regla de la Cadena)

La información que el estudiante E8 entrega en la pregunta 1 de la entrevista, sustenta que él muestra una *concepción proceso* de las reglas de derivación, pero además está realizando transformaciones con los *objetos* función y diferenciación, mediante una coordinación que ocurre a través del dominio de cada función, determinando el conjunto en el cual está bien definida cada función (Figura 15)

En la segunda pregunta, E8 declara el dominio que permite definir adecuadamente la composición entre g y h . Él realizó transformaciones (Figura 16) coherentes entre los *objetos*

diferenciación y composición de funciones, debido a que reconoce y aplica la condición que es necesaria para componer: $Rec(h) \cap Dom(g) \neq \emptyset$.

a) $f(x) = \ln(x) ; x \geq 0$
 $\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \cdot x' = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$

c) $h(x) = 6x^2 - 3x + 4$
 $x \in \mathbb{R} \Rightarrow h'(x) = 12x - 3$

Figura 15: Respuesta de E8 a los incisos a) y c) de la pregunta 1 de la entrevista.

De manera análoga, E8 identifica explícitamente, en el segundo inciso de la pregunta, que no existe un valor que permita componer $h \circ g$.

a) La composición sólo está bien definida si
 $Dom(g \circ h) = \{1, 2, 4\}$ porque sus imágenes
 están en el dominio de g .

Figura 16: Respuesta de E8 al primer inciso de la pregunta 2 de la entrevista.

Si continuamos analizando las respuestas del estudiante E8, se puede apreciar que aplicó correctamente la Regla de la Cadena en cada uno de los incisos de la pregunta 3. En la figura 17 se puede observar que E8 identificó que $]-\infty; -1/3[\cup]0; \infty[$ es dominio de la función h y, posteriormente, calculó su derivada. De esto se infiere que él muestra una conservación de estructuras entre las transformaciones que realiza sobre los *objetos* función, composición de funciones y diferenciación y sobre los *procesos* reglas de derivación, álgebra de derivadas y descomposición de funciones.

Al decir conservación estructural en las transformaciones nos referimos al estudiante que piensa en cada transformación –que realiza– como parte de una estructura matemática coherente. No sólo las reconoce, sino que también puede modificarlas y adaptarlas para responder correctamente a un problema nuevo para él. En este caso particular, el estudiante E8 articula el *objeto* función con el *objeto* diferenciación, mediante el cálculo del dominio de la función h (ver Figura 17). Evidencia que si el dominio es $]-\infty; 1/3[\cup]0; \infty[$ entonces la derivada de la función h es $h'(x) = \frac{1+6x}{x+3x^2}$. Por este motivo diremos que hasta el momento, E8 establece una conservación estructural en las transformaciones.

| | |
|---|--|
| c. $h(x) = \ln(x + 3x^2)$ $x + 3x^2 > 0$ $x(1 + 3x) > 0$ $x = 0 \vee x = -1/3$ | $\therefore x \in]-\infty; -1/3[\cup]0; \infty[$ $\Rightarrow h'(x) = \frac{1}{x + 3x^2} \cdot (x + 3x^2)'$ $= \frac{1 + 6x}{x + 3x^2}$ |
|---|--|

Figura 17: Respuesta de E8 al inciso c) de la pregunta 3 del entrevista.

En sus producciones, el estudiante E8 muestra algunas transformaciones que forman parte de una estructura matemática, que le permite articular el *objeto* composición de funciones con el *objeto* función, para dar origen a $g(h(x)) = f(x) = \frac{1}{x^3}$, siempre que $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Luego, él *coordina* los *procesos* de reglas de derivación, álgebra de derivadas y descomposición de funciones, para obtener $f'(x) = \frac{-3}{x^4}$ a condición que $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Estas acciones muestran una conservación estructural en las transformaciones, ya que E8 adapta los conceptos matemáticos, involucrados en la Regla de la Cadena, para responder correctamente a la pregunta 4 de la entrevista. Por toda esta evidencia, diremos que él tiene un nivel operacional de esquema Trans-Regla de la Cadena.

| | |
|--|---|
| $f(x) = g(h(x))$ $= g(x^3)$ $= \frac{1}{x^3}$ pero $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. | luego $f'(x) = (x^{-3})'$ $= -3x^{-4}$ $= \frac{-3}{x^4}$ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ |
|--|---|

Figura 18: Respuesta de E8 en la pregunta 4 de la entrevista.

Conclusiones y sugerencias pedagógicas.

En esta investigación se procuró identificar la manera en que los estudiantes abordan cognitivamente la Regla de la Cadena, entendida como la derivada de una función compuesta en una variable real. El interés estuvo centrado en las estructuras mentales que son necesarias para construir esta regla, y caracterizar los niveles de comprensión que se tiene de ella, mediante los niveles operacionales de esquema Intra-Regla de la Cadena, Inter-Regla de la Cadena y Trans-Regla de la Cadena. Esta tríada describe el nivel de coherencia de las relaciones que existen entre los elementos constitutivos del concepto estudiado.

Con base en la evidencia empírica, se encontraron varios resultados. Primero se confirma la existencia de tres *concepciones objetos* para construir el concepto Regla de la Cadena: función, diferenciación y composición de funciones. Pero además, concluimos que también son relevantes tres *concepciones procesos*: reglas de derivación, álgebra de derivadas y descomposición de funciones.

Otro hallazgo es que los estudiantes no sólo tienen dificultades al relacionar la Regla de la Cadena con la composición de funciones, sino que, en varios casos, ellos han separado totalmente ambos conceptos matemáticos. Esto significa, entonces, que un estudiante desconoce que al utilizar esta regla está derivando funciones compuestas. Situación que contradice su propia definición de esta regla. Concluimos que esto se debe, en alguna medida, al algoritmo que hemos llamado “*de afuera hacia adentro*”, pues provoca que la Regla de la Cadena se convierta en un algoritmo –mecánico– que se aplica a cualquier función. Esto se observó en el estudiante E4, quien logró determinar la derivada de funciones compuestas (pregunta 3), pero no logró crear una función compuesta que pudiese ser posteriormente derivada (pregunta 4).

Ocurre además que no sólo la composición de funciones se ha alejado de la Regla de la Cadena, sino también el concepto de función. Los estudiantes E4 y E1 aplicaron la regla sin averiguar la posibilidad de derivar una función compuesta, mediante el dominio de cada función. No es de extrañar, en consecuencia, que resulte difícil una comprensión profunda de la Regla de la Cadena por parte de los estudiantes del caso.

Por toda la evidencia encontrada concluimos que la descomposición genética elaborada (Figura 1), permite establecer un camino viable para la construcción de esta regla, en la mente de cada aprendiz del caso de estudio. Insistimos en sugerir que las estrategias de aprendizaje para la derivada de una función compuesta promueva la incorporación de las construcciones y mecanismos mentales presentes en la DG.

Además, a la luz de los resultados obtenidos, consideramos necesario modificar las características que definen los tres niveles de esquema de la Regla de la Cadena, en la forma como se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3: Reestructuración de los niveles de esquema a la luz de los resultados obtenidos.

| |
|--|
| <p>Nivel operacional Intra-Regla de la Cadena: Se considera que un aprendiz muestra este nivel de esquema cuando establece relaciones a través de:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ Utilizar la Regla de la Cadena como un conjunto de reglas –aisladas– para calcular la derivada de funciones compuestas. ✓ Utilizar la Regla de la Cadena para derivar funciones compuestas, restringiéndose a algunos tipos particulares de funciones, entre ellas, la función potencia, logaritmo, exponencial, polinómica, trigonométricas, racionales e irracionales. ✓ No establecer relaciones entre los conceptos de diferenciación, función, composición de funciones, descomposición de funciones, reglas de derivación y álgebra de derivadas. ✓ Operacionalizar la Regla de la Cadena como un algoritmo mecánico y no como una función definida bajo un dominio y recorrido. ✓ Desconocer o no comprender la condición que $\text{Recorrido}(h) \cap \text{Dominio}(g) \neq \emptyset$ de modo que, por ejemplo, $(g \circ h)(x)$ esté bien definida. |
| <p>Nivel operacional Inter-Regla de la Cadena: Este nivel se caracteriza por aquellas respuestas y razonamientos que ocurren cuando un aprendiz realiza transformaciones a través de:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ Utilizar la Regla de la Cadena para derivar cualquier tipo de funciones compuestas, de forma correcta. ✓ Establecer transformaciones –débiles o erradas– entre los conceptos de diferenciación, función, composición de funciones, descomposición de funciones, reglas de derivación y álgebra de derivadas. ✓ Reconocer la condición que $\text{Recorrido}(h) \cap \text{Dominio}(g) \neq \emptyset$ de modo que $(g \circ h)(x)$ esté bien definida, sin embargo, no es utilizada en las estrategias para resolver un ejercicio o situación problema. ✓ Concebir la Regla de la Cadena como una función, pero sus estrategias no se condicen con el concepto de función. |
| <p>Nivel operacional Trans-Regla de la Cadena: Las características que definen este nivel de esquema son aquellas cuando el aprendiz establece conservación en las transformaciones a través de:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ Reconocer la Regla de la Cadena no como un conjunto de reglas aisladas, sino más bien, como una única regla que establece una relación en la derivada de funciones compuestas, mediante la expresión matemáticas $(g \circ h)'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$, $\forall x \in A$, para todo tipo de funciones reales g y h. ✓ Considerar la Regla de la Cadena como una estructura matemática integrada, que se puede aplicar a cualquier tipo de funciones compuestas y de variable real. ✓ Operacionalizar la Regla de la Cadena como una función, donde intervienen los conceptos de diferenciación, función, composición de funciones, descomposición de funciones, reglas de derivación y álgebra de derivadas, estableciendo relaciones válidas y coherentes. ✓ Reconocer, comprender y aplicar la condición que $\text{Recorrido}(h) \cap \text{Dominio}(g) \neq \emptyset$ de modo que $(g \circ h)(x)$ esté bien definida. |

Reconocimientos

1. Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente por el proyecto FONDECYT N°1140801.
2. Los autores manifiestan sus agradecimientos por la buena disposición de todos los participantes en la investigación.

Referencias

- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Shoenfeld, E. Dubinsky (Eds.) *Research in collegiate mathematics education*. Vol.2. Providence, RI: American Mathematical Society. P.1-32.
- Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., St. John; D., Tolia, G. & Vidakovic, D. (1997). Constructing a Schema: The case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior*, 16 (4), 345 – 364.
- Cottrill, J. (1999). *Students' Understanding of the Concept of Chain Rule in first year Calculus and the Relation to their Understanding of Composition of Functions*. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University, West Lafayette, Indiana.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123), Dordrecht: Kluwer.
- Horvath, A. (2008). Looking at calculus students' understanding from inside-out: The relationship between the chain rule and function composition. *Proceedings of the 11th Annual Conference on Research in undergraduate Mathematics Education*, San Diego, CA.
- Jojo, M., Brijlall, D. & Maharaj, A., (2010). A genetic decomposition of the chain rule: work in progress. *Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education*. (3), 77-82.
- Kabael, T. (2010). Cognitive development of applying the chain rule through three worlds of mathematics. *Australian Senior Mathematics Journal*, 24 (2), 14-28.
- Maharaj, A. (2013). An APOS analysis of natural science students' understanding of derivatives. *South African Journal of Education*, 33(1), 1-19.
- Meel, D. (1999). Prospective teachers' understandings: Function and composite function. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal*. 1, 1-12.
- Mena, J. y Arancibia, S. (2005). *Matemática para ingeniería*. Valparaíso, Chile: Editorial Universidad Católica de Valparaíso.
- Parraguez, M. y Okaç, A. (2012). Desarrollo de un esquema del concepto espacio vectorial. *Paradigma*. 33(1), 103-134. Disponible en: <http://revistas.upel.edu.ve/index.php/paradigma/article/view/1220>
- Piaget J. & Garcia R. (1983/1989). *Psychogenesis and the history of science* (H. Feider, Trans.). New York: Columbia University Press. (Original work published 1983).

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos* (5ta ed.). Ediciones Morata. Madrid, España.

Trigueros, M. (2005). *La noción de esquema en la investigación en Matemática Educativa a nivel superior*. Educación matemática Santillana. 5-31. Recuperado el 14 de Diciembre del 2011, de <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=40517101>

Autores:

Cristóbal Valdivia Sepúlveda

Profesor adjunto e investigador del Campus Patagonia, de la Universidad Austral de Chile (UACH). Magíster en Didáctica de la Matemática
Investigador en el área del Pensamiento Matemático Avanzado.
Líneas de investigación: Didáctica del Cálculo diferencial e integral.
cristobal.valdivia.s@gmail.com
56-67-2526955
Camino Coyhaique Alto, kilómetro 4 s/n, Coyhaique, Chile.

Marcela Parraguez González

Profesora e Investigadora del Instituto de Matemáticas (IMA), de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV). Doctora en Matemática Educativa.
Investigadora en el área del Pensamiento Matemático Avanzado.
Línea de Investigación: Didáctica del Álgebra Lineal y el Álgebra
marcela.parraguez@pucv.cl
56-32-2274014
Blanco Viel no596, Cerro Barón, Valparaíso. Chile