

Componentes e indicadores para el diseño y reflexión de procesos de instrucción sobre límites de funciones en una variable

Daniela Andrea Araya Bastias

daniela.araya@ucentral.cl

<https://orcid.org/0000-0002-3395-3348>

Universidad Central de Chile (UCEN)

Santiago, Chile.

Luis Roberto Pino-Fan

luis.pino@ulagos.cl

<https://orcid.org/0000-0003-4060-7408>

Universidad de Los Lagos, (ULAGOS)

Osorno, Chile.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

El presente estudio tiene como fin proponer criterios y descriptores que permitan al profesorado tener un referente para diseñar sus implementaciones pedagógicas o para reflexionar sobre sus clases implementadas sobre el objeto límite de funciones en una variable. Para el desarrollo de los criterios y descriptores se utilizan los descriptores empíricos de cada uno de los componentes de la Idoneidad Didáctica propuestos por el Enfoque Ontosemiótico y los significados parciales del objeto límite de funciones en una variable. El trabajo se realiza por medio de la metodología cualitativa cuyo diseño metodológico es descriptivo, puesto que a partir de la revisión de la literatura (propuestas didácticas, problemáticas para su enseñanza, significados parciales, etc.) se proponen criterios e indicadores propios del objeto matemático. Los componentes e indicadores propuestos permiten organizar y valorar las prácticas pedagógicas en los diversos momentos del proceso instrucción (planificación, implementación, evaluación y reflexión) del objeto límite de funciones en una variable.

Palabras clave: límite de funciones en una variable, Idoneidad Didáctica, Configuraciones Epistémicas, EOS.

Componentes e indicadores para o desenho e reflexão de processos de instrução sobre limites de funções em variável

Resumo

O objetivo deste estudo é propor critérios e descritores que permitam aos professores terem uma referência para projetar suas implementações pedagógicas ou refletirem sobre suas aulas implementadas sobre objeto matemático limite de funções de uma variável. Para o desenvolvimento dos critérios e descritores, são utilizados os descritores empíricos de cada um dos componentes da Adequação Didática propostos pela Abordagem Ontossemiótica e os significados parciais do objeto limite das funções de uma variável. O trabalho é realizado por meio da metodologia qualitativa cujo desenho metodológico é descritivo, pois, a partir da revisão da literatura (propostas didáticas, problemas para seu ensino, significados parciais, etc.) são propostos critérios e indicadores do objeto matemático. Os componentes e indicadores propostos permitem organizar e avaliar as práticas pedagógicas em vários momentos do

proceso de instrucción (planejamento, execução, avaliação e reflexão) do objeto matemático limite de funções numa variável.

Palavras-chave: Limite de funções numa variável, Adequação Didática, Configurações Epistêmicas, AOS.

Components and indicators for the design and reflection of instruction processes on limits of functions in a variable

Abstract

The purpose of this study is to propose criteria and descriptors that allow teachers to have a reference to design their pedagogical implementations or to reflect on their implemented classes on the limit object of functions in a variable. For the development of the criteria and descriptors, the empirical descriptors of each of the components of Didactic Suitability proposed by the Ontosemiotic Approach and the partial meanings of the limit object of functions in a variable are used. The work is supported by the qualitative methodology whose methodological design is descriptive, since from the review of the literature (didactic proposals, problems for its teaching, partial meanings, etc.) criteria and indicators of the mathematical object are proposed. The proposed components and indicators make it possible to organize and assess pedagogical practices at various moments of the instruction process (planning, implementation, evaluation and reflection) of the limit object of functions in a variable.

Keywords: limit of functions in a variable, Didactic Suitability, Epistemics Configurations, OSA.

Introducción

Diversos han sido los estudios respecto de los procesos de enseñanza-aprendizaje del objeto límite de funciones en una variable. Dicho objeto se ha caracterizado por tener una serie de dificultades tanto para estudiantes (e.g., ARTIGUE, 1995; MAMONA-DOWNS, 2001; BARAHMAND, 2017) como para el profesorado de cara al diseño de propuestas didácticas (ROBINET, 1983; FERNÁNDEZ, 2000; BLÁZQUEZ, et al., 2006; CAGLAYAN, 2015).

En esta misma línea, Salinas; Alanís (2009) señalan que los procesos de instrucción tradicional centrada en procedimientos mecánicos y algorítmicos que se alternan con conceptos y definiciones dificultan el aprendizaje de nociones vinculadas al cálculo, lo que trae consigo "...elevados índices de reprobación, aprendizaje sin comprensión y actitud negativa hacia el aprendizaje de las matemáticas. Estos han sido reportados en los últimos treinta años con respecto a cursos de cálculo en el nivel medio y superior de educación..." (p. 359).

Esta problemática no está ajena a la enseñanza del objeto límite a programas de formación de profesores, de hecho, en Chile se promulgaron los nuevos "Estándares de la Profesión Docente Carreras de Pedagogía en Matemática Educación Media" (MINEDUC,

2021), los cuales establecen los conocimientos y habilidades que los profesores en formación deben desarrollar para diseñar situaciones de aprendizaje.

En particular, en el ámbito disciplinario se encuentra el “Estándar D: Límites, Derivadas e Integrales”, el cual tiene por objetivo:

Comprende las nociones de límite, continuidad, derivadas, integrales y series, y conoce el Teorema Fundamental del Cálculo, lo que le permite planificar y gestionar actividades de aprendizaje para que sus estudiantes incorporen estos conocimientos del cálculo y los apliquen para resolver problemas y modelar fenómenos naturales y sociales. (MINEDUC, 2021, p.91)

Dichos estándares establecen indicadores distribuidos en dos ámbitos pedagógicos y didácticos, en particular, los indicadores respecto al objeto límite son:

Conocimiento Disciplinar

1. Explica las nociones de límite de sucesiones y de funciones y la relación entre ellas, y las utiliza en la resolución de problemas que involucran el cálculo de límites utilizando casos conocidos y sus propiedades.
3. Utiliza las nociones de límite, continuidad y derivabilidad para analizar funciones, en particular sus puntos críticos, de inflexión y su comportamiento asintótico, conectando sus representaciones gráficas y algebraicas.
7. Estudia la convergencia de series numéricas y series de potencias utilizando métodos del cociente, raíz y de comparación, y modela diversos fenómenos con ellas, en particular, el cálculo de interés.
8. Modela fenómenos que requieren conocimientos de límites, derivadas e integrales y de los otros estándares como, por ejemplo, fenómenos que requieran del uso de probabilidades, cálculo de integrales y tecnología.

Didáctica Disciplinar

10. Utiliza diversas representaciones para que todos/as sus estudiantes logren superar las dificultades más frecuentes que tienen con las nociones de convergencia de sucesiones y límite de funciones.
11. Anticipa preguntas para estimular el aprendizaje y para guiar a sus estudiantes en una actividad de modelación colaborativa de fenómenos naturales o sociales que involucren elementos del cálculo diferencial y el uso de herramientas digitales. (MINEDUC, 2021, p. 91)

Es importante mencionar que dichos indicadores si bien representan un avance en brindar orientación sobre las habilidades y conocimientos que un profesor en formación y en ejercicio debe desarrollar en sus implementaciones pedagógicas sobre límites, éstos no relevan la riqueza matemática de cada uno de los significados parciales del objeto límite de funciones en una variable. Además, deja de lado la necesidad de que los profesores incorporen en sus prácticas conocimientos didácticos-matemáticos para la enseñanza de límites de funciones en una variable, como por ejemplo: la comprensión o habilidades que poseen sus estudiantes; los

conocimientos previos necesarios para el estudio de la noción de límites; el uso de diversas representaciones y recursos; así como también conocimientos y competencias para la identificación de errores y dificultades que presentan los estudiantes cuando estudian esta noción. Además, otros aspectos relevantes que hay que considerar son las estrategias motivacionales o interaccionales que permiten motivar y estimular a los estudiantes con el fin de potenciar sus aprendizajes. Lo anterior nos hace plantear la siguiente interrogante: ¿qué aspectos debemos considerar cuando planificamos una clase sobre límites de funciones en una variable o reflexionamos sobre nuestra práctica en torno a la enseñanza de este objeto matemático?

El presente trabajo tiene como fin responder a la interrogante por medio de una propuesta de criterios y descriptores que permitan al profesorado tener como referente para diseñar sus implementaciones pedagógicas sobre el objeto límite o para reflexionar sobre sus clases implementadas.

1. Marco teórico.

Para desarrollar los criterios y descriptores epistémicos de cada significado parcial del objeto límite de funciones en una variable (en adelante, objeto límite), utilizaremos las herramientas teórico-metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (GODINO, et al., 2007); en específico, utilizamos la noción de configuración ontosemiótica (PINO-FAN, et al., 2015). Esta configuración puede ser de carácter epistémica (en adelante, CE) o cognitiva (en adelante, CG), según se refiera a objetos y procesos matemáticos institucionales o personales, respectivamente. Se utilizan estas herramientas porque permite describir y caracterizar de manera sistemática los objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades y argumentos) que intervienen y emergen de las prácticas matemáticas que están asociados al objeto límite. Para el desarrollo de esta investigación se han considerado las seis configuraciones epistémicas propuestos por Araya, et al., (2021), las cuales son:

Configuración Epistémica N°1: Límite como aproximación en la Matemática Griega.

Configuración Epistémica N°2: Límite en la concepción de los Indivisibles.

Configuración Epistémica N°3: La Noción Intuitiva de Límite de Newton.

Configuración Epistémica N°4: La idea de los Infinitesimales de Leibniz.

Configuración Epistémica N°5: Concepciones preformales de Límite.

Configuración Epistémica N°6: Noción de límite de Weierstrass.

Dichas configuraciones epistémicas están basadas en estudios históricos-epistemológicos del objeto y nos brindan información sobre la riqueza matemática para proponer cada uno de los criterios y descriptores que los docentes pueden utilizar en sus implementaciones pedagógicas.

Adicionalmente, utilizamos la noción de idoneidad didáctica propuesto por Godino y colaboradores (GODINO, et al., 2006; GODINO; BATANERO; FONT, 2007; BREDA; FONT; PINO, 2018), estas herramientas teóricas nos brindan orientación y guía para el diseño de los criterios y descriptores asociado al objeto límite. En este sentido, la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las siguientes seis componentes:

Idoneidad epistémica, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (previstos), respecto a un significado de referencia.

Idoneidad cognitiva, expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.

Idoneidad interaccional, grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan a detectar a priori), y, por otra parte, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción mediante la negociación de significados.

Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Idoneidad emocional, grado de implicación (interés, motivación, del alumnado en el proceso de estudio.

Idoneidad ecológica, grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc. (GODINO, et al., 2007, p.133)

Para llevar a cabo nuestro trabajo, utilizamos de manera específica los indicadores de cada una de las idoneidades parciales (idoneidad epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica) propuestos por Godino (2013). Estos indicadores permiten evaluar y reflexionar con lineamientos claros, precisos y explícitos sobre cada una de las idoneidades que el docente establece en el diseño de sus intervenciones pedagógicas.

2. Metodología

El presente estudio se enmarca en un enfoque cualitativo cuyo diseño metodológico es descriptivo (COHEN; MANION; MORRISON, 2011; HERNÁNDEZ; FERNANDEZ; BAPTISTA, 2016), puesto que el objetivo de este trabajo es elaborar una propuesta de componentes y descriptores sobre los criterios de idoneidad didáctica específicos para la enseñanza de límites de funciones en una variable.

Los componentes e indicadores se presentan como un recurso orientador para procesos de instrucción efectiva sobre límite de funciones en una variable. Además, permiten la valoración de acciones formativas planificadas o implementadas sobre dicho objeto matemático. El diseño de esta herramienta teórico-metodológica se ha basado en una exhaustiva revisión bibliográfica (MEDRANO; PINO-FAN, 2016; ARAYA, 2022), las seis configuraciones epistémicas del objeto límite (ARAYA, et al., 2021), en la experiencia didáctica de la implementación de tareas de cada significado parcial del objeto (ARAYA, 2022) y los indicadores de la Idoneidad Didáctica propuestos por Godino (2013).

3. Componentes e indicadores para el diseño y reflexión de la enseñanza de límites de funciones en una variable

3.1 Idoneidad epistémica para la enseñanza de límites de funciones en una variable

Desarrollar una alta idoneidad epistémica en los procesos de enseñanza-aprendizaje sobre límites requiere del diseño y selección apropiada de situaciones-problemas que involucren el objeto matemático y sus diversos significados parciales (GODINO, et al., 2006). Es importante movilizar las distintas representaciones del objeto (BLÁZQUEZ, et al., 2006; FUENTE; ARMENTEROS; FONT, 2012) y promover definiciones que consideren las características fundamentales de la noción. Las tareas propuestas deben tener un grado de apertura que permitan evocar diferentes estrategias para desarrollar una o varias soluciones, procurando que las estrategias deben estar debidamente argumentadas por los estudiantes. Es necesario que en el proceso de instrucción el docente tenga especial cuidado en evocar ambigüedades o creencias que conlleven a conceptualizaciones erróneas sobre la noción (confusión entre el límite de una función y la función en el punto si es que está definida;

confusión entre el infinito actual y potencial; etc.). Por último, es importante que el docente propicie tareas donde la noción se pueda vincular con otros objetos matemáticos (derivada, continuidad, series, integral definida, etc.) y aplique dicho objeto en situaciones contextualizadas o en otras disciplinas.

A continuación, describiremos según cada componente de la Idoneidad Epistémica los indicadores que un docente podría propiciar en la implementación de sus clases con respecto al objeto límite.

Componente: Situaciones problemas

Se presentan problemas que movilizan, de manera representativa, los seis significados de referencia del objeto límite.

Indicadores:

- Situaciones problemas que involucren regularidades con figuras geométricas propias de la geometría sintética (euclidiana).
- Situaciones problemas que involucren el uso de secciones transversales de figuras geométricas en el plano y/o cuerpos geométricos en el espacio euclidiano.
- Situaciones problemas que consideren actividades intuitivas de aproximación de áreas bajo la curva de funciones.
- Situaciones problemas que involucren la noción de infinitesimal donde puedan relacionar el límite de la pendiente de una recta secante con respecto a la pendiente de una recta tangente.
- Situaciones problemas donde se estudien sucesiones de manera gráfica, tabular y algebraica.
- Situaciones problemas donde se estudie límite de funciones por medio del estudio su gráfica, intervalos del dominio y recorrido y su representación algebraica.
- Promover situaciones problemas propios de la matemática para reforzar el aprendizaje de límites.
- Promover situaciones problemas contextualizadas a la vida cotidiana o de otras disciplinas.

Componente: Lenguajes

Indicadores:

- Representación y uso de los símbolos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$.

- Movilizar las diversas representaciones de límite (verbal, tabular, algebraica, gráfica, geométrico euclidiano)
- Promover tratamientos en diversos registros de representación (verbal, tabular, algebraica, gráfica, geométrico euclidiano), por ejemplo, utilizar sucesiones por medio su representación geométrica sintética, algebraica, tabular y gráfica.

Componente: Definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos

Indicadores:

- Identificar y articular los diversos significados de la noción de límite de funciones en una variable.
- Promover situaciones en que los estudiantes deban justificar sus conjeturas y procedimientos.
- Realizar diversas tareas que permitan al estudiante diferenciar los conceptos de infinito potencial y actual.
- Utilizar definiciones de límite de manera intuitiva y formal (noción de Weierstrass).
- Utilización de funciones discretas (dominio en \mathbb{N}) y continuas (dominio en \mathbb{R}) tanto en su representación analítica como en su representación gráfica para el estudio de límite.
- Promover procedimientos que consideren aspectos intuitivos y formales, promoviendo el uso de la noción por medio de procedimientos verbales, tabulares, geométricos sintéticos, algebraico, gráficos.
- Los procedimientos deben evocar proposiciones que permitan discernir y argumentar la existencia o no de límite en diversas situaciones.
- Promover argumentos deductivos basados en iteraciones de figuras geométricas, estudio de obtención de volúmenes de cuerpos geométricos, gráficas de funciones discretas (dominio en \mathbb{N}) y continuas (dominio en \mathbb{R}).

Componente: Errores, ambigüedades y creencias

Indicadores:

- Promover situaciones donde en algunos casos el límite de la función (discreta o continua) sea y no sea alcanzado por la función.

- Promover situaciones donde se involucran funciones discretas (dominio en \mathbb{N}) y continuas (dominio en \mathbb{R}) con el fin de que el estudiante no confunda el infinito potencial y actual.
- Promover situaciones donde se distinga la existencia o no del límite de una función en un punto.
- Implementar situaciones donde el estudiante pueda diferenciar el rol de ε y de δ .
- Promover situaciones donde el límite emerja en estudios tabulares y algebraicos para evitar la creencia de que el límite sólo se puede estudiar por medio de la gráfica de una función.
- Promover uso de los símbolos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ para estudiar límites de funciones (discretas o continuas) expresadas en su forma analítica, tabular y/o gráfica.

3.2 Idoneidad cognitiva para la enseñanza de límites de funciones en una variable

Desarrollar una alta idoneidad cognitiva implica que el estudiante, mediante el proceso de enseñanza-aprendizaje logra la comprensión del significado institucional pretendido sobre la noción de límite. Tal como señalamos anteriormente, es primordial promover el estudio de los diversos significados parciales de la noción de límite que constituyen el significado holístico de referencia (GODINO; WILHELMI; BENCOMO, 2006). En este sentido, es fundamental realizar adaptaciones curriculares apropiadas que incluyan actividades de ampliación, refuerzo, etc.

Componente: Conocimientos Previos

Indicadores:

- Se verifica que los estudiantes tienen los conocimientos previos necesarios para introducir la noción de límite, por ejemplo: funciones discretas, funciones continuas, gráficos de funciones, valor absoluto, propiedades del valor absoluto, cuantificadores, propiedades de lógica, tabulación de funciones, propiedades de figuras y cuerpos geométricos, etc.
- Se relacionan los conocimientos previos con la noción de límite.
- A medida que se introduce la noción de límite, se presentan tareas que permiten transitar por las diversas representaciones asociadas al objeto matemático.

Componente: Adaptaciones Curriculares a las diferencias individuales

Indicadores:

- Desarrollar actividades de ampliación, refuerzo, contraejemplos, aplicación. Es fundamental promover actividades donde el estudiante transite en los diferentes registros (verbal, tabular, algebraica, gráfica, geométrico euclidiano) y realizar tareas intuitivas para transitar de manera progresiva a tareas más formales.

Componente: Aprendizaje

Indicadores:

- Se emplean diversos instrumentos y estrategias de evaluación que permitan evidenciar la representatividad del significado personal del estudiante respecto del significado pretendido o implementado (RAMÍREZ, IBARRA, PINO-FAN, 2020) sobre la noción de límite.

Componente: Alta demanda cognitiva

Indicadores:

- Se promueve el estudio y análisis de problemas propios de la matemática y contextualizados a otras disciplinas y/o situaciones de la vida diaria.
- Se realizan actividades donde el estudiante debe deducir las condiciones de existencia de límites de funciones.
- Se realizan actividades donde el estudiante debe deducir el comportamiento de funciones discretas y continuas de manera algebraica, tabular y gráfica.
- Se diferencia y relaciona situaciones donde el límite de una función se alcanza o no en un punto.
- Se promueven situaciones donde el estudiante tenga que diferenciar los roles de ε y de δ en la noción de límite de Weierstrass.

3.3. Idoneidad afectiva para la enseñanza de límites de funciones en una variable

Para lograr una alta idoneidad afectiva es primordial promover el estudio de situaciones-problemas que sean del interés del estudiante y, a su vez, que muestren la aplicación que tiene la noción de límite en diversos problemas, ya sean propios de la vida cotidiana o de otras disciplinas. Además, es esencial establecer y fomentar normas institucionales de índole afectivo, es decir, promover la participación, la autoestima, el interés por el estudio de límites, la

perseverancia, etc. Lo anterior permitirá evitar una actitud negativa frente al estudio de este objeto matemático (SALINAS; ALANÍS, 2009).

Componente: Intereses y necesidades

Indicadores:

- Se estudia la aplicación de la noción de límite en problemas propios de la vida cotidiana o de otras disciplinas, con el fin de mostrar su utilidad.
- Se estudia a la noción de límite por medio de problemas geométricos clásicos, por ejemplo, la aproximación del área de un círculo por medio de sus polígonos regulares inscritos y circunscritos a éste.

Componente: Actitudes

Indicadores:

- Se promueve la participación en las actividades propuestas, la perseverancia, responsabilidad, etc.
- Se favorece el razonamiento lógico deductivo, la argumentación, el pensamiento analítico, el pensamiento geométrico y las destrezas para la resolución de problemas.

Componente: Emociones

Indicadores:

- Se promueve la autoestima, evitando una predisposición negativa al estudio de la noción de límite.
- Se resaltan las cualidades de precisión y rigurosidad de la matemática.

3.4. Idoneidad interaccional para la enseñanza de límites de funciones en una variable

Para desarrollar una alta idoneidad interaccional es importante promover instancias en donde el alumno sea el protagonista del proceso de enseñanza-aprendizaje, es decir, que mediante tareas bien planificadas, el estudiante pueda construir su conocimiento y así acercarse a aquello que se pretende institucionalizar, en este caso la noción de límite de funciones en una variable. En este sentido, Godino (2013) declara que las diversas interacciones (estudiante-estudiante, profesor-estudiante, etc.) permite que cada uno de los actores reflexione a partir de lo que aportan los demás, y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión matemática. Por otra parte, la evaluación formativa de los aprendizajes que se realiza de manera progresiva y sistemática permite que el docente tome decisiones sobre el trayecto formativo que están

llevando a cabo sus estudiantes, además le otorga al estudiante espacios de reflexión sobre sus aprendizajes y errores.

Componente: Interacción docente-discente

Indicadores:

- El profesor realiza una presentación adecuada del objeto límite (presentación clara, precisa y bien estructurada, da las pausas necesarias (no habla rápido), enfatiza los conocimientos previos y conceptos claves de la noción de límite.
- El profesor posee conocimiento y experiencia en las posibles concepciones erróneas que pueden desarrollar sus estudiantes para ello anticipa y precisa tareas claves en los cuales pueda corregir o erradicar dichos errores.
- El profesor identifica las concepciones de límite que emergen de los estudiantes y luego las utiliza para profundizar o reformular la enseñanza de límites.
- Se promueve la inclusión de los estudiantes en la implementación de sus clases.

Componente: Interacción entre alumnos

Indicadores:

- Se promueve el diálogo y la comunicación entre los estudiantes.
- Se pretende fomentar consensos a partir de instancias de discusión, análisis y argumentación matemática.
- Se fomenta la inclusión, la colaboración cooperativa en grupos de trabajo con el fin de evitar la exclusión.

Componente: Autonomía

Indicadores:

- Se promueven instancias donde los estudiantes asumen la responsabilidad de sus estudios (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan cierta variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y los comunican de manera oral u escrita).

Componente: Evaluación formativa

Indicadores:

- Observación sistemática y aplicación de instrumentos evaluativos durante todo el proceso de enseñanza para analizar el progreso cognitivo de los estudiantes.

3.5 Idoneidad mediacional para la enseñanza de límites de funciones en una variable

Para alcanzar una alta idoneidad mediacional es necesario utilizar medios (representaciones, calculadoras, software de geometría dinámica, applets, hojas de cálculo, etc.) para implementar los procesos de enseñanza-aprendizaje de límites (FERNÁNDEZ, 2000; SOLER DE DIOS, 2014; CAGLAYAN, 2015). No cabe duda de que el uso apropiado de los diversos recursos tecnológicos facilita e incrementa el aprendizaje de los estudiantes, por tal razón es fundamental que las instituciones de educación aseguren que todos sus estudiantes puedan tener acceso a estos recursos (SFARD, 2002).

Componente: Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, ordenadores)

Indicadores:

- Se fomenta el uso softwares geométricos (por ejemplo, applets de GeoGebra) para promover la noción de límite en patrones geométricos de manera intuitiva.
- Se promueve el uso de softwares geométricos para estudiar la noción de límite en la deducción de volúmenes de cuerpos geométricos.
- Se utiliza graficadores informáticos que promuevan el estudio de la noción de límite por medio del área bajo la gráfica de funciones particulares.
- Se utiliza graficadores informáticos que permitan estudiar la noción de límite por medio de gráficas de funciones discretas y continuas.
- Se fomenta el uso de calculadoras u hojas de cálculo para estudiar la noción de límite por medio de la tabulación y/o expresiones algebraicas.

Componente: Número de estudiantes, horario y condiciones del aula

Indicadores:

- El número y la distribución de los estudiantes en la sala de clases permite llevar a cabo la enseñanza pretendida de la noción de límite.
- Se realiza una adecuación del proceso de instrucción matemática apropiado al horario de las clases.
- El espacio educativo es adecuado para el desarrollo del proceso instruccional pretendido sobre límites (el espacio cuenta con softwares geométricos, graficadores, calculadora, etc.)

Componente: Tiempo (de enseñanza colectiva, tutorización; tiempo de aprendizaje)

Indicadores:

- El profesor conoce los errores frecuentes, tales como: la confusión entre el rol de ε y δ ; si el límite se alcanza o no, confusión en los límites laterales con la existencia de límite, etc. El docente es capaz de anticipar las respuestas que pueden emerger ante situaciones de enseñanza sobre límites. Esto le permite clasificar las actividades según el nivel de dificultad, diseñar instrumentos de evaluación, estimar el tiempo de desarrollo de una tarea concreta para estudiantes y grupos de aprendizaje específicos.

3.6 Idoneidad Ecológica para la Enseñanza de Límites de Funciones en una Variable

Para desarrollar una alta idoneidad ecológica es necesario implementar procesos de enseñanza de la noción de límites de manera pertinente al nivel y contexto educativo. En este sentido, el profesor desde su profesionalidad y expertiz debe realizar adaptaciones curriculares, conexiones intra e interdisciplinarias, utilizar herramientas innovadoras que favorezcan los aprendizajes y promuevan tareas que permitan desarrollar el pensamiento reflexivo y crítico en sus alumnos.

Componente: Adaptación al currículo

Indicadores:

- La noción de límite se enseña por medio de sus diferentes registros según el currículo escolar secundario y/o el curriculum universitario.
- La enseñanza de la noción de límites es utilizada para resolver problemas contextualizados (fractales, tasa de interés, paradoja de Zenón, etc.) y/o de otras disciplinas según el curriculum que debe promover en la institución educativa, ya sea a nivel escolar o universitaria.

Componente: Conexiones intra e interdisciplinarias

Indicadores:

- Se vincula la noción de límite con otros objetos matemáticos, tales como: derivada, continuidad, series, integral definida, etc.
- Se utiliza la noción de límite para dar respuestas a problemas contextualizados a la vida cotidiana u otras disciplinas.

Componente: Utilidad socio laboral

Indicadores:

- Se fomenta la noción de límites como una herramienta adecuada que sirve para dar respuesta a problema propios de la matemática, de la vida cotidiana o de otras disciplinas.

Componente: Apertura hacia la innovación didáctica

Indicadores:

- Se promueve el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) con el fin de desarrollar la comprensión de la noción de límite, así como también para manipular distintos medios que permitan desarrollar las diversas representaciones vinculadas a dicho objeto matemático.

4. Conclusiones

El presente estudio propone una serie de componentes e indicadores empíricos basados en la Idoneidad Didáctica (GODINO, 2013), en los significados parciales del objeto límite propuestos por Araya, et al. (2021) y en la experiencia de la implementación de tareas de cada significado parcial desarrollado por Araya (2022). Las configuraciones epistémicas relacionadas con los significados parciales nos brindaron criterios y orientaciones epistémicas que permitieron diseñar los indicadores propuestos. Adicionalmente, la experiencia didáctica desarrollada por Araya (2022) permitió dar orientaciones de manera específica para los indicadores de la idoneidad cognitiva, interaccional y emocional.

El proceso de reflexión sobre la práctica es una estrategia que permite analizar, comprender y resignificar situaciones propias de los procesos de enseñanza-aprendizaje. Dicha estrategia permite al docente mejorar sus procesos de instrucción, pues puede prever e intervenir situaciones problemáticas que podrían interrumpir y afectar el desarrollo de las competencias y habilidades matemáticas de los estudiantes con respecto al objeto límite. Debido a lo anteriormente expuesto, es importante disponer de herramientas teórico-metodológicas específicas para la noción de límite de funciones en una variable que permitan organizar y valorar las prácticas pedagógicas en los diversos momentos del proceso instrucción (planificación, implementación, evaluación y reflexión).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del Proyecto Fondecyt 1200005 financiado por la ANID de Chile.

Referencias

- ARAYA, D. A.; PINO-FAN, L. R.; MEDRANO, I. y CASTRO, W. Epistemic Criteria for Designing Limit Tasks on a Real Variable Function. **Bolema**, Río Claro, v. 35, n. 69, p. 179-205, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a09>
- ARAYA, D. A. **Diseño de tareas sobre los significados parciales de la noción de límite en funciones de una variable**. Tesis (Doctorado) - Universidad de Los Lagos, Departamento de Ciencias Exactas, Programa de Doctorado en Educación Matemática, Osorno, 2022. Disponible en <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/tesisdoctorales.html>. Acceso en: 15 de marzo. 2023.
- ARTIGUE, M. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), **Ingeniería didáctica en educación matemática**. México: Grupo editorial Iberoamérica. 1995. p.97-140.
- BARAHMAND, A. The Boundary Between Finite and Infinite States Through the Concept of Limits of Sequences. **Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan. v.15. n. 3, p. 569-585. 2017. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9697-3>
- BLÁZQUEZ, S.; ORTEGA, T.; GATICA, S.; BENEGAS, J. Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 9, n. 2, p. 189-209, 2006.
- BREDA, A.; FONT, V.; PINO-FAN, L. Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. **Bolema**, Rio Claro, v.32, n.60, p. 255-278, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- CAGLAYAN, G. Math majors' visual proofs in a Dynamic environment: the case of limit of a function and the ε - δ approach. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 46, n. 6, p.797-823, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1015465>
- COHEN, L.; MANION, L.; MORRISON, K. **Research methods in education (6th Ed.)**. New York, NY: Routledge, 2011.
- FERNÁNDEZ, M. Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema de límite de funciones con el uso de un asistente matemático. **RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 3, n. 2, p.171-187, 2000.
- FUENTE, A.; ARMENTEROS, M.; FONT, V. Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del límite de una. **Bolema**, Río Claro, v.26, n.42B, p. 667-690, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200013>

- GODINO, J.D.; BENCOMO, D.; FONT, V.; WILHELMI, M. Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Estudio de las Matemáticas. **Paradigma**, Maracay, v. XXVII, n.2, p. 221-252, 2006.
- GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education**, Hamburgo, v.39, n.1, p.127-135, 2007. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- GODINO, J. D. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, Costa Rica, v. 8, n.11, p. 111-132, 2013.
- HERNÁNDEZ SAMPIERI, R.; FERNÁNDEZ COLLADO, C.; BAPTISTA LUCIO, P. **Metodología de la investigación**. 6ta ed. México: McGraw-Hill, 2016.
- MAMONA-DOWNS, J. Letting the intuitive bear on the formal: A didactic approach for the understanding of the limits of a sequence. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v.48, p. 259–288, 2001. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1016004822476>
- MEDRANO I.; PINO-FAN L. Estudios de Comprensión de la Noción Matemática de Límite Finito desde el Punto de Vista Histórico. **REDIMAT**, Barcelona, v. 5, n. 1, p. 287-323, 2016. DOI: <https://doi.org/10.17583/redimat.2016.1854>
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE CHILE. **Estándares de la Profesión Docente Carreras de Pedagogía en Matemática Educación Media**. Santiago, Chile: CPEIP, 2021. Disponible en <https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/17598>. Acceso 15 de marzo 2023.
- PINO-FAN, L.; GODINO, J. D.; FONT, V. Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. **Bolema**, Río Claro, v. 29, n. 51, p. 60-89, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a04>
- RAMÍREZ, R.; IBARRA, S.; PINO-FAN, L. Prácticas evaluativas y significados evaluados por profesores del bachillerato mexicano sobre la noción de ecuación lineal. **Educación Matemática**, Guadalajara, v. 32, n.2, p.69-98, 2020. DOI: <https://doi.org/10.24844/EM3202.03>
- ROBINET, J. Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 4, n. 3, p. 223-292, 1983.
- SALINAS, P.; ALANÍS, J. A. Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. **RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v.12, n. 3, p. 355-382, 2009.
- SFARD, A. Balancing the unbalanceable: The NCTM Standards in the light of theories of learning mathematics. En J. Kilpatrick, Martin, G., y Schifter, D. (Eds.), **A Research Companion for NCTM Standards**. Reston, VA: National Council for Teachers of Mathematics, 2002, p. 353-392.
- SOLER DE DIOS, B. **Fractales para la construcción del concepto de límite en 4° de ESO**. Memoria (Máster) - Universidad de Valencia, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Máster en Profesor de Educación Secundaria, Valencia, 2014.

Autores

Daniela Andrea Araya Bastias

Doctora en Educación Matemática por la Universidad de los Lagos (ULAGOS). Académica de la Universidad Central de Chile (UCEN), Santiago, Chile. Línea de investigación didáctica del cálculo y álgebra.

E-mail: daniela.araya@ucentral.cl

ORCID iD 0000-0002-3395-3348.

Luis Roberto Pino-Fan

Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada (UGR). Académico del Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de los Lagos (ULAGOS), Osorno, Chile. Línea de investigación didáctica del cálculo y álgebra.

E-mail: luis.pino@ulagos.cl,

ORCID iD 0000-0003-4060-7408.

Como citar o artigo:

ARAYA, D. A.; PINO-FAN, L. R. Componentes e Indicadores para el Diseño y Reflexión de Procesos de Instrucción de Límites de Funciones en una Variable. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Questões e Métodos**; junio de 2023 / 409 - 426 DOI: [10.37618](https://doi.org/10.37618)