PARADIGMA, Vol. IX, No. 2 – DICIEMBRE DE 1988

ALGUNAS APLICACIONES DE LA TEORIA DE LOS GRAFOS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA*

Walter Beyer K.
Universidad Nacional Abierta
Sede Central, Caracas

RESUMEN

La teoría de grafos es una parte de la matemática discreta que tuvo sus inicios en el año 1736, cuando el matemático suizo Leonardo Euler publicó el primer trabajo relacionado con esta área del conocimiento en el cual resuelve el famoso problema de los puentes de Königsberg. Hoy en día la teoría de grafos ha tomado cuerpo propio teniendo un inmeso desarrollo teórico e innumerables aplicaciones. El presente trabajo plantea una aplicación poco explotada de la teoría de grafos: la aplicación a la enseñanza de la matemática. Así, por medio de esta versátil herramienta, la cual tiene un enorme contenido geométrico, se pueden estudiar diversos tópicos matemáticos: relaciones, funciones, cálculo de determinantes, solución de ecuaciones, cálculo de probabilidades, entre otros; tópicos estos que tradicionalmente se estudian sólo de manera analítica. Enfocar la enseñanza de estos tópicos a través de los grafos presenta grandes ventajas por cuanto, son en muchos casos, un modelo fácil de construir y a través de ellos es a veces cómodo vislumbrar el proceso que conduce a la solución del problema originalmente planteado. Una ventaja adicional es que ellos se convierten en un nuevo tópico matemático a ser aprendido y aplicado en otras disciplinas como física, química y biología y también permiten enseñar, mediante la demostración de algunos teoremas y propiedades, los métodos de demostración en matemática.

---

* Trabajo presentado en la XXXVIII Convención Anual de ASOVAC.

Introducción

"Llamo al vino, vino; y a la tierra,
tierra, sin pesismismo ni desesperación;
sin propósito tampoco de engañar a nadie;
digo lo que creo ingenuamente que debo decir, sin
mirar vecinas consecuencias ni escuchar el
rumor de los temores".
Mario Briceño Iragorry

La teoría de grafos es una parte de la matemática discreta que tuvo su origen en el año 1736 con el famoso problema de los siete puentes de Königsberg, establecido y resuelto por el gran matemático suizo Leonhard Euler (1707–1783), quien también formuló en 1782 una conjetura sobre cuadrados latinos, la cual no fue refutada hasta 1960.

El problema de los puentes consistía en lo siguiente: la ciudad de Königsberg (hoy Kaliningrado) está situada sobre dos islas y a ambas riberas del río Pregel, unidas las diversas partes por siete puentes como muestra la figura:

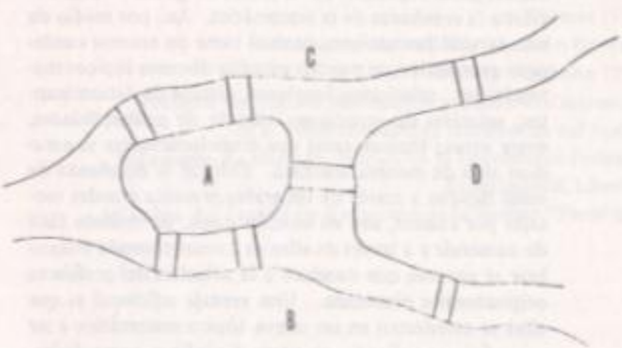


Figura 0

y se plantea si es posible realizar un recorrido que pasara por todos los puentes sólo una vez. Euler probó la imposibilidad de dar tal paseo.

Los grafos son un importante objeto de estudio en diversas áreas del conocimiento: investigación operativa, ciencias de la computación, combinatoria, por sólo citar algunas; pero, su estudio se ha desarrollado de tal forma que hoy por hoy constituyen una rama de la matemática con cuerpo propio, con un amplio desarrollo teórico e innumerables aplicaciones.

Los grafos tienen la gran virtud de ser un "objeto geométrico" cuya manipulación no excede al espacio $\mathbb{R}^3$.

Son pocos y aislados los estudios realizados para a aplicar los grafos a la enseñanza de la matemática; eso es un poco extraño porque su estudio permite, por una parte, adquirir una serie de destrezas matemáticas, y por otra ellos son un modelo fácil de manejar que permite el estudio de otros tópicos matemáticos, sin recurrir a la maquinaria analítica. Además, permiten un enfoque heurístico y a la vez algorítmico del proceso de enseñanza.

Los grafos, por ser un objeto matemático con gran carga intuitiva, serán usados en el presente trabajo para presentar un enfoque no tradicional de diversos conceptos matemáticos: operaciones, producto cartesiano, conjunto de las partes, técnicas de conteo, relaciones binarias, cálculo de determinantes.

GRAFOS DE PROCESO

Los grafos de proceso son una herramienta ampliamente usada en el área de análisis numérico; sin embargo, pueden ser utilizados de una manera eficaz dentro del contexto de la enseñanza de la matemática.

Un grafo de proceso es una representación gráfica de la secuencia en que son realizadas las operaciones aritméticas de un cálculo.

Por ejemplo, si queremos calcular

$$u = (x \cdot y) + z \tag{1}$$

el grafo de proceso asociado es:

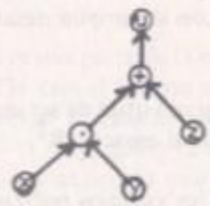


Figura 1

Como vemos en este ejemplo, el grafo de proceso debe ser leído de abajo hacia arriba siguiendo la orientación de las flechas (arcos); así, vemos que primero se multiplican x y y, luego al resultado se le suma z obteniéndose u.

En el ejemplo anterior pasamos de (1) a la Fig. 1. Sin embargo, es fácil transitar el camino inverso y construir la expresión representada mediante el grafo de proceso. Veamos un ejemplo de ésto último:

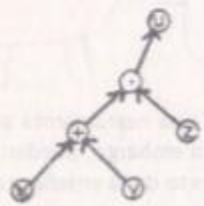


Figura 2

Aquí la expresión correspondiente es:

$$(x + y) \cdot z = u \tag{2}$$

Comparando ambas figuras (Fig. 1 y Fig. 2) podemos notar, dado que los grafos se recorren de abajo hacia arriba, que en el primer caso se ejecuta primero la multiplicación y luego la adición, mientras que en el segundo caso el orden de ejecución de las operaciones es el inverso.

Esta representación permite: (a) tener una descripción visual de cómo se efectúa un cómputo dado; (b) poner atención al orden en que están indicadas las operaciones; y (c) estudiar las propiedades de las operaciones. Como ejemplo, se considerará el siguiente grafo de proceso:

Figura 3

La figura 3 representa el grafo de proceso correspondiente a la expresión:

$$x \cdot z + y \cdot z = u \tag{3}$$

Usando ambos grafos (Fig. 2 y Fig. 3) y pasando a las respectivas expresiones podemos, a través de cierto número de ejemplos y comparaciones de los resultados obtenidos, lograr que el alumno obtenga como conclusión la igualdad entre las expresiones (2) y (3); con esto se podría conducir al estudiante a intuir la validez de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

La siguiente figura representa el grafo de proceso de la expresión:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

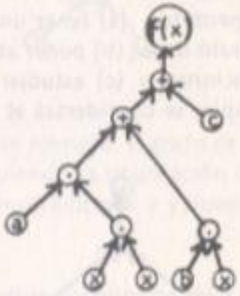


Figura 4

La figura 4 muestra los pasos a seguir para evaluar un polinomio cuadrático. El proceso se puede extender para un polinomio de grado n.

Como puede observarse, los grafos de proceso son una alternativa a los "tradicionales" diagramas de flujo; éstos últimos también son grafos y en muchas ocasiones son de enorme utilidad para describir diversas situaciones matemáticas.

A través de los grafos de proceso se hace obvia la propiedad conmutativa tanto de la suma como del producto. Un proceso análogo al sugerido para estudiar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición, puede emplearse para estudiar la propiedad asociativa de la adición y de la multiplicación. Dicho proceso se muestra en las siguientes figuras; las números *5a* y *5b* corresponden a la adición y las números 6a. y 6b a la multiplicación.

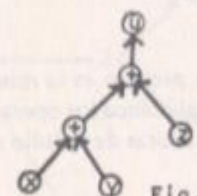


Fig. 5a.

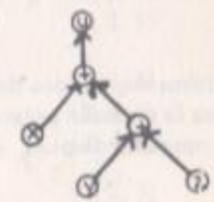


Fig. 5b.

La figura 5a. representa a la expresión $(x + 4) + z = u$

y la figura 5b. representa a la expresión $x + (y + z) = u$

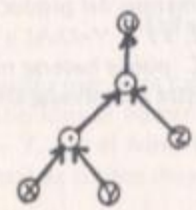


Fig. 6a.

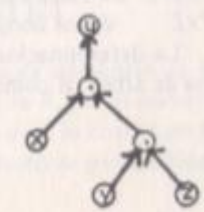


Fig. 6b

La figura 6a. representa a la expresión

$$(x \;.\; y)\;.\; z = u$$

y la figura 6b. representa a la expresión

$$x \;.\; (y \;.\; z) = u \;.$$

Esencialmente, la idea de los grafos de proceso es la misma en la que se basa la notación polaca inversa la cual coloca los operandos primero y el operador después. Algunas calculadoras de bolsillo usan este sistema.

GRAFOS Y PRODUCTO CARTESIANO

Tradicionalmente, el producto cartesiano de dos conjuntos, X y Y, se determina usando su definición sin la ayuda de ningún apoyo geométrico; no obstante, es útil construir un "diagrama de árbol" el cual nos describa dicho producto.

Ejemplo: Se desea determinar los elementos del producto cartesiano, XxYxZ de los conjuntos X= {1, 2, 3} , Y={2,4} y Z={3,4,5}

La determinación de Xx Yx Z puede hacerse mediante un diagrama de árbol tal como el que se muestra a continuación

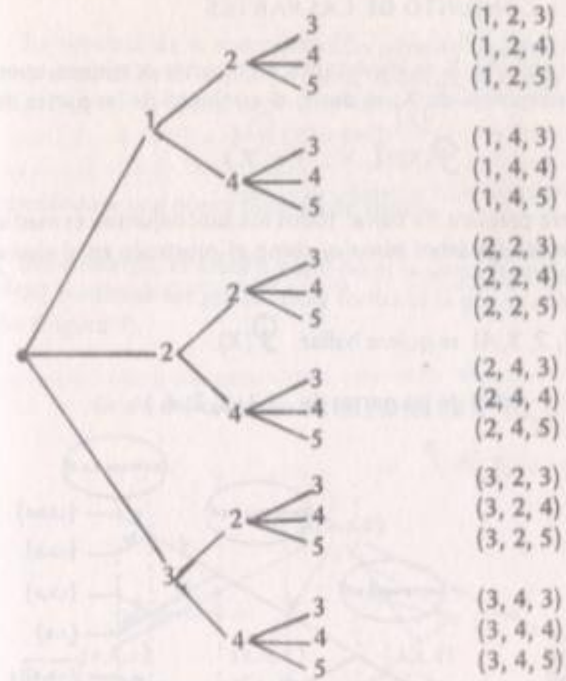


Fig. 7

El árbol se construye de izquierda a derecha y no solamente permite hallar XxYxZ sino, también, visualizar que

$$|X x Y x Z| = |X|\,|Y|\,|Z|$$

Esto indica que, para calcular el número de elementos de XxYxZ , basta multiplicarr el número de elementos de X, por el número de elementos de Y, por el número de elementos de Z lo cual es un principio fundamental de conteo muy útil para el cálculo de probabilidades.

GRAFOS Y EL CONJUNTO DE LAS PARTES

Dado un conjunto X es importante, en muchas ocasiones, conocer todos los subconjuntos de X; es decir, el conjunto de las partes de X:

$$\mathcal{P}(X)=\{\ Y : Y \subseteq X\}$$

Una manera práctica de hallar todos los subconjuntos es mediante la construcción de un árbol binario, como el mostrado en el siguiente ejemplo.

Sea $X=\{1, 2, 3, 4\}$ se quiere hallar $\mathcal{P}(X)$.

Arbol de las partes de $\{1, 2, 3, 4\}$

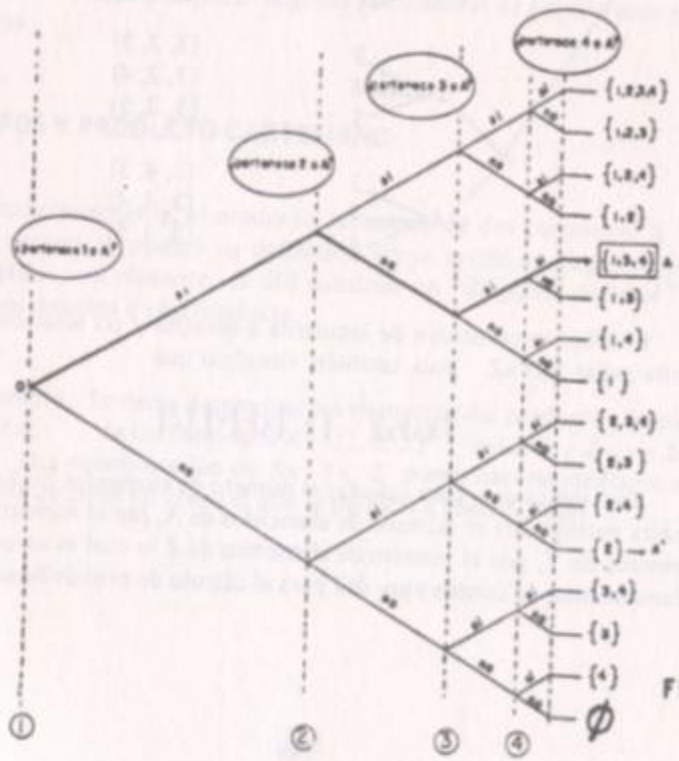


Fig. 8

La simetría de la representación permite visualizar rápidamente el complemento de un conjunto dado. Además, se puede inducir que

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$$

obteniéndose una nueva fórmula de conteo.

Sin embargo, el árbol binario no es la única forma de representar a $\mathcal{P}(X)$ mediante un grafo. Otra forma es la que se exhibe a continuación (Figura 9).

Grafo del conjunto de las partes de $X=\{a, b, c, d\}$

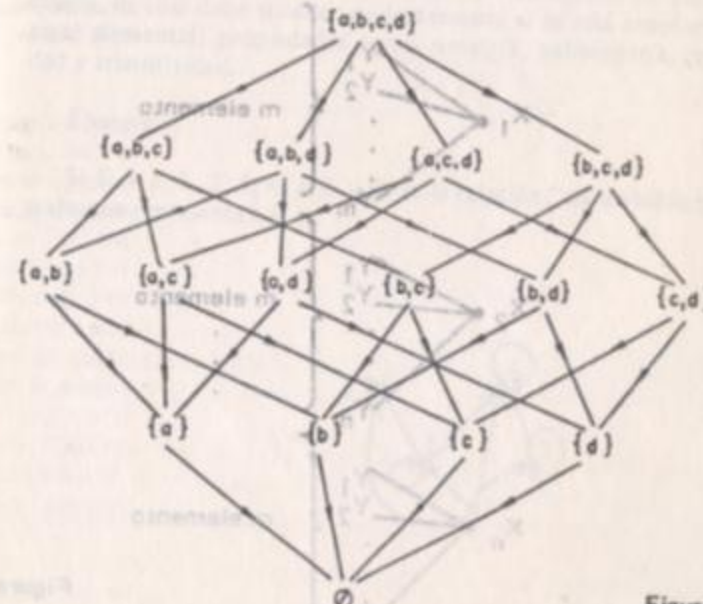


Figura 9

GRAFOS Y PROBLEMAS DE CONTEO

Muchas de las expresiones que permiten contar el número de objetos de un determinado tipo se pueden inferir a partir de un grafo adecuado; en las secciones precedentes fueron vistas dos de dichas expresiones. A continuación de mostrará otro caso.

Si por ejemplo, se está interesado en saber ¿cuántas funciones distintas se pueden construir de X en Y, sabiendo que tanto X como Y son finitos?.

La respuesta puede obtenerse analizando un grafo convenientemente diseñado.

Supóngase que $X \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ y $Y=\{ y ,y_2, \ldots, y_m \}$

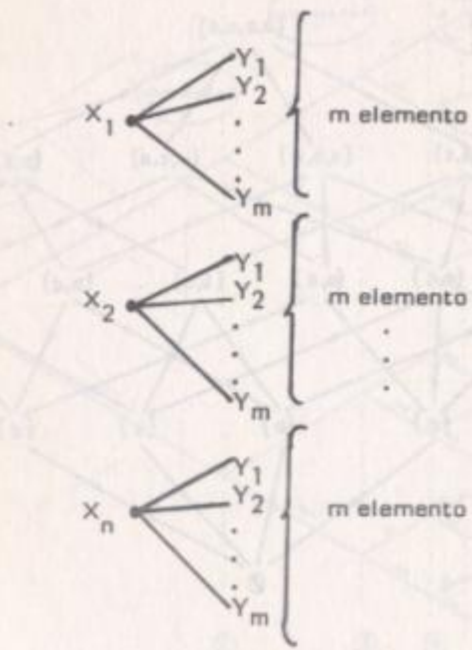


Figura 10

de aquí es casi inmediato que

$$|\{f: X \quad Y\}| = (m.\,1)\,.\,(m.\,1) \overset{n \text{ veces}}{\cdots} (m.\,1) = m^n \quad |Y|^{|X|}$$

Otros problemas que se pueden atacar son: contar el número de inyecciones de X en Y, y el número de biyecciones de X en Y, que conducen a las conocidas expresiones $V_{m,n}$ y $n!$ respectivamente.

GRAFOS Y RELACIONES BINARIAS

Si E es un conjunto finito y R una relación binaria en E, se puede construir un grafo de la siguiente manera:

Se toman como vértices los puntos de E y se forma un arco entre x y y sí y sólo si xRy.

Este procedimiento permite visualizar fácilmente (si $|E|$ es pequeño, lo cual debe suceder evidentemente si se está enseñando en el nivel elemental) propiedades como simetría, antisimetría, reflexibilidad y transitividad.

Ejemplo:

Si $E = \{ 1, 2, 3, 4, 6 \}$ y R es la relación "ser divisible por". El grafo que representa a R es:

Figura 11

El grafo nos indica que la relación es reflexiva y transitiva. Este tipo de representación conduce a los diagramas de Hasse.

GRAFOS Y PROBABILIDADES

Muchos problemas que se presentan en los modelos probabilísticos elementales pueden ser representados mediante lo que se conoce como "árbol de probabilidades".

Uno de los modelos más usados es el "modelo del lanzamiento de una moneda".

Supóngase que se tiene una moneda para la cual P (c) = p y P (s) = 1–p, si se lanza 3 veces la moneda, se obtiene la siguiente representación del proceso mediante un árbol de probabilidades:

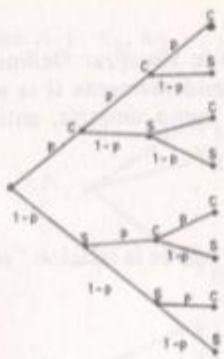


Figura 12

Es inmediato observar que $|\Omega| = 8$. Además el diagrama nos permite llegar a la expresión

$$P(X = k) = \binom{3}{k} p^k (1-p)^{3-k}$$

donde k es el número de caras observadas después de tres lanzamientos de la moneda.

GRAFOS Y DETERMINANTES

A continuación se presentará un algoritmo para calcular determinantes basado en la noción de grafo.

El proceso consiste en:

a. Asociarle a una matriz M un grafo G.

b. Considerar ciertos subgrafos de G llamados Δ – subgrafos.

c. Asociar a cada Δ –subgrafo de G un número llamado su peso.

d. Sumar todos los pesos.

El procedimiento anses descrito es muy útil si la matriz M es esparcida, ésto es, si M tiene mucho ceros.

Sea $M = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n y considérese un grafo G de n vértices (que se etiquetarán por conveniencia con 1, 2, ... , n) y constrúyase un arco de i a j siempre y cuando $a_{ij} \neq 0$), asignándole a este arco el peso a_{ij}.

Se llama Δ –subgrafo a todo subgrafo de G con n vértices y tal que para todo v se cumple:

$$g^+(v) = g^-(v) = 1$$

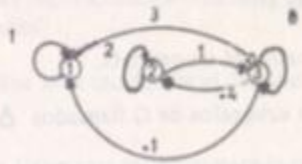
Se define el peso de un —subgrafo como el producto de los pesos de sus arcos por el factor $(-1)^{n+l}$, donde l es el número de circuitos que posea el Δ–subgrafo.

El determinante de M, $|M|$ es igual a la suma de los pesos de todos los Δ–subgrafos de G. Si G no posee Δ–subgrafos entonces $|M| = 0$

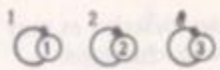
El siguiente ejemplo servirá para aclarar el procedimiento. Sea:

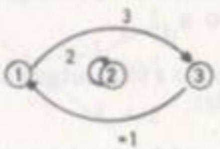
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

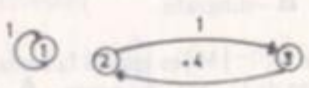
Luego debemos construir en primera instancia el grafo G:



los Δ –subgrafo asociado son:







El peso del primero es:

$$(-1)^{3+3} . 1 . 2 . 8 = 16;$$

el peso del segundo es:

$$(-1)^{3+2} . 3 . 2 . (-1) = 6;$$

el peso del tercero es:

$$(-1)^{3+2} . 1 . 1 . (-4) = 4;$$

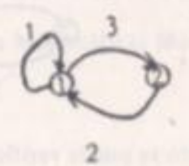
luego

$$|M| = 16 + 6 + 4 = 26$$

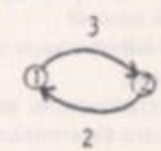
Para mostrar otro ejemplo se empleará la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí G viene dado así:



El único Δ-subgrafo que podemos construir es:

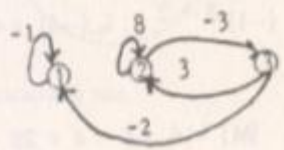


Su peso es $(-1)^{2+1} \cdot 3 \cdot 2 = -6$, luego $|M| = -6$;

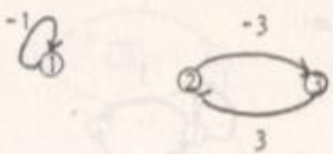
La matriz siguiente se usará para un ejemplo adicional

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

en este caso G es:



y el único Δ–subgrafo de G es:



y no hay ningún otro. Esto se puede verificar fácilmente. El peso del –subgrafo es:

$$(-1)^{3+2} \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot (3) = -9$$

y luego se tiene que $|M| = -9$.

Este método es considerado como más elegante que el uso de la tradicional regla de Sarrus para determinantes de orden 3.

REFERENCIAS

Beyer K., W. (1981). **Tópicos sobre teorías de enumeración y algunas aplicaciones.** Trabajo Especial de Grado, Licenciatura de Matemática. Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

Beyer K., W. (1985). **"Una primera discusión pedagógica acerca del hecho de contar".** Ponencia presentada en el IV Encuentro de Profesores de Didáctica de la Matemática CENAMEC, Caracas, mayo 1985.

Beyer K., W. (1986). "Algunas innovaciones necesarias en los programas de Matemática que se imparten a nivel de Educación Media en Venezuela". **Paradigma.** Vol. VII Nos. 1 y 2, Junio–Diciembre 1986, pp. 17–46.

Dorn, W. y McCracken, D. (1978). **Cálculo numérico con estudios de casos en FORTRAN IV.** Río de Janeiro: Editora Campus.

Greenman, J.V. (1976). "Graphs and determinants". **The Mathematical Gazette. A journal of the Mathematical Association,** Vol. 60 No. 414, December 1976, pp. 241–246.

Warusfel, A. (1971). **Las Matemáticas Modernas.** Barcelona: Ediciones Martínez Roca, S.A.

EL AUTOR

WALTER BEYER K.
Licenciado en Matemática, U.C.V. (1981).
Profesor a Dedicación Exclusiva de la Universidad Nacional Abierta en el Area de Matemática.
Miembro organizador del "Seminario Nacional Permanente para la Enseñanza de la Matemática".