

SITUACIONES DIDÁCTICO-MATEMÁTICAS PARA EL TRATAMIENTO DE LOS PROCESOS DE VARIACIÓN Y ACUMULACIÓN DEL CÁLCULO INTEGRAL EN PROBLEMAS INGENIERILES

Guillermo González Carracelas

guillermoglezcarracelas@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-1285-9245>

Universidad de Camagüey (UC)
Camagüey, Cuba

Seydel Bueno García

seydel.bueno@reduc.edu.cu
<https://orcid.org/0000-0001-5608-5507>

Universidad de Camagüey (UC)
Camagüey, Cuba

Nancy Montes De Oca

nanci.montes@reduc.edu.cu
<https://orcid.org/0000-0002-5651-3927>

Universidad de Camagüey (UC)
Camagüey, Cuba

Recibido: 11/11/2021 **Aceptado:** 11/05/2022

Resumen

En el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Integral en la carrera de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Camagüey, se observan insuficiencias en su tratamiento didáctico, cuando se manifiesta el acto de comprender y calcular una integral, lo que incide en el desempeño correcto de los estudiantes al resolver problemas de aplicación en este tema de la matemática. La interpretación del Teorema Fundamental del Cálculo como la integral de una razón de cambio y su cambio neto, visto también dentro de un proceso de variación y de acumulación (PVA), es una potente herramienta matemática, que permiten calcular cantidades de magnitud relacionadas fundamentalmente con el pensamiento ingenieril. El objetivo del presente artículo es ofrecer pautas para el tratamiento didáctico-matemático del proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Integral y mostrar ejemplos de Situaciones Didáctico-Matemáticas (SDM) para el tratamiento de los problemas de variación y acumulación del Cálculo Integral en problemas ingenieriles.

Palabras clave: Situaciones Didáctico-Matemáticas. Procesos Variación-Acumulación.

SITUAÇÕES DIDÁTICO-MATEMÁTICAS PARA O TRATAMENTO DE PROCESSOS DE VARIAÇÃO E ACUMULAÇÃO DE CÁLCULO INTEGRAL EM PROBLEMAS DE ENGENHARIA

Resumo

No desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem do Cálculo Integral na carreira de Engenharia Elétrica da Universidade de Camagüey, observam-se insuficiências em seu

tratamiento didático, cuando se manifiesta o ato de comprender e calcular uma integral, o que afeta o desempenho correto de os alunos na resolução de problemas de aplicação neste tópico de matemática. A interpretação do teorema fundamental do Cálculo como a integral de uma taxa de variação e sua variação líquida, também vista dentro de um processo de variação e acumulação (PVA), é uma poderosa ferramenta matemática, que permite calcular grandezas fundamentalmente relacionadas com o pensamento de engenharia. O objetivo deste artigo é oferecer diretrizes para o tratamento didático-matemático do processo ensino-aprendizagem de Cálculo Integral e mostrar exemplos de Situações Didático-Matemáticas (SDM) para o tratamento de problemas de variação e acúmulo de Cálculo Integral em engenharia problemas. **Palavras-chave:** Situações Didático-Matemáticas. Processos de variação-acumulação.

DIDACTIC-MATHEMATICAL SITUATIONS FOR THE TREATMENT OF PROCESSES OF VARIATION AND ACCUMULATION OF INTEGRAL CALCULATION IN ENGINEERING PROBLEMS

Abstract

In the development of the teaching-learning process of Integral Calculus in the Electrical Engineering career of the University of Camagüey, deficiencies are observed in its didactic treatment, when the act of understanding and calculating an integral is manifested, which affects the correct performance of students when solving application problems in this subject of mathematics. The interpretation of the fundamental theorem of the Calculus as the integral of a rate of change and its net change, also seen within a process of variation and accumulation (PVA), is a powerful mathematical tool, which allows to calculate quantities of magnitude fundamentally related with engineering thinking. The objective of this article is to offer guidelines for the didactic-mathematical treatment of the teaching-learning process of Integral Calculus and to show examples of Didactic-Mathematical Situations (SDM) for the treatment of problems of variation and change of Integral Calculus in engineering problems.

Keyword: Didactic-Mathematical Situations. Variation-Accumulation Processes.

Introducción.

El proceso de enseñanza-aprendizaje (PEA) de la Matemática en el contexto de las carreras de Ingeniería, tiene como principal objetivo contribuir a la lograr que el futuro ingeniero sea capaz de modelar y analizar los procesos técnicos, económicos y científicos, con el empleo tanto de métodos analíticos como aproximados, utilizando de manera eficiente y crítica las técnicas de cálculo.

El descubrimiento por parte de Newton de los cálculos diferencial e integral, abrió el camino de la solución de disimiles problemas, análisis de las razones de cambio y cálculo de magnitudes tales como desplazamiento, velocidad, aceleración, etc., cálculo de áreas, volúmenes de cuerpos, centros de masa, momentos de inercia, trabajo de una fuerza, entre otros.

En lo particular el Cálculo Integral (CI) debe permitirle al estudiante comprender temas de mecánica, física, análisis de circuitos, resistencia de los materiales, etc., asociados a los PVA, de ahí la importancia de relacionar el contenido del CI con la profesión y tener en cuenta la comprensión de sus objetos, métodos y procedimientos en función de la ingeniería, lo que precisa no solo el tratamiento del contenido sino la lógica profesionalizante con que este se tiene que presentar.

Se coincide con Bueno (2021), quien caracteriza el PEA del CI para las carreras de ingeniería, como:

Proceso formador que se proyecta a la ampliación de recursos didácticos que generalizan a los objetos y procesos matemáticos, evidenciando la lógica dialéctica entre lo abstracto-concreto, el análisis-síntesis, la inducción-deducción, y donde la relación dialéctica enseñanza-aprendizaje articula los diferentes significados prácticos de los objetos del CI, en la solución de problemas matemáticos contextualizados a la ingeniería, con carácter integrador, bilateral, problematizador, interdisciplinario, y desarrollador que transforma el desempeño profesional de estudiante.

Por otra parte, no se debe obviar que, desde este proceso, además, se debe contribuir a la formación de integral de los futuros ingenieros, tanto en el sentido del pensamiento como de los sentimientos, desde él se debe motivar al estudiante para la solución de problemas y convertir en necesidad el dominio del contenido matemático.

Así, hoy se reconoce la necesidad de un proceso de enseñanza-aprendizaje del CI donde se creen las condiciones para que los estudiantes no sólo se apropien de los conocimientos, sino que desarrollen habilidades, formen valores y adquieran estrategias que le permitan actuar de forma independiente, comprometida, creadora para resolver los problemas a los que deberá enfrentarse en su futuro personal y profesional.

No obstante, los resultados obtenidos diferentes investigaciones Iglesias, Alonso y Gorina (2017); Carvalho y Oliveira (2018); Radmehr y Drake (2020), demuestran que aún persisten insuficiencias en el proceso de enseñanza-aprendizaje del CI en las carreras de ingeniería, ya que; en este, de manera general no se utilizan las aproximaciones de sumas integrales, se abusa de utilización del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), sin relacionar otras prácticas y objetos que permiten resolver problemas de aplicación con los PVA.

En ese sentido, se encuentra con bastante frecuencia en la práctica educativa universitaria que los profesores de Matemática reducen el trabajo con los objetos del CI mediante el uso de los métodos algebraicos, lo que no contribuye a la comprensión de forma

articulada de los PVA que necesitan para mejorar el desempeño en la solución de problemas matemáticos.

Lo anterior es corroborado por diversas investigaciones didácticas, entre las que se destacan Contreras y Ordóñez (2006), Contreras, Ordoñez y Wilhelmi (2010), Bueno (2021), que evidencian que es difícil para los estudiantes resolver ejercicios de aplicación del CI cuando se les pide usar sus objetos en situaciones no procedimentales o cuando éste no se reduce a la utilización de los métodos algebraicos.

De igual manera, Pérez y Blanco (2019), enfatizado posteriormente por Pérez (2020), refieren:

La necesidad de formar a los ingenieros para que participen en la solución de problemas reales y trabajen en equipos integrados por especialistas de otras profesiones para construir modelos matemáticos, elegir los métodos matemáticos más adecuados para la solución de problemas y/o analizar modelos matemáticos y sus cálculos aproximados, con auxilio de la tecnología, lo que requiere de un alto rigor en la formación y desarrollo conceptual en la Matemática como vía esencial para su participación independiente y creadora en la resolución de problemas ingenieriles.

Coincidimos con los autores anteriores, además, en cuanto a que el rigor en la formación y desarrollo conceptual en la Matemática es esencial en la formación del ingeniero, y sugieren el análisis de la orientación didáctica de esta asignatura en función de las relaciones, formación y desarrollo conceptual-procedimental contextualizado a la ingeniería.

Ese rigor, según Pérez (2020), debe lograrse en cada una de asignaturas de Matemática que forman parte del currículo, que se orientan al Cálculo Diferencial e Integral de funciones de una y varias variables, el análisis vectorial, el Álgebra Lineal, la Geometría Analítica, Métodos operacionales de cálculo, Probabilidades, Estadística y Variable Compleja, entre otras, que están distribuidas en los primeros semestres de las carreras de ingenierías.

El objetivo del presente artículo es ofrecer pautas para el tratamiento didáctico-matemático del proceso de enseñanza-aprendizaje del CI y mostrar ejemplos de Situaciones Didáctico-Matemáticas (SDM) para el tratamiento de los problemas de PVA del CI en problemas ingenieriles

Marco teórico.

Los referentes que sirvieron de base para el tratamiento didáctico-matemático del proceso de enseñanza-aprendizaje del CI, son:

El enfoque histórico-cultural de (Vygotsky, 1987), específicamente lo relacionado con el papel desarrollador del aprendizaje y la enseñanza; la concepción del aprendizaje como la actividad de producción y reproducción del conocimiento bajo condiciones de orientación e interacción social entre docentes y estudiantes de forma permanente, interiorizando formas concretas de su actividad interactiva, las que se convierten en sistemas de signos que mediatizan y organizan el funcionamiento integral de todas sus funciones psíquicas; es decir, la concepción del aprendizaje matemático como construcción personal e interactiva, mediatizada y condicionada por los elementos situacionales del contexto, la relación entre pensamiento y lenguaje.

El enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007), que entiende la Matemática como una actividad de las personas implicadas en la solución de cierta clase de situaciones-problemas, e interpreta el significado institucional y personal de los objetos matemáticos en términos de los sistemas de prácticas operativas, discursivas y normativas que se ponen en juego en la solución de dichas situaciones.

De los autores Crisóstomo, Ordóñez, Contreras, y Godino (2004); se han tomado los significados institucionales sobre los objetos de la integral definida desde la perspectiva de la didáctica de la Matemática. Este estudio aportó criterios para seleccionar, las distintas configuraciones epistémicas (finita, intuitiva, infinita, primitiva, sumatoria, analítica, generalizada) y los objetos primarios de la actividad matemática.

Los estudios de Duval (2006), Otte (2006), Arzarello y Sabena, (2011) los cuales reconocen la mediación semiótica y la utilización de diferentes formas de representación como medio para exteriorizar las representaciones mentales; es decir, para hacerlas accesibles a los demás.

En el orden metodológico en el presente trabajo además se asumen los presupuestos de la Matemática en contexto de las ciencias Camarena (2009), Azcarate y Camacho (2003), específicamente:

Se precisa integrar la Matemática con situaciones globales y de otras ciencias, presentar los contenidos buscando el equilibrio entre las dos dimensiones de la Matemática: como objeto y como medio o instrumento; enfatizar en el proceso de abstracción, la incorporación de las Tecnologías de la información y las Comunicaciones (TIC) como instrumento que permite trabajar la representación y visualización dando mayor importancia a los métodos gráficos y numéricos.

De Montes de Oca (2020) se consideran las SDM como:

Formas de presentación del contenido y un recurso metodológico que coadyuva a una participación activa, reflexiva, responsable y crítica de los estudiantes y docentes, pues posibilitan prestar atención a los requerimientos que constituyen el núcleo fundamental de cada uno de los campos de acción del docente en el tratamiento didáctico de los objetos y procesos matemáticos, con especial atención a los relacionados con la comunicación que se lleva a cabo en el contexto del aula, el trabajo con los diferentes registros de representación semiótica y la utilización del lenguaje matemático.

Así de la referida autora, se asumen las características generales de las SDM, entre las que se destacan las siguientes:

- P
Permiten organizar el tratamiento didáctico de los objetos y procesos matemáticos en atención a los diferentes contextos.
- O
Otorgan prioridad a los procesos cognitivos-comunicativos y socio culturales en los que el lenguaje matemático participa.
- P
Permiten la articulación entre los diferentes registros de representación de los objetos matemáticos y la transferencia del conocimiento utilizado en un contexto a otro contexto diferente.
- E
En ellas se concreta la orientación comunicativa y contextualizada de los objetivos, contenidos y métodos.
- P
Permiten valorar las interacciones de los docentes, los alumnos y de estos con los recursos didácticos.
- P
Propician la gestión del conocimiento a través de múltiples fuentes y en especial a partir del empleo de las tecnologías de la información y las comunicaciones.

Para el diseño y valoración de la actividad matemática mediante el desarrollo de SDM se utilizan como objetos los definidos por (Godino et al., 2017, p. 3):

Situaciones-problema: son las aplicaciones intramatemáticas o extramatemáticas, entendidas como las tareas que inducen la actividad matemática.

Lenguajes: son aquellos términos y expresiones matemáticas; notaciones, símbolos, representaciones gráficas en sus diversos registros (gestual, oral, escrito).

Conceptos: son las entidades matemáticas que se introducen mediante descripción o definición.

Proposiciones: aquellas propiedades o atributos; enunciados sobre conceptos.

Procedimientos: son las técnicas de cálculo, operaciones y algoritmos.

Argumentos: son los enunciados requeridos para justificar o demostrar las proposiciones o explicar los procedimientos.

Los referentes teóricos enunciados dieron lugar a la formulación de los presupuestos metodológicos que se exponen a continuación, y luego se concretan en las SDM.

Pautas para el tratamiento didáctico-matemático del PEA del CI.

Concebir el aprendizaje matemático como un proceso comunicativo, todo lo cual implica considerar las representaciones semióticas como un medio del cual dispone el estudiante para exteriorizar sus representaciones mentales; es decir, para hacerlas accesibles a los demás.

Concebir el aprendizaje matemático como un proceso consciente de apropiación de “saberes matemáticos”, que se produce a través de la actividad matemática mediada por el profesor en el plano social y las tecnologías digitales como mediadores instrumentales.

Concebir la actividad matemática que favorezca el desarrollo del pensamiento matemático avanzado y que incluye el aprendizaje de procesos como: generalizar, y modelar como los más potentes.

Las SDM deben guiar la práctica formativa del estudiante para la integración armónica de los saberes con la implicación personal de los estudiantes por alcanzar un objetivo integrador, que incentiven el desarrollo del pensamiento matemático y la comunicación interpersonal entre los estudiantes, estimulando la confrontación de criterios, el intercambio, el diálogo, el aprendizaje cooperativo y participativo, que refuercen el papel educativo que tienen estas acciones en la formación integral.

La necesidad de incorporar las TIC como herramienta de apoyo en el aprendizaje y que posibiliten las interacciones entre los estudiantes, profesores y entre estos con el contenido y

las tecnologías digitales, para hacer posible la construcción personalizada y colaborativa de significados mediante diversos procesos cognitivos, afectivos y volitivos.

Se considera al CI como una potente herramienta matemática que permite calcular cantidades de magnitud relacionadas fundamentalmente con el pensamiento ingenieril. A través de los años y hasta nuestros días, su interpretación tradicional ha estado dada por el reconocimiento de la operación inversa que existe entre derivada e integral, cuestión que ha favorecido la solución de problemas de aplicación de los objetos del CI.

Complementar la interpretación del CI desde el reconocimiento de las matemáticas del cambio como un componente esencial para desarrollar el pensamiento ingenieril, desde el uso de los objetos complejos del CI en la solución de problemas, resulta importante para la aplicación de los objetos definidos como complejos del CI de forma adecuada en la solución de problemas.

También, articular las nociones de PVA, a través de este componente, las cuales se relacionan con la derivada y la integral, respectivamente, es esencial en la organización del cálculo que, a su vez, se apoyan en los objetos matemáticos, igualmente complejos: función y límite, Robles, Tellechea y Font (2014). Un ejemplo de esta relación, se manifiesta en la relación que existe entre la velocidad instantánea de variación y el cambio acumulado o neto representado por la distancia recorrida por un móvil, cuando se resignifica el cálculo del área debajo de una curva, Stewart (2012).

Significar el TFC como la conexión que se establece entre las dos ramas del cálculo: el cálculo diferencial y el cálculo integral. El TFC precisa la relación inversa entre la derivada y la integral, permite calcular con gran facilidad áreas e integrales, sin tener que calcularlas como límites de sumas.

Interpretar el TFC como la integral de una razón de cambio y su cambio neto, lo cual es necesario para lograr lo anterior expuesto, representado por $\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$, y proceder determinando, en el caso de la integral definida, con el cálculo del área debajo de la curva y resignificarla a otra cantidad donde se aplique este tipo de integral en las ciencias exactas, naturales o sociales.

Las siguientes SDM ilustran este tipo de interpretación que abordan problemas del cálculo ingenieril tratando los PVA desde la *resignificación* de problemas clásicos del CI y la interpretación del TFC.

Ejemplificación de las SDM en problemas de carreras ingenieriles.

SDM 1: Un conductor eléctrico transporta una corriente eléctrica variable con el tiempo, que decrece según la ecuación $i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, donde su valor máximo es $I_0 = 2A$ y la constante de tiempo de capacidad del circuito es $\tau = 100s$. Calcular a) La carga eléctrica total que atraviesa cualquier sección transversal del conductor eléctrico entre el instante inicial y $t = \tau$; b) La carga eléctrica total que atraviesa cualquier sección entre el instante inicial y $t \rightarrow \infty$.

Solución:

Nótese que la ecuación dada de la corriente eléctrica " $i(t)$ " modela un circuito eléctrico resistivo-capacitivo "RC", donde ocurre un proceso de almacenamiento de la carga en el capacitor, cuyo grafico de corriente eléctrica i (eje y) vs tiempo t (eje x), se modela en toda su extensión en la figura I, a través de una función trascendente exponencial decreciente, con apoyo del asistente matemático para graficar GeoGebra. El intervalo de interés $0 \leq t \leq \infty$, figura II, modela el problema en cuestión, ya que resulta no razonable tomar el tiempo negativo.

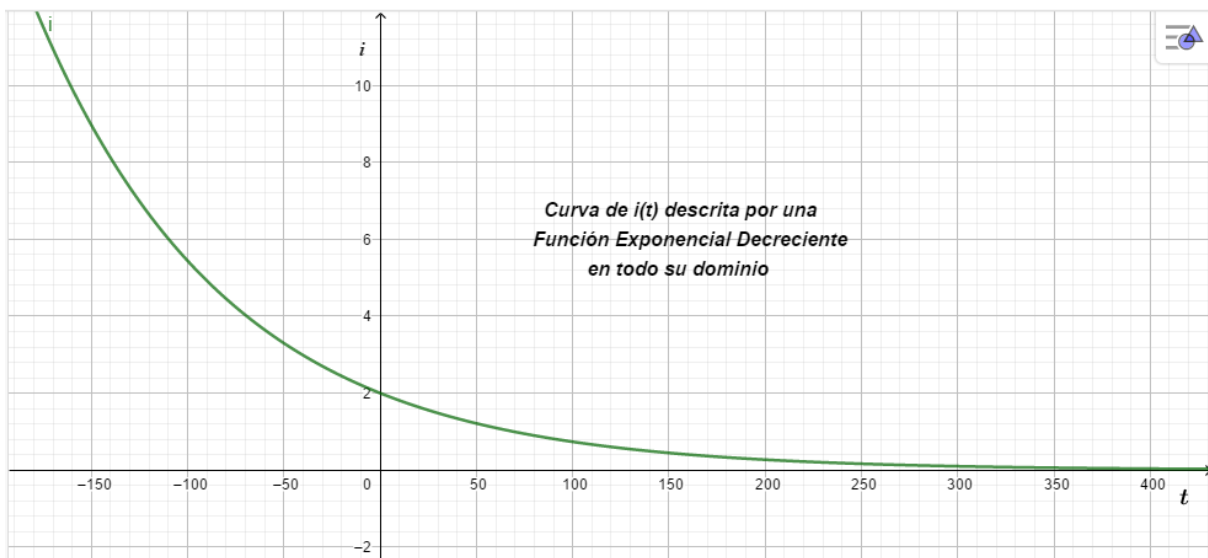


Figura I. Curva de la función $i(t)$ en el intervalo $-\infty \leq t \leq \infty$.

Fuente: elaborado por los autores

En el gráfico de la figura II, además, se puede observar la variación de la corriente eléctrica (ordenada), en decrecimiento, en la medida que varía el tiempo (abscisa), en aumento; describiéndose así, el proceso de carga del capacitor.

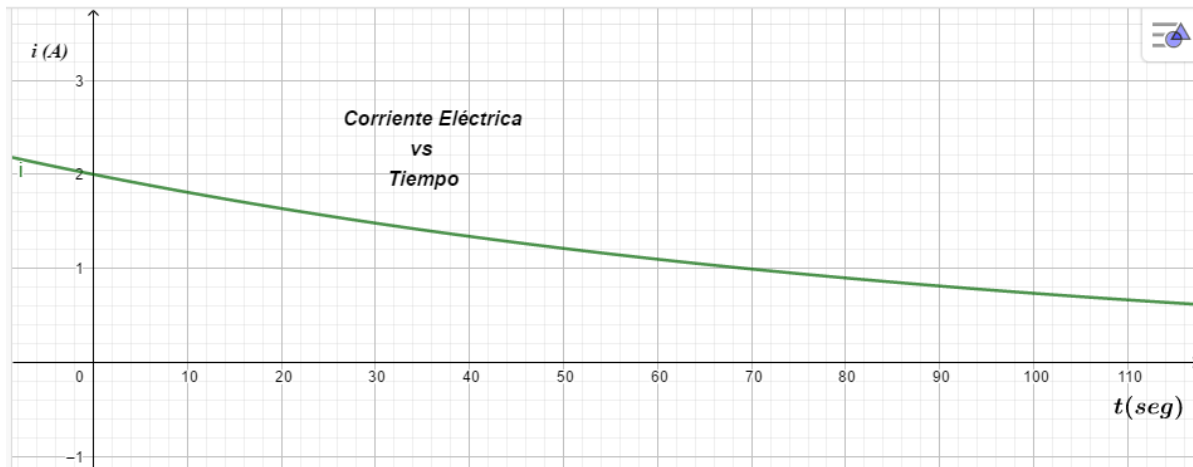


Figura II. Curva de la función $i(t)$ ampliada en el intervalo de interés $0 \leq t \leq \infty$
 Fuente: elaborado por los autores

De igual manera, este comportamiento variable podemos constatarlo al tabular la ecuación dada, ver tabla 1, sección A, donde se muestra la variación de todos los parámetros que intervienen en el cálculo de $i(t)$ respondiendo a la función trascendente exponencial $i(t) = I_0 e^{-t/T}$, cuya tendencia al infinito positivo es cero. Por otro lado, la sección B de la tabla 1 muestra la partición del área bajo la curva descrita por la función $i(t)$ en el intervalo positivo del eje x, donde se construyen infinitos rectángulos de lados Δt (base) e $i(t)$ (altura), cuyas áreas $(i(t) \cdot \Delta t)$ acumuladas (sumas de Riemann:) describen toda la región bajo la curva, luego el límite, cuando Δt se toma lo más pequeño posible, de la sumas de áreas acumuladas $(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n i(t) \Delta t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (I_0 e^{-\frac{t_i}{T}}) \Delta t)$ resulta el área bajo la curva y la poste el valor de la carga del condensador en su estado de equilibrio (cargado).

Tabla 1- Sección A) Muestreo de la variación de la corriente respecto al tiempo. Sección B) Partición del área bajo la curva de $i(t)$.

Sección A)					Sección B)				
No. iteraciones	t (seg)	I_0 (A)	T (seg)	t/T	i(t) (A)	Δt (seg)	Δi (A)	i(t)* Δt (A.seg)	$\Sigma i(t)*\Delta t$ (A.seg)
1	0	2	100	0	2	0.5		1	1
2	0.5	2	100	0.005	1.990024958	0.5	0.009975042	0.995012	1.995012
3	1	2	100	0.01	1.980099667	0.5	0.009925291	0.99005	2.985062
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
200	99.5	2	100	0.995	0.739446889	0.5	0.003706493	0.369723	126.7404

201	100	2	100	1	0.735758882	0.5	0.003688007	0.367879	127.1083
202	100.5	2	100	1.005	0.73208927	0.5	0.003669613	0.366045	127.4744
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1001	500	2	100	5	0.013475894	0.5	6.75482E-05	0.006738	199.1562
1002	500.5	2	100	5.005	0.013408683	0.5	6.72113E-05	0.006704	199.1629
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
<i>Lim</i>Σ<i>i(t)*Δt</i>									200.0000

Fuente: elaborado por los autores

Escoger el Δt lo más próximo a cero, permite aumentar la rectangularización del intervalo del área bajo la curva de $i(t)$, genera un mayor número de iteraciones y garantiza una mejor precisión en el resultado, como se muestra en la tabla 2, acercándonos al valor que pudiéramos obtener a través del TFC.

En el diagrama de la figura III se muestra una interpretación más contextualizada del ejercicio a través de la conexión entre los distintos elementos sugeridos que intervienen en el ejercicio; el medidor o registrador de carga que opera como contador de la cantidad de carga que atraviesa el conductor eléctrico, similar al contador de la cantidad de agua en una instalación hidráulica, el circuito RC compuesto por la resistencia "R" y el capacitor "C", equivalentes ambos, interconectados por los conductores eléctricos, tal como tuberías de agua en un sistema hidráulico, a través de los cuales circula una corriente eléctrica $i(t)$ variable con

Tabla 2- Sección A) Variación de la corriente respecto al tiempo. Sección B) Partición del área bajo la curva de $i(t)$.

Sección A)					Sección B)				
No. iteraciones	t (seg)	I ₀ (A)	T (seg)	t/T	i(t) (A)	Δt (seg)	Δi (A)	i(t)*Δt (A.seg)	Σi(t)*Δt (A.seg)
1	0	2	100	0	2	0.5		1	1
2	0.5	2	100	0.005	1.990024958	0.5	0.009975042	0.995012	1.995012
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1001	100	2	100	1	0.735758882	0.1	0.000736127	0.073576	126.5609
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
<i>Lim</i>Σ<i>i(t)*Δt</i>									200.0000

Fuente: elaborado por los autores

el tiempo, provocada por la diferencia de tensión variable con el tiempo aplicada en los extremos de la instalación.

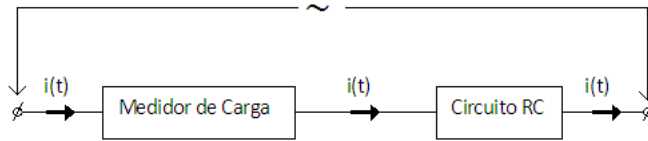


Figura III: Diagrama de conexión entre los distintos elementos que intervienen en el ejercicio.

Fuente: elaborado por los autores

Desde la física, si la rapidez del flujo de carga "q" varía con el tiempo entonces la corriente eléctrica resulta, también, variable con el tiempo y viceversa; respondiendo a la expresión matemática:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

La corriente eléctrica es la misma para todas las secciones transversales del conductor eléctrico, en el mismo instante de tiempo, aun cuando el área de la sección transversal pueda ser distinta en diferentes puntos. Resulta entonces, que despejamos la expresión anterior:

$$dq(t) = i(t)dt$$

Integramos ambos miembros:

$$\int dq(t) = \int i(t)dt$$

Luego la expresión buscada de la carga es:

$$q(t) = \int i(t)dt$$

Sustituimos $i(t)$ por su expresión y aplicamos el TFC para el intervalo $[0, t]$:

$$q(t) = \int_0^t (I_0 e^{-t/T}) dt$$

$$Q(t) = (I_0 (-T) e^{-t/T}) \Big|_0^t$$

$$Q(t) = I_0 T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (1)$$

Luego :

a) Evaluamos la expresión (1) para $t = T$ y obtenemos $Q(100) \approx 126 \text{ C}$, que resulta la carga total que atraviesa cualquier sección transversal del conductor eléctrico entre el instante inicial y $t = T$.

Este comportamiento gráfico, corriente eléctrica i (ordenada) vs tiempo t (abscisa), puede ser apreciado en la representación realizada a través del asistente matemático GeoGebra en la figura IV, donde obtenemos a través del TFC el área bajo la curva en el intervalo dado y su correspondencia con el fenómeno físico de la carga eléctrica; de igual manera en la figura V hallamos el área bajo la curva a través de la partición del intervalo dado y el límite de la suma de los diferenciales de áreas obtenidos, quedando evidenciados los PVA manifiestos: $\int_0^T (I_0 e^{-t/T}) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(I_0 e^{-\frac{t_i}{T}} \right) \Delta t$.

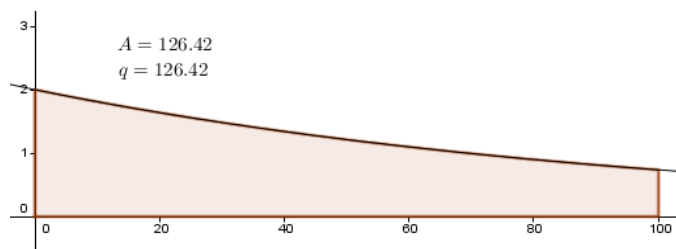


Figura IV: Área bajo la curva de $i(t)$ según TFC.
Fuente: elaborado por los autores

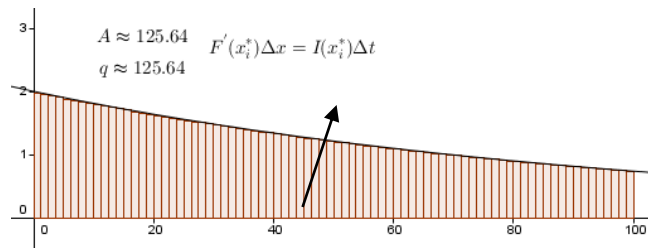


Figura V: Área bajo la curva de $i(t)$ según partición del intervalo
Fuente: elaborado por los autores

b) Evaluamos la expresión (1) para $t \rightarrow \infty$ y obtenemos $Q(\infty) = I_0 T \rightarrow Q(\infty) \approx 200 \text{ C}$

Veamos, entonces, los objetos utilizados para el diseño y valoración de la actividad matemática en el desarrollo de esta SDM 1, que encontramos referidos en el cuadro 1.

Cuadro 1: Objetos utilizados en el desarrollo de la SDM 1.

Objetos	Descripción
Situaciones-problema	Calcular el área bajo la curva a través de la partición del intervalo y el TFC, resignificándola como la carga eléctrica total.
Lenguajes	Carga eléctrica, corriente eléctrica, tensión, constante de tiempo de capacidad del circuito, función exponencial decreciente, partición del intervalo, región, rectangularización del área bajo la curva, PVA, TFC, sumas de Riemann, graficar usando GeoGebra, CI, límite de las sumas de Riemann.
Conceptos	Función exponencial, monotonía, área bajo una curva, PVA, TFC, sumas de Riemann, límite.
Proposiciones	P1: el área de la región bajo la curva en el intervalo en análisis se resignifica como la carga eléctrica total y se puede aproximar como la suma de las áreas (cargas

	<p>eléctricas) de los rectángulos en las que se divide la región bajo la curva en el intervalo en análisis.</p> <p>P2: el área (la carga eléctrica) en cada rectángulo se aproxima por el producto de la corriente eléctrica instantánea (largo del rectángulo, eje y) por el diferencial de tiempo según la partición del intervalo (ancho del rectángulo, eje x).</p> <p>P3: el área de la región bajo la curva en el intervalo en análisis (la carga eléctrica total) se puede calcular, además, a través del TFC.</p> <p>P4: el área de la región bajo la curva (la carga eléctrica total) en el intervalo $[0, \infty[$, se puede aproximar como límite cuando $t \rightarrow \infty$ de la suma de las áreas (cargas eléctricas) de los rectángulos en las que se divide la región bajo la curva en el intervalo en análisis.</p>
Procedimientos	Dividir el área bajo la curva, calcular áreas de los rectángulos, evaluar el límite de las sumas de Riemann, realizar cálculos aritméticos a través del TFC, representar la función exponencial con GeoGebra.
Argumentos	Es necesario representar la curva con GeoGebra, particionar la región bajo la curva a través de rectángulos, realizar los cálculos pertinentes para encontrar las sumas de Riemann, hallar su límite y comparar el resultado con el obtenido usando el TFC. Se mide la acumulación de la carga eléctrica mediante el cálculo de una integral definida y se considera como su límite.

Fuente: elaborado por los autores

Finalmente, relacionamos a continuación algunas observaciones técnicas que resultan importantes e interesantes:

- P

Para un circuito RC, cuando el tiempo coincide con la constante de tiempo de capacidad del circuito $t = T$, el valor de la carga alcanza es el 63% de la carga de equilibrio en el condensador, o sea se dice que el condensador está al 63% de carga.

- L

La carga en equilibrio en el condensador corresponde a cuando $t \rightarrow \infty$, o sea se dice que el condensador está totalmente cargado.

SDM 2: El diámetro exterior de una polea es 800mm y la sección transversal de su corona es como se muestra en la figura VI. Si se sabe que la polea está hecha de acero, determine el volumen de la polea que se forma al rotar la sección transversal de la corona de la polea respecto al eje x.

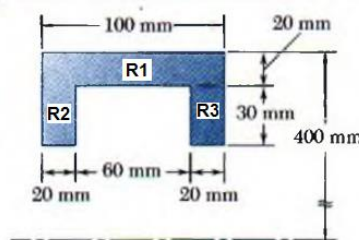


Figura VI: Sección transversal de la corona de la polea.
Fuente: tomado de Mecánica Vectorial para Ingenieros

Solución:

El ejercicio se reduce a la búsqueda del volumen de la corona. Si aplicamos el teorema de Pappus-Guldinus sobre el cálculo del volumen: *El volumen de un cuerpo de revolución es igual al área generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centroide del área al momento de generar el cuerpo*, entonces tendríamos, que el elemento dA del área A , se rota con respecto al eje x , ya que el teorema no puede aplicarse si el eje de rotación interseca al área generatriz, (figura VII A), luego el volumen dV generado por el elemento dA es igual a $2\pi y dA$.

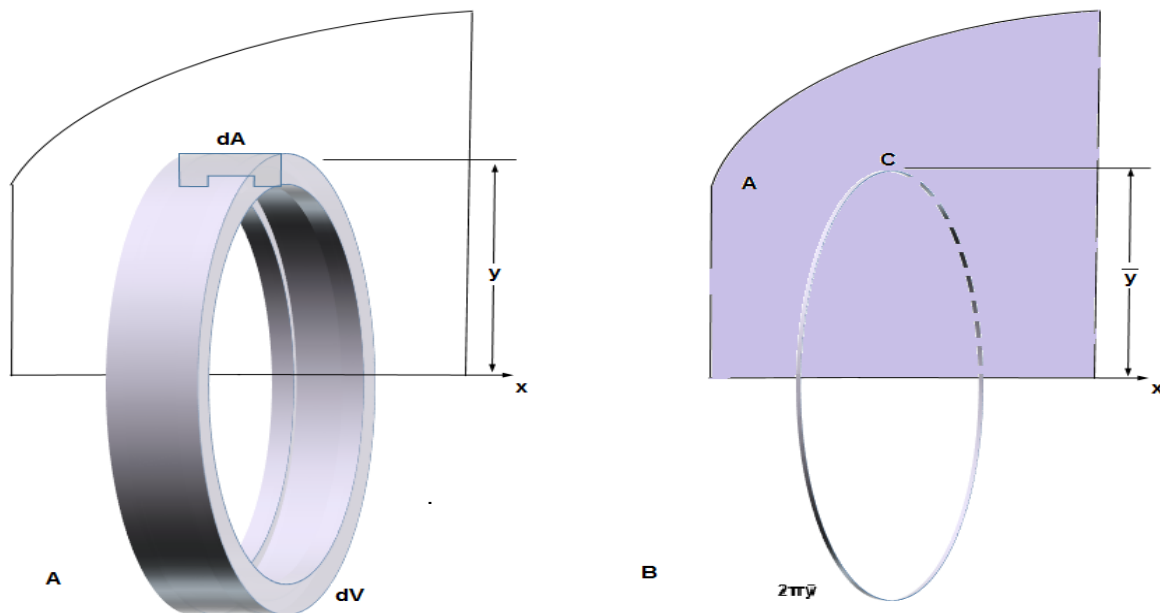


Figura VII: Corona de la polea en revolución. A) Area generatriz.
B) Distancia recorrida por el centroide del área
Fuente: elaborado por los autores

Por tanto, el volumen total generado por A es:

$$dV = 2\pi\bar{y}dA$$

$$V = \int 2\pi\bar{y}dA$$

Para determinar las coordenadas del centroide de una placa homogénea tenemos las ecuaciones:

$$\bar{x}A = \int x \cdot dA$$

$$\bar{y}A = \int y \cdot dA$$

El punto cuyas coordenadas son \bar{x} y \bar{y} se conoce como el *centroide C del área A de la placa* (figura VII B). Si la placa no es homogénea, estas ecuaciones no se pueden utilizar para determinar el centro de gravedad de la placa; sin embargo, éstas aún definen al centroide del área. El volumen del cuerpo se calcula por: $V = \int 2\pi\bar{y}dA$, donde queda $V = 2\pi\bar{y}A$, donde el término $(2\pi\bar{y})$ es la distancia recorrida por el centroide C de A. Con el objetivo de simplificar la solución del ejercicio descomponemos la sección transversal de la corona mostrada en la figura VI en tres rectángulos, describiendo tres regiones R_1, R_2, R_3 , donde $R_2 = R_3$, a las cuales les aplicamos la ecuación $V = \int dV \approx 2\pi\bar{y}A$, en la tabla 3 se muestra el valor aproximado del volumen del cuerpo a partir de la suma de los diferenciales de volúmenes acumulados por regiones.

Tabla 3:

Calculo del volumen del cuerpo

Regiones	Coordenada del centroide respecto al eje de rotación x.	Distancia recorrida por el centroide.	Área de la sección transversal.	Volumen.
R	\bar{y}	$2\pi\bar{y}$	A	$2\pi\bar{y}A$
R ₁	0.390m	2.450m	0.02x0.1=0.002m ²	≈4.900x10 ⁻³ m ³
R ₂	0.365m	2.293m	0.03x0.02=0.0006m ²	≈1.376x10 ⁻³ m ³
R ₃	0.365m	2.293m	0.03x0.02=0.0006m ²	≈1.376x10 ⁻³ m ³
Volumen total				≈7.652 x10⁻³m³

Fuente: adaptado por los autores

Luego, los objetos utilizados para el diseño y valoración de la actividad matemática en el desarrollo de esta SDM 2 aparecen referidos en el cuadro 2.

Cuadro2: Objetos utilizados en el desarrollo de la SDM 2.

Objetos	Descripción
Situaciones-problema	Calcular el volumen de la pieza dada.
Lenguajes	Volumen de la pieza, regiones, polea, corona de la polea en revolución, área generatriz, centroide, teorema de Pappus-Guldinus, PVA, sumas de Riemann, CI, límite de las sumas de Riemann, TFC.
Conceptos	Volumen, polea, cuerpo en revolución, área generatriz, centroide, teorema de Pappus-Guldinus, PVA, TFC, sumas de Riemann, límite.
Proposiciones	P1: el volumen de la pieza se puede aproximar como la suma de los diferenciales de áreas de la sección transversal de la polea por la distancia recorrida por el centroide de la sección transversal de la polea en el momento de ponerla en revolución para generar el cuerpo. P2: la sección transversal de la polea puede ser dividida en tres regiones, cuyas secciones transversales conocidas (rectángulos), simplifican los cálculos. P3: el volumen de la pieza se puede aproximar como la suma de los diferenciales de volúmenes de cada región en la que se dividió. P4: los diferenciales de volúmenes de cada región se aproximan como la suma de los diferenciales de áreas de la sección transversal de cada región por la distancia recorrida por el centroide de cada región en el momento de ponerla en revolución para generar el cuerpo.

Procedimientos	Esquematizar la pieza a partir de su sección transversal en revolución, esquematizar el centroide de la sección transversal en revolución, dividir la sección transversal en regiones, calcular las distancias recorridas por los centroides de cada región, calcular áreas de los rectángulos descritos por las regiones, calcular el volumen por regiones, calcular la suma de los diferenciales de volúmenes de cada región, realizar cálculos algebraicos a través del CI.
Argumentos	Es conveniente representar la pieza a partir de su sección transversal y el centroide de la sección transversal, ambos tomados en revolución para facilitar la comprensión de la solución, dividir la sección transversal en regiones para viabilizar los cálculos, se conviene obtener el valor aproximado del volumen del cuerpo a partir de la suma de los diferenciales de volúmenes acumulados por regiones.

Fuente: elaborado por los autores

Haber calculado el volumen de la pieza, utilizando la representación semiótica de los PVA, nos abre el camino al conocimiento de otras magnitudes físicas importantes que caracterizan a dicha pieza. Si conociéramos la densidad volumétrica específica del material empleado " ρ ", según valores que podemos encontrar tabulados, se puede calcular la masa de la plega $m = \rho V$, a través de la cual podemos hallar el peso de la misma $P = mg$.

SDM 3: Hallar el potencial eléctrico para los puntos situados en el eje de un disco circular uniformemente cargado, cuya carga por unidad de área es σ , según muestra la figura VIII.

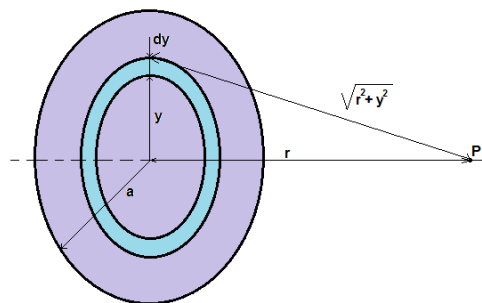


Figura VIII: Punto P situado en el eje de un disco cargado uniformemente de radio a

Fuente: adaptado por los autores

Solucion:

La teoría electromagnética muestra, que si se tiene una región en la que existe carga eléctrica distribuida con densidad σ , el campo eléctrico E y el potencial eléctrico V en un punto del espacio, cuyo vector posición es r , pueden ser evaluados mediante integrales.

Consideremos un dq formado por un anillo circular plano de radio "y", y ancho dy tal que:

$$dq = \sigma(2\pi y)(dy)$$

Donde $(2\pi y)(dy)$ resulta el área del anillo circular plano y todas las partes de este elemento de carga están a la misma distancia $r' = \sqrt{r^2 + y^2}$ del punto axial P, de esta manera la contribución dV al potencial eléctrico en P es:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{dq}{r'}$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{\sigma(2\pi y)(dy)}{\sqrt{r^2 + y^2}}$$

$$V = \int_0^a \frac{\sigma y dy}{2\epsilon_0 \sqrt{r^2 + y^2}} \quad (2)$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{y dy}{\sqrt{r^2 + y^2}} \leftarrow \text{calculo de la integral a través de un cambio de variables}$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{r^2 + y^2} - r \right) \Big|_0^a$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{r^2 + a^2} - r \right) \quad (3)$$

Este resultado de la ecuación (3) es válido para cualquier valor de r conocido.

Ahora bien, un caso especial sería si $r \gg a$, entonces el disco circular uniformemente cargado se comportaría como una carga puntual y el término $\sqrt{r^2 + a^2}$ se transformaría, utilizando series de potencia en desarrollos de Maclaurin, aproximadamente en $r + \frac{a^2}{2r}$, finalmente el potencial eléctrico que resulta en el punto P sería:

$$V \cong \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\left(r + \frac{a^2}{2r} \right) - r \right) = \frac{\sigma \pi a^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r},$$

donde $q = \sigma \pi a^2$ es la carga total del disco.

Los objetos utilizados para el diseño y valoración de la actividad matemática en el desarrollo de esta SDM 3 se reflejan en el cuadro 3.

Cuadro 3: Objetos utilizados en el desarrollo de la SDM 3.

Objetos	Descripción
Situaciones-problema	Calcular el área bajo la curva de la función integrando de la ecuación (2), resignificándola como el potencial eléctrico sobre el punto P.
Lenguajes	Potencial eléctrico, campo eléctrico, densidad distribuida de carga eléctrica, función integrando, PVA, sumas de Riemann, límite de las sumas de Riemann, TFC.
Conceptos	Función integrando, área bajo una curva, integral definida, PVA, TFC
Proposiciones	P1: el área de la región bajo la curva de la función integrando de la ecuación (2) se

	<p>resignifica como el potencial eléctrico para los puntos situados en el eje de un disco circular uniformemente cargado.</p> <p>P2: el potencial eléctrico para los puntos situados en el eje de un disco circular de radio a, uniformemente cargado, se calcula exactamente a través de una integral definida, según la ecuación (2).</p> <p>P4: el valor el potencial eléctrico para los puntos situados en el eje de un disco circular de radio a, uniformemente cargado, es $V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{r^2 + a^2} - r)$ para cualquier valor de r.</p> <p>P5: si $r \gg a$, el disco circular uniformemente cargado se comportaría como una carga puntual, donde $V \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ y $q = \sigma\pi a^2$</p>
Procedimientos	Establecer la relación entre el potencial eléctrico, la densidad de carga y la distancia al punto, realizar cálculos algebraicos a través del TFC.
Argumentos	Se conviene hallar la acumulación del potencial eléctrico, resignificado como el área bajo la curva de la función integrando de la ecuación (2), mediante el cálculo de una integral definida y se asume como su límite.

Fuente: elaborado por los autores

Generalizando, el potencial en un punto P cualquiera del espacio debido a una región en la que existe una carga eléctrica uniformemente distribuida con densidad ρ , cuyo vector de posición es \vec{r}' , figura IX, .

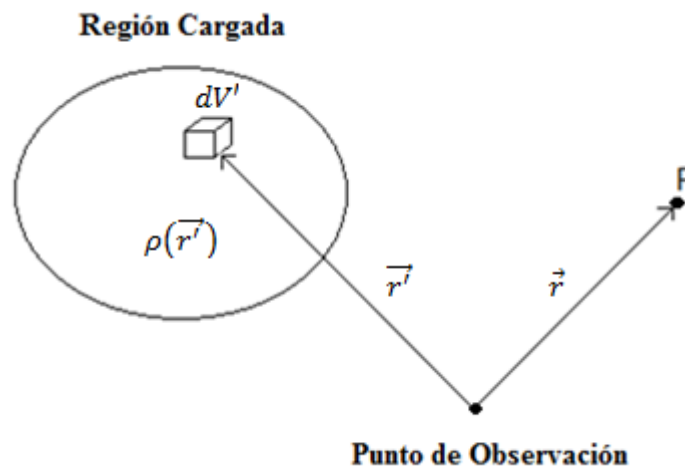


Figura IX: Punto P que dista de una región cargada.

Fuente: adaptado por los autores

puede ser evaluado mediante la integral:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4)$$

El cálculo integral de la expresión (4) suele complejizarse en dependencia del tipo de región cargada y el sistema de coordenadas que utilicemos, para lo cual se hace necesario el uso de las TIC, a través de un asistente matemático apropiado para su solución.

Validación de los resultados y consideraciones finales.

En el tratamiento del CI aún prevalece la problematización epistémica del contenido desde un enfoque analítico y abstracto del contenido, aunque se aprecia la tendencia a usar los procesos de variación y acumulación como contextualización y uso del CI. El empleo contextualizado de estos procesos, a través de nuevas SDM ha facilitado la motivación y comprensión de los estudiantes en las clases sobre aplicaciones del CI.

Los PVA presentes en el CI no son magnificados, perdiéndose de vista su alcance y potencialidades en la solución de problemas complejos, por lo que la resolución de situaciones problemas, a través de nuevas SDM deben profundizar en la esencia de los PVA presentes en los mismos, enfatizando en el uso de las diferentes representaciones semióticas, los objetos matemáticos primarios y su relación con las actividades de aprendizaje, lográndose resignificar los problemas clásicos del CI y la interpretación del TFC en problemas complejos afines a la ciencia y la tecnología.

El empleo, manejo y conocimiento de las TIC, más específicamente de los asistentes matemáticos, resulta insuficiente. Esto implica que debemos ocuparnos de la incorporación progresiva y acelerada de estos medios didácticos al PEA de la Matemática, que permitan optimizar el pensamiento matemático y lograr la interpretación representacional de conceptos y propiedades. En este caso, la representación de los diferentes registros semióticos a través de asistentes matemáticos afines a la problemática presentada es procedimiento esencial para el entendimiento y solución de las SDM, que unido al uso adecuado de otras acciones didácticas como la descripción, la interpretación, la variación de condiciones, la modificación, entre otras, permiten arribar a resultados, verificar procedimientos analíticos y resignificar los objetos matemáticos en términos de ciencia y la tecnología.

Las SDM mostradas se han trabajado en estudiantes que cursan la carrera de ingeniería eléctrica del curso por encuentro en su primer año, conformando una muestra de 60 estudiantes, con la cual se propuso evaluar la aceptación y capacidad de asimilación de cada una de las formas de presentación de los PVA del CI, su interrelación con el TFC y la resignificación de los objetos matemáticos a aspectos de interés en la carrera.

De manera general, pudimos determinar que los resultados obtenidos pueden ser catalogados como favorables, en cuando a los aspectos valorados, ver cuadro 4.

Cuadro 4: Evaluación de la capacidad de asimilación y aceptación de cada una de las formas de presentación de los PVA del CI en las SDM.

Formas de presentación de los PVA del CI	Aceptación	Asimilación
SDM 1	Muy positivo	Positivo
SDM 2	Muy positivo	Muy positivo
SDM 3	Muy positivo	Positivo

Fuente: elaborado por los autores

El 90% de los estudiantes tuvo una buena aceptación de las SDM y valoraron de muy positivo la presentación de problemas asociados a la ingeniería, lo cual despertó la motivación y el interés por la clase; consideraron importante el tratamiento dado a los objetos matemáticos y su resignificación en magnitudes físicas. De igual manera, en cuanto a la asimilación del contenido el 65% de los estudiantes presentó un resultado positivo y muy positivo; y las principales dificultades se centraron en la utilización del asistente matemático, el trabajo con los PVA y los algoritmos utilizados en la búsqueda de la primitiva.

Las SDM constituyen un medio viable que le permite al profesional de la educación poder implementar nuevas estrategias que accionen en el PEA de los educandos. El método tradicional didáctico que se establece en la relación profesor-estudiante donde solo se instruye al estudiante de contenidos y conceptos matemáticos abstractos, quien los capta y los reproduce tal como le fueron dados, va quedando atrás. Se tiende al uso de un método didáctico donde intervienen el profesor y el estudiante, donde el medio didáctico, facilita la construcción del conocimiento a través de situaciones didácticas contextualizadas para lograr un aprendizaje significativo, con la menor intervención del docente.

Referencias Bibliográficas.

- Arzarello, F., y Sabena, C. (2011). Semiotic and Theoretic Control in Argumentation and Proof Activities. *Educational Studies in Mathematics*, 77, 189-206. doi: <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9280-3>
- Azcarate, C., Y Camacho, M. (2003). Sobre la investigación didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No 2. Venezuela. p.135, 140.
- Beer, F., Russell, J. y Eisenberg, E. (2007). *Mecánica vectorial para ingenieros. Estática*. 8^{va} edición. Mexico, D.F: Editorial Iberoamericana, S.A.
- Bueno, S. (2021). Desarrollo de la generalización de las aplicaciones conceptuales en el cálculo integral para las carreras de ingeniería. *Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias de la Educación. Camaguey, Cuba*.
- Camarena, P. (2009). La Matemática en el contexto de la ciencia. México. *Revista Innovación educativa: Las Matemáticas y la educación*. 9 (46): 15-23. Disponible en https://www.academia.edu/38388601/Revista_Innovaci%C3%B3n_Educativa_no_73

[Matemáticas y educación superior Mathematics and Higher Education](#)

- Carvalho, P. y Oliveira, P. (2018). *Mathematics or mathematics for engineering? Proceedings of 2018 3rd International Conference of the Portuguese Society for Engineering Education (CISPEE)*, Aveiro, Portugal. Disponible en <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/8593463>
- Casio, O (1997). Cálculo de potenciales y campos eléctricos. *Pro Mathematica vol. XI* (21-22), p.117-130.
- Contreras, A. y Ordóñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 65-84.
- Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M. R. (2010). *Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 367-384. Disponible en <https://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/view/210806>
- Crisóstomo, E., Ordóñez, L., Contreras, A. y Godino, J. (2004). Reconstrucción del significado global de la integral definida desde la perspectiva de la didáctica de la matemática. *I Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas en Didáctica de las Matemáticas*. Universidad de Jaén.
- Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? *Relime* (número especial), 45-81. Recuperado el 6 de diciembre de 2019, de <https://www.clame.org.mx/relime.htm>
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education* 39 (1-2), 127-135. Disponible en <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M., & Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. *Actas Del Segundo Congreso Internacional Virtual Sobre El Enfoque Ontosemiótico Del Conocimiento y La Instrucción Matemáticos*, 1-13.
- Iglesias, N., Alonso, I. y Gorina, A. (2017). *El cálculo diferencial e integral en las carreras de ciencias técnicas. Especificidades de su enseñanza*. *Maestro y Sociedad*, 14(4), 660-670. Disponible en <https://maestrosociedad.uo.edu.cu/index.php/MyS/article/view/3087>
- Masot, F (2007-2008). Problemas de corriente eléctrica. *Boletín 5 ingeniería industrial*, dpto física aplicada III, universidad de Sevilla, p.4
- Montes, N. (2020). La formación didáctico-matemática de docentes: resultados teóricos *Revista Paradigma (Edición Cuadragésimo Aniversario: 1980-2020)*, Vol. XLI, p.271-288 (Scielo). Disponible en <http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/867>

- Otte, M. (2006). Proof and Explanation from a Semiotic Point of View. *Relime*, 23-43. Recuperado de <https://www.dialnet.unirioja.es/ descarga/articulo/2161526.pdf>
- Pérez, O. y Blanco, R. (2019). Contribución teórica y práctica a la didáctica del Cálculo Diferencial y del Álgebra Lineal para carreras de ingeniería. *Anales de la Academia de Ciencias de Cuba*.9(3). p.170-173. Disponible en <http://www.revistaccuba.cu/index.php/revacc/article/view/692>
- Pérez, O. (2020). La Formación y Desarrollo Conceptual en el Cálculo Diferencial y el Álgebra Lineal en las Carreras de Ingeniería. *Revista Paradigma (Edición Cuadragésimo Aniversario: 1980-2020)*, Vol. XLI, p.571-599 (SciELO). Disponible en <http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/849>
- Radmehr, F. y Drake, M. (2020). *Exploring Students' Metacognitive Knowledge: The Case of Integral Calculus*. *Education sciences*, 10(55), 1-20. Disponible en <https://www.mdpi.com/2227-7102/10/3/55>
- Robles, M. G, Tellechea, E., y Font, V.(2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática*, 26(2), p.69-109. Disponible en http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-58262014000200003&script=sci_abstract&tlng=pt102.
- Stewart, J. (2012). *Calculo de una variable. Trascendentes tempranas (7ª edición)*. México: Cengage Learning.
- Vigotsky, L. S. (1987). *Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores*. La Habana: Editorial Científico Técnica.

Autores:

Guillermo González Carracelas

Ingeniero Eléctrico por la Universidad de Camagüey (UC), Cuba, Máster en Ciencias Técnicas por la Universidad de Camagüey (UC), Cuba, Profesor Adjunto a la Facultad de Ciencias Matemáticas e Informáticas de la Universidad de Camagüey (UC), Cuba
Correo electrónico personal: guillermoglezcarracelas@gmail.com
Correo electrónico institucional: guillermo.gonzalez@reduc.edu.cu
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1285-9245>

Seydel Bueno García

Licenciado en Educación Matemática por la Universidad de Camagüey (UC), Cuba, Doctor en Ciencias Pedagógicas por la Universidad de Camagüey (UC), Cuba, Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas e Informáticas de la Universidad de Camagüey (UC), Cuba
Correo electrónico institucional: seydel.bueno@reduc.edu.cu
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5608-5507>

Nancy Montes De Oca

Licenciada en Educación Matemática por la Universidad de Camagüey (UC), Cuba, Doctora en Ciencias Pedagógicas por la Universidad de Camagüey (UC), Cuba, Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas e Informáticas de la Universidad de Camagüey (UC), Cuba
Correo electrónico institucional: nanci.montes@reduc.edu.cu
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5651-3927>